

УДК 532.527:517.958

КОЛЬЦЕВЫЕ ВИХРИ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ С КУСОЧНО-ПОСТОЯННОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

ГИЛЬМАН О. А., МИНДЛИН И. М.

Основными моделями для теоретического анализа кольцевых вихрей являются сферический вихрь Хилла [1] и тороидальный вихрь Максвелла [2]. В литературе отмечается, что характер течений, отвечающих этим моделям, далек от экспериментально наблюдаемых [3-5].

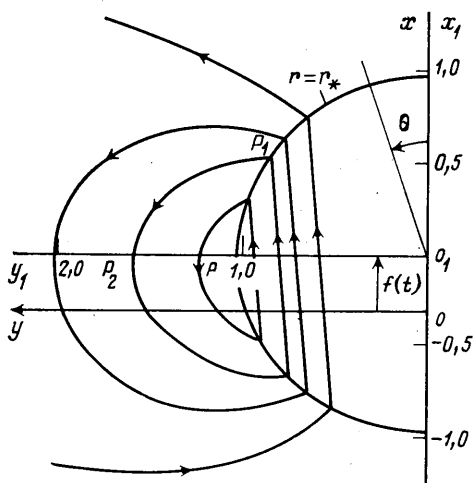
Ниже исследуется математическая модель для кольцевых вихрей, которая приводит к течениям, обладающим ббльшим сходством с наблюдаемыми в экспериментах. Эта модель описывает эволюцию ограниченной однородной тяжелой жидкой массы в неограниченной однородной тяжелой жидкой среде (жидкое «пятно» в жидкой среде). Плотность пятна может отличаться от плотности среды. Жидкость предполагается идеальной, несжимаемой; ее компоненты внутри и вне пятна — несмешивающимися, так что пятно и окружающая среда разделены жидкой границей; диффузией через границу и поверхностным натяжением пренебрегаем.

Рассматриваются течения, при которых граница пятна является поверхностью разрыва касательной к ней составляющей скорости — вихревой пеленой. Эта пелена либо формируется в силу различия плотностей пятна и окружающей среды, либо задается начальными условиями. Очевидно, вихревая пелена — это предельная модель тонкого слоя, в котором концентрируется завихренность. В [4] на основе экспериментальных результатов установлен факт концентрации завихренности в некотором слое, содержащем критическую точку кольцевого вихря. Этих результатов недостаточно, чтобы утверждать, что упоминаемый слой охватывает ограниченный объем

слабо завихренной жидкости, но с этими результатами не согласуется модель типа вихря Хилла и им не противоречит изучаемая ниже модель.

В качестве примера рассматривается эволюция первоначально сферического пятна одной плотности в среде другой плотности. В этом случае, согласно теореме В. Бьеркнесса [6], эволюция пятна сопровождается развитием циркуляционного течения. Показано, что такое течение, начавшееся из состояния покоя, представляет собой эволюционирующий кольцевой вихрь типа грибовидного облака, образующегося после мощного взрыва в атмосфере.

1. Постановка задачи, основные уравнения. Рассмотрим осесимметричное (с осью симметрии x) течение жидкости, удовлетворяющей сформулированным выше предположениям. Сила тяжести направлена вниз параллельно оси x (фиг. 1). Пусть



Фиг. 1

в объеме $r < r_*(\theta, t)$ плотность жидкости равна γ_1 , а неограниченная внешность объема заполнена жидкостью плотности γ_2 . Здесь и ниже r, θ, φ — сферические координаты с полюсом o_1 , движущимся вместе с пятном, $\varphi = \text{const}$ — уравнение меридиональной полуплоскости, t — время.

Течение внутри и вне пятна предполагается безвихревым, но граница пятна $r=r_*(\theta, t)$ является вихревой поверхностью. Соотношением $r=\rho r_*(\theta, t)$ введем переменную ρ вместо r , так что граница пятна описывается уравнением $\rho=1$; $\rho<1$ — его внутренность.

Следующие ниже уравнения записаны в безразмерных переменных. Размерные единицы длины R_0 и времени T_0 выбираются из условий

$$4\pi R_0^3 = 3V, \quad gT_0^2 = R_0$$

где V — объем пятна, g — ускорение свободного падения. Если в начальный момент пятно имеет форму шара, то R_0 — радиус шара и $r_*(\theta, 0) = 1$. Безразмерное ускорение свободного падения равно единице.

Уравнения движения запишем в виде

$$\Psi(\rho, \theta, t) = -\rho \sin \theta r_*(\theta, t) B(\rho, \theta, t) \quad (1.1)$$

$$B(\rho, \theta, t) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\rho_i=1} \frac{\sin^2 \theta_i \cos \varphi r_*(\theta_i, t) A(\theta_i, t)}{\sqrt{R}} d\theta_i d\varphi \quad (1.2)$$

$$R = \rho^2 r_*^2(\theta, t) + r_*^2(\theta_i, t) - 2\rho r_*(\theta, t) r_*(\theta_i, t) \tau$$

$$\tau = \cos \theta \cos \theta_i + \sin \theta \sin \theta_i \cos \varphi$$

$$\rho_i = 1: 0 \leq \theta_i \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} \sin \theta = -\frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial \theta} - \varepsilon \frac{\partial P}{\partial \theta_+} - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{A \sin^2 \theta}{r_*} Q \right) \quad (1.3)$$

$$H = \frac{A}{r_*^3} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \rho_+} + \frac{\partial \Psi}{\partial \rho_-} \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial \theta_+} = & -\frac{\partial}{\partial \theta} (r_* \cos \theta) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} (Q_r^2 + Q_\theta^2)_+ + \frac{\partial r_*}{\partial t} \frac{\partial Q_r}{\partial \theta_+} - \frac{\partial r_*}{\partial \theta} \frac{\partial Q_r}{\partial t_+} - \\ & - \frac{\partial}{\partial t} (r_* Q_\theta)_+ - Q'(t) \frac{\partial}{\partial \theta} (r_* \cos \theta) \end{aligned} \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial r_*}{\partial t} = \left[\frac{1}{r_*} \left(\frac{\partial B}{\partial \theta} + B \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right) - Q \cos \theta + \frac{1}{r_*} \frac{\partial r_*}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r_*} B - Q \sin \theta \right) \right]_+ \quad (1.5)$$

$$t \geq 0, \quad r_*(0, t) = r_*(\pi, t) \quad (1.6)$$

$$Q_\theta = -\frac{1}{r_*} \left(\frac{\partial B}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} B \right) + Q \sin \theta \quad (1.7)$$

$$Q_r = \frac{1}{\rho r_*} \left(\frac{\partial B}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} B \right) - Q \cos \theta - \frac{1}{r_*^2} \frac{\partial r_*}{\partial \theta} \frac{\partial B}{\partial \rho}$$

$$\varepsilon = 1 - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} < 1, \quad a_+ = \lim_{\rho \rightarrow +0} a, \quad a_- = \lim_{\rho \rightarrow -0} a$$

для любой функции $a(\rho, \theta, t)$.

Здесь Ψ — функция тока, определяет поток жидкости через поверхность, неподвижную относительно осей x, y ; B — нормальная к меридиональной плоскости составляющая векторного потенциала течения; $A(\theta, t)$ — интенсивность вихря на вихревой поверхности — введена в [7]; P — давление; Q_r, Q_θ — соответственно радиальная и тангенциальная составляющие скорости жидкости относительно подвижных осей x_1, y_1 .

Уравнение (1.1) указано, например, в [1]. Соотношение (1.2) определяет составляющую B векторного потенциала как потенциал простого слоя электрических зарядов, распределенных с плотностью $A(\theta, t) \times r_*^{-2}(\theta, t) \sin \theta$ по поверхности $r=r_*(\theta, t)$. Введением потенциала

простого слоя обеспечивается скачок касательной к поверхности $\rho=1$ составляющей скорости. Тем самым введено математическое описание вихревой пелены (в случае распределенной завихренности векторный потенциал представляется интегралом типа объемного потенциала [1]).

Равенством (1.2) обеспечивается выполнение условий на бесконечности

$$\rho \rightarrow +\infty, \quad B \rightarrow 0, \quad \frac{\partial B}{\partial \rho} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial B}{\partial \theta} \rightarrow 0$$

Уравнения (1.3), (1.4) предопределяют эволюцию во времени интенсивности $A(\theta, t)$ вихря на вихревой поверхности; они получены в [7] из уравнений движения идеальной несжимаемой жидкости. Уравнение (1.5), управляющее эволюцией вихревой пелены $r=r_*(\theta, t)$, вытекает из предположения, что находящаяся на вихревой поверхности жидкая частица может перемещаться в нормальном к поверхности направлении только вместе с поверхностью. Равенством (1.6) накладывается условие на скорость $Q(t)=f'(t)$ поступательного движения оси y_1 . Геометрический смысл равенства (1.6) легко выясняется. Соотношения (1.7) следуют из (1.1) и известных формул, связывающих составляющие скорости и функцию тока.

Уравнения (1.1)–(1.7) представляют собой модификацию формулировки задачи о пятне, рассмотренной в [7]. В отличие от [7] здесь используется интегральная (а не дифференциальная) форма связи между интенсивностью A и функцией тока Ψ . Отметим, что интегральная форма связи между завихренностью и функцией тока (но в однородной жидкости и для плоских течений с непрерывным полем скоростей) используется в [8] для численного решения нестационарных задач.

Уравнения (1.1)–(1.7) указаны в [9]. Решения этих уравнений являются обобщенными (с разрывными скоростями) решениями уравнений Эйлера для идеальной несжимаемой жидкости. Уместно подчеркнуть, что уравнений Эйлера недостаточно для построения таких решений, т. к. нужны дополнительные условия, обеспечивающие непрерывность давления в окрестности вихревой поверхности. Эти условия сформулированы в виде уравнений (1.3)–(1.4).

Начальные условия берутся в виде

$$t=0, \quad r_*=r_0(\theta), \quad A=A_0(\theta), \quad Q=Q_0, \quad B=B_0(\rho, \theta), \quad \Psi=\Psi_0(\rho, \theta) \quad (1.8)$$

Начальные условия должны удовлетворять уравнениям (1.1), (1.2), (1.6) в момент $t=0$, так что произвольно задаются только $r_0(\theta)$ и $A_0(\theta)$.

Задача (1.1)–(1.8) допускает формальное решение в виде рядов по степеням t

$$r_*(\theta, t) = r_0(\theta) + t r_1(\theta) + t^2 r_2(\theta) + \dots \quad (1.9)$$

$$A(\theta, t) = A_0(\theta) + t A_1(\theta) + t^2 A_2(\theta) + \dots$$

$$Q(t) = Q_0 + t Q_1 + t^2 Q_2 + \dots$$

$$B = B_0(\rho, \theta) + t B_1(\rho, \theta) + t^2 B_2(\rho, \theta) + \dots$$

$$\Psi = \Psi_0(\rho, \theta) + t \Psi_1(\rho, \theta) + t^2 \Psi_2(\rho, \theta) + \dots$$

Если $r_0=1$ и $A_0(\theta)$ — многочлен относительно $\cos \theta$, то первые члены этих рядов могут быть эффективно найдены. Соответствующая техника построения решения описана в [9]. В этом случае эволюция пятна на ограниченном интервале времени может быть изучена аналитически.

2. Формирование кольцевого вихря, аналитические результаты. Пусть в начальный момент пятно имеет форму шара и движение начинается из состояния покоя. Начальные условия принимают вид

$$t=0, \quad r_*=1, \quad A=Q=B=\Psi=0 \quad (2.1)$$

При условиях (2.1) решение (1.9) имеет вид

$$\begin{aligned} r_*(\theta, t) &= 1 + t^4 r_4(\theta) + t^6 r_6(\theta) + \dots \\ A(\theta, t) &= t A_1(\theta) + t^3 A_3(\theta) + t^5 A_5(\theta) + \dots \\ Q(t) &= t Q_1 + t^5 Q_5 + \dots \\ B &= t B_1(\rho, \theta) + t^3 B_3(\rho, \theta) + t^5 B_5(\rho, \theta) + \dots \\ A_1 &= -3c_1, \quad A_3 = -5c_3 \cos \theta, \quad A_5 = a_1 + a_2 \left(\cos^2 \theta - \frac{1}{5} \right) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$r_4(\theta) = \frac{1}{4} c_3 (1 - 3 \cos^2 \theta), \quad r_6(\theta) = c_1 c_3 a_3 \cos \theta \sin^2 \theta$$

$$Q_1 = -2c_1, \quad Q_5 = -\frac{9}{5} \frac{(1-\varepsilon)(17-5\varepsilon)}{(3-\varepsilon)(7-3\varepsilon)} c_1 c_3$$

$$\rho < 1: B_1 = -c_1 \rho \sin \theta, \quad B_3 = -c_3 \rho^2 \sin \theta \cos \theta$$

$$B_5 = c_1 c_3 \sin \theta (a_4 \rho + a_5 \rho^3 + a_6 \rho^3 \cos^2 \theta)$$

$$\rho > 1: B_1 = -c_1 \rho^{-2} \sin \theta, \quad B_3 = -c_3 \rho^{-3} \sin \theta \cos \theta$$

$$B_5 = c_1 c_3 \sin \theta \left[a_7 \rho^{-2} + a_8 \rho^{-4} + \left(-\frac{3}{2} \rho^{-2} + a_9 \rho^{-4} \right) \cos^2 \theta \right]$$

$$c_1 = \frac{\varepsilon}{3-\varepsilon}, \quad c_3 = 3c_1^2 \frac{1-\varepsilon}{5-2\varepsilon} > 0$$

$$a_1 = \frac{3}{5} c_1 c_3 (1 - 3c_1), \quad a_2 = -\frac{9}{4} \frac{7-19\varepsilon}{7-3\varepsilon} c_1 c_3$$

$$a_3 = 6 \frac{1-\varepsilon}{7-3\varepsilon}, \quad a_4 = \frac{1}{20} (1 - 12c_1), \quad a_5 = \frac{3}{10} a_3$$

$$a_6 = -\frac{3}{4} \frac{5-9\varepsilon}{7-3\varepsilon}, \quad a_7 = \frac{1}{2} - \frac{3}{5} c_1, \quad a_8 = -\frac{9}{20} \frac{3+\varepsilon}{7-3\varepsilon}$$

$$a_9 = -5a_8$$

Решение (2.2) представляет интерес прежде всего потому, что оно описывает формирование кольцевого вихря в первоначально покоящейся жидкости.

Задача (1.1)–(1.7) при начальных условиях (2.1) решалась также численно. Сопоставление аналитического и численного решений показывает, что в каждом равенстве (2.2) можно ограничиться найденными слагаемыми, если t заключено на интервале порядка $|\varepsilon|^{-1/2}$. В частности, при $\varepsilon = -0,25$, $t = 2$ аналитические и численные значения границы $r_*(\theta, t)$ совпадают с тремя знаками после запятой, соответствующие значения $A(\theta, t)$ отличаются не более чем на 1%.

На фиг. 1 показаны построенные по формулам (2.2) линии тока относительно абсолютных осей x, y в момент $t = 2$ при $\varepsilon = -0,25$; стрелки показывают направление движения жидких частиц.

Из (2.2) следует, что на начальной стадии течения единственной незамкнутой линией тока является ось симметрии; остальные мгновенные линии тока замкнуты и охватывают критическую точку P , в которой достигается максимум $|\Psi|$. Координаты точки P

$$\rho = 1, \quad \cos \theta = \frac{c_3}{2c_1} t^2 + o(t^3) \quad (2.3)$$

Параллельные координатным осям составляющие q_x, q_y абсолютной

скорости по (1.7) определяются соотношениями

$$\rho < 1, \quad q_x = -2c_1 t - 2t^3 c_3 \rho \cos \theta + o(t^4) \quad (2.4)$$

$$q_y = t^3 c_3 \rho \sin \theta + o(t^4)$$

$$\rho > 1, \quad q_x = tc_1(1 - 3 \cos^2 \theta) \rho^{-3} + t^3 c_3 \cos \theta (3 - 5 \cos^2 \theta) \rho^{-4} + o(t^4),$$

$$q_y = -3tc_1 \sin \theta \cos \theta \rho^{-3} + t^3 c_3 \sin \theta (1 - 5 \cos^2 \theta) \rho^{-4} + o(t^4)$$

Вне пятна имеются две ветви линии $q_x=0$; уравнения этих ветвей следуют из (2.4) в виде

$$\rho > 1, \quad \cos \theta = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} + t^2 \frac{2}{9} \frac{c_3}{c_1} \frac{1}{\rho} + o(t^3) \quad (2.5)$$

На переднем фронте пятна (в области $c_1 \cos \theta < 0$) находится характерная точка P_1 , из которой «выходит» ветвь линии $q_x=0$; ее положение на линии $\rho=1$ определяется из (2.5). Уравнение мгновенной линии тока $\Psi = \Psi(P_1)$, разрешенное относительно переменной ρ , отыскиваются из (1.1), (2.2) в виде

$$\rho < 1, \quad \rho \sin \theta = \sqrt{\frac{2}{3}} +$$

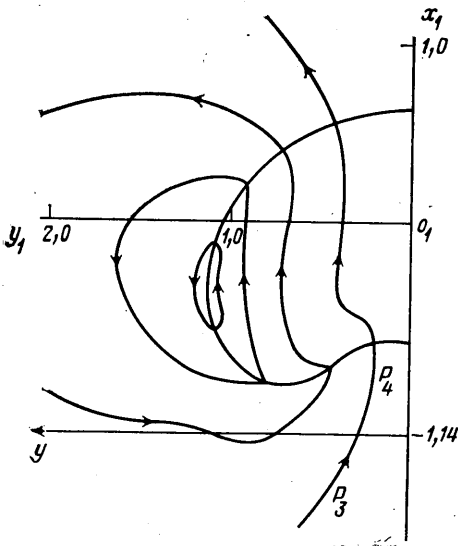
$$+ t^2 \frac{c_3}{c_1} \left(\frac{1}{9\sqrt{2}} - \frac{1}{3} \operatorname{ctg} \theta \right) + o(t^3) \quad (2.6)$$

$$\rho > 1, \quad \rho = \frac{3}{2} \sin^2 \theta \left[1 - \right. \\ \left. - t^2 \frac{c_3}{c_1} \left(\frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{2 \cos \theta}{3 \sin^2 \theta} \right) \right] + o(t^3)$$

$$\cos \theta_2 < \cos \theta < \cos \theta_1,$$

$$\cos \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} + t^2 \frac{2}{9} \frac{c_3}{c_1} + o(t^3),$$

$$\cos \theta_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}} + t^2 \frac{2}{9} \frac{c_3}{c_1} + o(t^3)$$



Фиг. 2

Линии $\Psi = \Psi(P_1)$ и $q_y=0$ пересекаются в точке P_2 с координатами (при $c_1 < 0$)

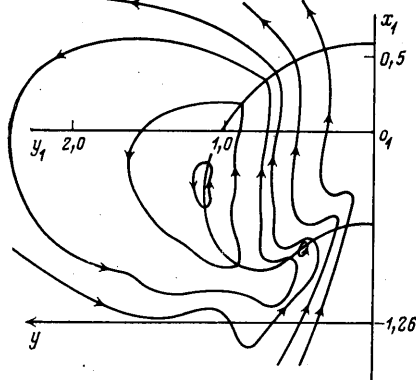
$$\rho = \frac{3}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}} \frac{c_3}{c_1} t^2 + o(t^3), \quad \cos \theta = \frac{2}{9} \frac{c_3}{c_1} t^2 + o(t^3) \quad (2.7)$$

Линия тока $\Psi = \Psi(P_1)$ в определенном смысле является «пограничной»: в полуплоскости $x_1 > 0$ (фиг. 1) наиболее удаленные от оси y_1 точки линии $\Psi = h = \text{const}$ лежат на границе пятна, если $|h| > |\Psi(P_1)|$; если $|h| < |\Psi(P_1)|$, то эти точки лежат вне пятна на линии $q_x=0$. Внутри кольца $|\Psi| > |\Psi(P_1)|$ жидкость «циркулирует» наиболее интенсивно. Если бы в момент $t=0$ пятно и содержащаяся в цилиндрической области $x < b_1 < -1$, $0 < y < b_2$ жидкость были подкрашены, то окраска распространялась бы вместе с пятном, а также по линиям тока типа $P_3 P_4$. Это замечание делает очевидным качественное сходство между картинами линий тока (фиг. 1, 2) и фотографиями кольцевых вихрей [3, рис. 122, 124]. Можно найти и количественное соответствие некоторых элементов. Например, расстояние от критической точки P (2.3) до оси симметрии примерно вдвое больше расстояния между P и P_2 (2.7). Близкое соотношение для соответствующих расстояний получается по фотографиям вихря в жидкости с малой вязкостью [3, рис. 124б]. Используя (2.6), можно показать, что объем кольца

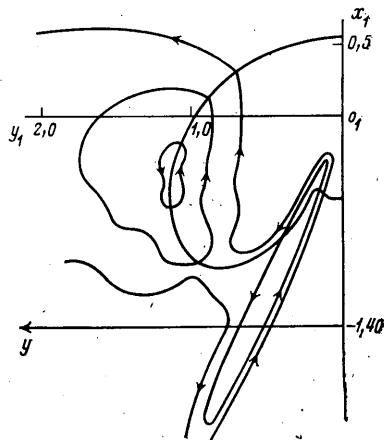
$|\Psi| > |\Psi(P_1)|$ с самого начала превосходит объем пятна; с ростом t объем кольца растет за счет как внешней, так и внутренней относительно пятна жидкости.

В литературе, в частности в [3], подчеркивается роль тонких завихренных слоев в образовании вихрей; отмечается, что кольцевые вихри могут возникать в результате сворачивания таких слоев. Решение (2.2) описывает иной возможный механизм зарождения кольцевого вихря: вихрь индуцируется вихревой пеленой, возникающая одновременно с ней.

3. Формирование кольцевого вихря, численные результаты. Для задачи (1.1)–(1.8) имеется относительно простой алгоритм численного решения [10]. Отметим его особенности. Уравнения (1.1)–(1.7) представляют собой систему нелинейных интегродифференциальных уравнений относительно неизвестных функций $r_*(\theta, t)$, $A(\theta, t)$, $Q(t)$. При $\epsilon \neq 0$ эти уравнения содержат производную по времени от двойного интеграла (1.2) с неограниченным ядром. Вызванные этим осложнения в по-



Фиг. 3



Фиг. 4

строении алгоритма численного решения преодолеваются на основе аналитических результатов: уравнения (1.1)–(1.7) приводятся к эквивалентной системе, содержащей одномерный интеграл с ограниченным ядром. Далее уравнения дискретизируются по переменной θ . Дискретизированные уравнения решаются численно методом прогноза и коррекции. Поскольку дискретизированные уравнения не разрешены относительно производных по времени, для начала вычислений нужно знать значения функций $r_*(\theta, t)$, $A(\theta, t)$, $Q(t)$ в трех точках оси t . Эти значения вычисляются по аналитическому решению (2.2).

| t | v | S | S_1 | I | t | v | S | S_1 | I |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0,000 | 0,000 | 0,000 | 0,000 | 1,340 | 3,000 | 0,404 | 0,676 | 0,764 | 1,557 |
| 2,000 | 0,294 | 0,305 | 0,313 | 1,383 | 3,200 | 0,411 | 0,758 | 0,883 | 1,618 |
| 2,200 | 0,327 | 0,379 | 0,393 | 1,406 | 3,400 | 0,412 | 0,840 | 1,009 | 1,683 |
| 2,400 | 0,351 | 0,447 | 0,471 | 1,432 | 3,600 | 0,407 | 0,922 | 1,137 | 1,760 |
| 2,600 | 0,373 | 0,520 | 0,558 | 1,465 | 3,800 | 0,399 | 1,003 | 1,263 | 1,834 |
| 2,800 | 0,391 | 0,596 | 0,656 | 1,506 | 4,002 | 0,277 | 1,080 | 1,399 | 1,910 |

Найденное приближение решения (2.2) пригодно на интервале времени, за который центр масс пятна смещается на расстояние порядка 0,3 начального радиуса. Аналитическое решение дополнено численным решением на временном интервале, в течение которого центр масс пятна смещается на 1,08 начального радиуса. На этом временном интервале форма пятна значительно отклоняется от сферической и качественно меняется картина течения: появляется второе семейство замкнутых мгновенных линий тока.

Некоторые результаты численного решения при $\epsilon = -0,25$ представлены в таблице, где показано изменение во времени следующих параметров пятна: v – абсолютная скорость центра масс, S – абсолютная координата центра масс, S_1 – абсолютная координата подвижного полюса, I – момент инерции относительно оси симметрии.

На фиг. 2–4 указаны форма пятна и мгновенные линии тока в моменты времени $t=3,600; 3,800; 4,002$. На этих фигурах по вертикали указываются координаты подвижной оси x_1 , так что координата неподвижного полюса o равна $-S_1$.

На фиг. 2 представлены линии тока $\Psi=-0,200$, $\Psi=-0,150$, $\Psi=-0,090$, $\Psi=-0,030$. На фиг. 3 представлены линии тока $\Psi=-0,200$, $\Psi=-0,150$, два контура линии тока $\Psi=-0,100$ (малый контур на заднем фронте пятна и находящийся левее большой контур, не охватывающий малый), линия $\Psi=-0,080$. На фиг. 4 представлены два контура линии тока $\Psi=-0,200$, разделяющий их один из двух контуров линии тока $\Psi=-0,150$ и охватывающая их линия $\Psi=-0,100$. Стрелки показывают направление движения жидких частиц.

В работе [5] помещены кадры из фильма, в котором показана начальная стадия эволюции формы всплывающего первоначально сферического пятна. Согласие между фиг. 1–4 и этими кадрами несомненно.

В случае плоских течений может быть развит метод, аналогичный описанному выше. При этом используются уравнения и аналитические результаты, полученные в [7, 9, 11].

ЛИТЕРАТУРА

1. Милл-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 655 с.
2. Ламб Г. Гидродинамика. М.–Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
3. Лаурентьев М. А., Шабат В. В. Проблемы гидродинамики и их математические модели. М.: Наука, 1973. 416 с.
4. Sullivan J. P., Widnall S. E., Ezekiel S. Study of vortex rings using a Laser Doppler velocimeter.— AIAA Journal, 1973, v. 11, № 10, p. 1384–1389. (Рус. перев.: Салливан, Уиднолл, Эзекель. Исследование вихревых колец в помощью лазерного доплеровского измерителя скорости.— Ракетная техника и космонавтика 1973, т. 11, № 10, с. 31–36.)
5. Заславский Б. И. О начальной стадии развития термика.— ПМТФ, 1982, № 6, с. 65–69.
6. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.
7. Миндлин И. М. К теории нестационарных вихрей в идеальной жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 6, с. 3–11.
8. Zabusky N. J., Hughes M. H., Roberts K. V. Contour dynamics for the Euler equations in two dimensions.— J. Comput. Phys., 1979, № 30, № 1, p. 96–106.
9. Миндлин И. М. О вихрях в неограниченной идеальной жидкости. Горький, 1982. 38 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 24.06.82, № 3269–82 Деп.
10. Гильман О. А., Миндлин И. М. О формировании и эволюции кольцевых вихрей в неоднородной тяжелой жидкости. Горький, 1983. 40 с. Рукопись деп. в ВИНТИ, 15.11.83, № 6085–83 Деп.
11. Миндлин И. М. О волнах в однородной несжимаемой жидкости, индуцированных вихрем.— ПММ, 1984, т. 48, вып. 5, с. 761–767.

Горький

Поступила в редакцию
30.XI.1984