

УДК 532.526.2

**ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ В ЗАКРУЧЕННОМ ПОТОКЕ
НА ПРОНИЦАЕМОЙ ПОВЕРХНОСТИ**

ПЕЙГИН С. В.

Численными и приближенными аналитическими методами исследуется пространственное неавтономное течение однородного газа в закрученном потоке на осесимметричной проницаемой поверхности. При больших значениях параметра вдува, вектор скорости которого в общем случае составляет отличный от нуля угол с вектором внешней нормали к обтекаемой поверхности, получены асимптотические формулы для профилей скоростей и температуры поперек слоя вдува, компонент напряжения трения и теплового потока на поверхности. Приводятся некоторые результаты численного решения указанной задачи, полученного в широком диапазоне изменения параметра вдува. Путем сравнения численных и асимптотических решений оцениваются точность и область применимости последних.

Осесимметрично закрученные течения жидкости или газа в пограничном слое представляют собой практически важный частный случай пространственных течений, при котором все три составляющие вектора скорости отличны от нуля, но параметры течения в силу симметрии задачи зависят лишь от двух переменных. При отсутствии вдува (отсоса) такие течения в пограничном слое в канале рассматривались в [1-6]. Неавтономные течения несжимаемой жидкости изучались в [1-3], случай сжимаемого газа при наличии закрутки внешнего потока - в [4-6].

1. Постановка задачи. Рассмотрим осесимметрично закрученное течение однородного сжимаемого газа в ламинарном пограничном слое около проницаемой поверхности. Выберем криволинейную систему координат (ξ^*, η^*, ζ^*) следующим образом. Координату ξ^* будем отсчитывать вдоль поверхности, координату η^* - в окружном направлении, а координату ζ^* - по нормали к обтекаемой поверхности. В данной системе координат уравнения пространственного ламинарного пограничного слоя имеют вид [1]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi^*} (\rho^* u^* r) + \frac{\partial}{\partial \zeta^*} (\rho^* v^* r) &= 0 \\ \rho^* \left(D^* u^* - \frac{w^*}{r} \frac{dr}{d\xi^*} \right) &= - \frac{dP^*}{d\xi^*} + \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \left(\mu^* \frac{\partial u^*}{\partial \zeta^*} \right) \\ \rho^* \left(D^* w^* + \frac{u^* w^*}{r} \frac{dr}{d\xi^*} \right) &= \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \left(\mu^* \frac{\partial w^*}{\partial \zeta^*} \right) \\ \rho^* D^* H^* &= \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \left\{ \frac{\mu^*}{\sigma} \left[\frac{\partial H^*}{\partial \zeta^*} + (\sigma - 1) \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \left(\frac{u^{*2} + w^{*2}}{2} \right) \right] \right\} \\ P^* &= \rho^* R T^*, \quad D^* \equiv u^* \frac{\partial}{\partial \xi^*} + v^* \frac{\partial}{\partial \zeta^*} \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь u^*, w^*, v^* - составляющие вектора скорости в направлениях ξ^*, η^*, ζ^* соответственно; ρ^*, P^*, T^*, H^* - плотность, давление, абсолютная температура и полная энтальпия газа; r - радиус поперечной кривизны тела, μ^* - коэффициент вязкости ($\mu^* \sim (T^*)^\sigma$), $\sigma = \text{const}$ - число Прандтля, R - универсальная газовая постоянная.

Граничные условия для системы (1.1) следующие:

$$\zeta^*=0: u^*=u_w^*(\xi^*), w^*=w_w^*(\xi^*), \rho^*v^*=G(\xi^*), H^*=H_w(\xi^*) \quad (1.2)$$

$$\zeta^*\rightarrow\infty: u^*=u_e^*(\xi^*), w^*=w_e^*(\xi^*), H^*=H_e^* \quad (1.3)$$

Здесь и далее индексы w и e соответствуют значениям переменных на поверхности тела и на внешней границе пограничного слоя.

Перейдем в (1.1)–(1.3) к новым безразмерным переменным по формулам

$$\begin{aligned} \xi &= \int_0^{\xi^*} \mu_e^* \rho_e^* u_0 r^2 d\xi^*, & \zeta &= \frac{u_0 r}{\sqrt{2\xi_0}} \int_0^{\zeta^*} \rho^* d\zeta^* \\ u &= \frac{u^*}{u_0} = \frac{\partial f}{\partial \zeta}, & w &= \frac{w^*}{w_0}, & g &= \frac{H^*}{H_e^*}, & \theta &= \frac{T^*}{T_e^*} = \frac{\rho_e^*}{\rho^*} \\ l &= \frac{\mu^* \rho^*}{\mu_e^* \rho_e^*}, & \rho^* v^* r &= - \left\{ \mu_e^* \rho_e^* u_0 r^2 (\sqrt{2\xi} f)_{\xi} + \sqrt{2\xi} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial \xi^*} \right\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

где u_0, w_0 — пока произвольные, достаточно гладкие функции. При этом уравнение неразрывности удовлетворится тождественно, а оставшиеся уравнения (1.1) и граничные условия (1.2)–(1.3) в переменных (1.4) примут вид

$$(lu_{\zeta}')_{\zeta}' = Du + \beta_1 u^2 + \beta_2 w^2 - \beta_3 \theta \quad (1.5)$$

$$(lw_{\zeta}')_{\zeta}' = Dw + \beta_4 uw$$

$$\left\{ \frac{l}{\sigma} [g_{\zeta}' + (\sigma-1)(\alpha_1 u^2 + \alpha_2 w^2)_{\zeta}'] \right\}' = Dg$$

$$D = 2\xi u \frac{\partial}{\partial \xi} - (f + 2\xi f_{\xi}') \frac{\partial}{\partial \zeta}$$

$$\beta_1 = \frac{2\xi du_0}{u_0 d\xi}, \quad \beta_2 = -2 \frac{dr}{d\xi} \frac{\xi w_0^2}{r u_0^2} \quad (1.6)$$

$$\beta_3 = \left(\frac{u_e^*}{u_0} \right)^2 \frac{2d \ln u_e^*}{d \ln \xi} + \beta_2 \left(\frac{w_e^*}{w_0} \right)^2, \quad \alpha_1 = \frac{u_0^2}{2H_e^*}$$

$$\beta_4 = 2\xi \left\{ w_0^{-1} w_{0\xi}' + \frac{dr}{d\xi} \left(\frac{d\xi^*}{d\xi} r \right)^{-1} \right\}, \quad \alpha_2 = \frac{w_0^2}{2H_e^*}$$

$$\zeta=0: u=u_w(\xi), w=w_w(\xi), f=f_w(\xi), g=g_w(\xi) \quad (1.7)$$

$$\zeta \rightarrow \infty: u=u_e(\xi), w=w_e(\xi), g=1$$

В общем случае функции u_0 и w_0 необходимо выбирать так, чтобы коэффициенты (1.6) в уравнениях (1.5) не имели особенностей в критической точке при $\xi^*=0$. Вследствие этого выбор u_0 и w_0 зависит от конкретного вида течения в пограничном слое. Далее будем рассматривать следующие основные случаи течения.

1. Обтекание осесимметричного тела с затупленной передней кромкой при условии

$$w_e^*=0, \quad w_w^*(0)=0, \quad \frac{\partial w_w^*}{\partial \xi^*}(0) < \infty$$

Примером такого течения может служить пограничный слой на поверхности осесимметричного тела, вращающегося с некоторой угловой скоростью вокруг своей оси, параллельной вектору скорости набегающего потока. В этом случае положим $u_0=u_e^*(\xi^*), w_0=w_w^*(\xi^*)$. Выполняя

предельный переход $\xi^* \rightarrow 0$ в формулах (1.6), получим:

$$\beta_1(0) = \beta_3(0) = 0,5; \quad \beta_4(0) = 1; \quad \beta_2(0) = -0,5 \left(\frac{\partial w_w^*}{\partial \xi^*}(0) / \frac{\partial u_e^*}{\partial \xi^*}(0) \right)^2$$

2. Течение в пограничном слое в канале с проницаемыми стенками при наличии закрутки внешнего невязкого потока. Выбор u_0 и w_0 в этом случае проведем аналогично [6]. Положим $w_0 = w_e^*$, а величину u_0 выберем в зависимости от значения продольной составляющей вектора скорости внешнего потока u_e^* на стенке канала. Если $u_e^* > 0$ для всех ξ^* (случай 2а), то $u_0 = u_e^*$ и $\beta_1(0) = \beta_2(0) = \beta_3(0) = \beta_4(0) = 0$. Если же в сопле имеется зона обратных токов [12], то на поверхности сопла существует критическая точка, в которой $u_e^* = 0$ (случай 2б). В этом случае

$$u_0 = \sqrt{u_e^{*2} + \frac{4w_e^* \xi^*}{3r} \left| \frac{dr}{d\xi^*} \right|}, \quad \beta_1(0) = \frac{2}{3}, \quad \beta_2(0) = \beta_3(0) = 1, \quad \beta_4(0) = 0$$

Отметим, что особенность, аналогичная случаю 2б, имеет место также при обтекании осесимметричного тела с протоком и затупленными передними кромками потоком закрученного газа.

2. Асимптотическое решение уравнений пограничного слоя в закрученном потоке при сильном вдуве. Рассмотрим асимптотическое решение уравнений пограничного слоя в закрученном потоке, считая, что вектор скорости вдуваемого газа составляет отличный от нуля угол с вектором внешней нормали к телу. В этом случае аналогично случаю нормального вдува при больших значениях параметра вдува f_w задача (1.1)–(1.3) становится сингулярной [7, 8] и для ее решения может быть использован метод сращиваемых асимптотических разложений [9]. Пограничный слой при этом разбивается на слой вдува, примыкающий к телу, где эффектами молекулярного переноса можно пренебречь, и слой смешения, в котором они играют основную роль. Течение в слое вдува в первом приближении описывается уравнениями невязкого пограничного слоя, которые имеют следующий размерный вид (индекс * опускаем):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho u r) + \frac{\partial}{\partial \xi} (\rho v r) &= 0, \quad \rho \left(Du - \frac{w^2}{r} \frac{dr}{d\xi} \right) = - \frac{dP}{d\xi} \\ \rho \left(Dw + \frac{uw}{r} \frac{dr}{d\xi} \right) &= 0, \quad DH = 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

Рассмотрим решение системы (2.1) с граничными условиями (1.2) для случая 1. (Для случая 2 решение получено аналогично и здесь не приводится.) Указанное решение имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{T(\xi, t)}{T_w(t)} &= \left[\frac{P(\xi)}{P(t)} \right]^{\kappa_w(t)}, \quad \frac{\rho(\xi, t)}{\rho_w(t)} = \left[\frac{P(\xi)}{P(t)} \right]^{1/\gamma_w(t)} \\ u^2(\xi, t) &= u_w^2(t) + w_w^2(t) - w^2(\xi, t) + \frac{2P(t)}{\kappa_w(t)\rho_w(t)} \left\{ 1 - \frac{T(\xi, t)}{T_w(t)} \right\} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\xi(\xi, t) = \frac{1}{r(\xi)} \int_0^\xi \frac{\rho_w(t) v_w(t) r(t) dt}{\rho(\xi, t) u(\xi, t)}$$

$$w(\xi, t) = w_w(t) \frac{r(t)}{r(\xi)}, \quad \kappa_w(t) = \frac{\gamma_w(t) - 1}{\gamma_w(t)}$$

Здесь t — координата ξ выхода линии тока из поверхности тела, $t=0$ соответствует нулевой линии тока.

На критической линии при $\xi=0$ будем иметь

$$T(0, \xi) = T_w, \quad \rho(0, \xi) = \rho_w, \quad \frac{\partial w}{\partial \xi}(0, \xi) = C_1 v \quad (2.3)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial \xi}(0, \xi) \right]^2 = P_2 - C_1^2 v^2 + C_2 v, \quad \xi = - \int_{v_w}^v \frac{dv}{2u\xi'}, \quad u_1 = \frac{\partial u_w}{\partial \xi} \quad (2.4)$$

$$C_1 = \frac{w_1}{v_w}, \quad C_2 = v_w^{-1}(u_1^2 + w_1^2 - P_2), \quad P_2 = - \frac{1}{\rho_w} \frac{d^2 P}{d\xi^2}, \quad w_1 = \frac{\partial w_w}{\partial \xi}$$

На поверхности тела при $\xi=0$ получим следующие выражения для градиентов скорости и энтальпии поперек слоя вдува (индекс w в правых частях опускаем):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right)_w &= \frac{1}{\rho v} \left[\rho \left(\frac{w^2}{r} \frac{dr}{d\xi} - u \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \frac{dP}{d\xi} \right] \\ \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} \right)_w &= - \frac{1}{\rho v} \left[\rho u \frac{\partial w}{\partial \xi} + \rho \frac{uw}{r} \frac{dr}{d\xi} \right], \quad \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \right)_w = - \frac{1}{v} \frac{\partial H}{\partial \xi} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Изучим область существования решения (2.2). Для окрестности критической точки это удобнее всего сделать, обратившись к картине интегральных кривых уравнения (2.1) в фазовой плоскости $(v, u/\sqrt{P_2})$. Из анализа картины интегральных кривых следует, что уравнение имеет две особые точки: $R_1(0, +1)$ — устойчивый и $R_2(0, -1)$ — неустойчивый узлы. Анализ (2.4) показывает, что наличие закрутки качественно меняет картину интегральных кривых. В этом случае все интегральные кривые выходят из точки R_2 и приходят в точку R_1 и являются отрезками эллипсов с центром в точке $(0, 5C_1^{-2} C_2, 0)$ и полуосями, равными

$$0,5C_1^{-2} \sqrt{4C_1^2 P_2 + C_2^2}, \quad 0,5C_1^{-1} P_2^{-1/2} \sqrt{4C_1^2 P_2 + C_2^2}$$

Если $w_1=0$, то интегральные кривые — отрезки парабол и в зависимости от граничных условий либо выходят из R_2 и приходят в R_1 (при $|u_1| < \sqrt{P_2}$), либо приходят в R_1 из бесконечности (при $u_1 \geq \sqrt{P_2}$), либо уходят из R_2 в бесконечность (при $u_1 \leq -\sqrt{P_2}$). Отсюда, в частности, следует, что при $w_1 \neq 0$ интегральные кривые приходят в точку R_1 при любых значениях u_1 , в то время как при $w_1=0$ в точку R_1 приходят лишь интегральные кривые, отвечающие условию $u_1 > -\sqrt{P_2}$.

Дальнейший анализ показывает, что физическому условию конечности и неотрицательности толщины слоя вдува удовлетворяют лишь те интегральные кривые, которые приходят в точку R_1 . Если же граничные условия таковы, что соответствующая им интегральная кривая уходит в бесконечность, то в этом случае толщина слоя вдува ξ° стремится к бесконечности и имеет место отрыв пограничного слоя. Таким образом, можно сделать вывод о том, что решение автомодельных уравнений невязкого пограничного слоя в критической точке при наличии закрутки вдуваемого газа существует при любых значениях параметра u_1 , в то время как при отсутствии закрутки это решение существует лишь при $u_1 > -\sqrt{P_2}$.

Данный вывод имеет достаточно ясный физический смысл. Если закрутка в пограничном слое отсутствует, то единственной причиной, приводящей к развороту линий тока вдуваемого газа, является градиент давления. Величина градиента давления в пограничном слое неизменна по всей его толщине и определяется лишь условиями внешнего невязкого обтекания. Поэтому ясно, что всегда найдется такое отрицательное значение проекции импульса вдуваемого газа на ось ξ , при котором градиент давления будет не в состоянии развернуть линию тока.

В то же время если $w_1 \neq 0$, то внутри пограничного слоя возникают центробежные силы, действие которых аналогично действию градиента давления. При этом величина этих центробежных сил определяется уже не условиями внешнего невяз-

кого потока, а решением задачи в слое вдува и при достаточно большой, но конечной толщине слоя вдува может стать достаточной, чтобы развернуть линию тока с произвольным значением тангенциальной составляющей вектора скорости вдува. Отметим, однако, что если $w_1 \rightarrow 0$, то в этом случае $\xi^0 \sim w_1^{-1}$ и, следовательно, найдется такое ϵ , что при $w_1 \leq \epsilon$ толщина слоя вдува будет столь велика, что модель пограничного слоя может стать неприменимой. При этом конкретное значение величины ϵ может быть определено либо из сравнения с результатами более точных моделей, либо данными эксперимента.

Остановимся на вопросе о существовании решения уравнений (2.1) вне критической точки. При обтекании заглушенных осесимметричных тел давление и радиус тела на некоторой части лобовой поверхности являются соответственно убывающей и возрастающей функцией ξ [1]. Положим, что

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\xi} < 0 & \quad (\xi < \xi_1), & \frac{dP}{d\xi} = 0 & \quad (\xi = \xi_1), & \frac{dP}{d\xi} > 0 & \quad (\xi > \xi_1) \\ \frac{dr}{d\xi} > 0 & \quad (\xi < \xi_2), & \frac{dr}{d\xi} = 0 & \quad (\xi = \xi_2), & \frac{dr}{d\xi} < 0 & \quad (\xi > \xi_2) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\xi_0 = \min(\xi_1, \xi_2)$$

Рассмотрим вначале случай, когда $u_w(t) \geq 0$. Тогда касательная составляющая вектора скорости $u(\xi, t)$, определяемая третьей формулой (2.2), может обратиться в нуль лишь при $\xi \geq \xi_0$. Если $\xi^0 = \xi^0(t)$ — координата точки на линии тока, в которой $u(\xi, t)$ обращается в нуль, то для ее определения имеем уравнение

$$u_w^2(t) + w_w^2(t) \left[1 - \frac{r^2(t)}{r^2(\xi)} \right] + \frac{2P(t)}{\kappa(t)\rho_w(t)} \left[1 - \left(\frac{P(\xi)}{P(t)} \right)^{\kappa(t)} \right] = 0 \quad (2.7)$$

Пусть при $t = t^0$ функция $\xi^0 = \xi^0(t)$ имеет минимум. Предполагая все функции в (2.7) гладкими, получим следующее алгебраическое уравнение, решая которое совместно с (2.7), определим ξ^0 и t^0 :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{ u_w^2(t) + w_w^2(t) + c(t)P(t)^{\kappa(t)} \} - r^{-2}(\xi) \frac{db}{dt} - \\ - P(\xi)^{\kappa(t)} \left[\frac{dc}{dt} + c \frac{d\kappa}{dt} \ln P(\xi) \right] = 0, \quad c = \frac{2P(t)^{1-\kappa(t)}}{\kappa(t)\rho_w(t)} \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$b = w_w^2(t)r^2(t)$$

В случае течения несжимаемой жидкости система (2.7)–(2.8) примет вид

$$u_w^2(t) + w_w^2(t) (1 - r^{-2}(\xi)r^2(t)) + 2\rho^{-1}(P(t) - P(\xi)) = 0 \quad (2.9)$$

$$u_w \frac{du_w}{dt} + w_w \frac{dw_w}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{dP}{dt} - \frac{0,5}{r^2(\xi)} \frac{db}{dt} = 0$$

Как показывает анализ, интеграл в (2.2) в точке (ξ^0, t^0) имеет неинтегрируемую особенность, толщина слоя вдуваемых газов при ξ , стремящемся к ξ^0 , стремится к бесконечности, а область существования решения уравнений невязкого пограничного слоя при $u_w \geq 0$ является интервалом $[0, \xi^0)$, где ξ^0 определяется из решения системы трансцендентных уравнений (2.7)–(2.8).

В случае, когда $u_w \leq 0$ на некоторой части лобовой поверхности $0 \leq \xi \leq \xi_*$, область D существования решения уравнений невязкого пограничного слоя определяется аналогично случаю $u_w \geq 0$ и совпадает с отрезком $[0, \xi^0)$, где ξ^0 находится из решения системы (2.7)–(2.8). Единственное отличие при этом состоит в том, что если при $u_w \geq 0$ это решение ищется в области $\xi^0 > \xi_0$, $t^0 > 0$, то при $u_w \leq 0$ область, где ищется решение, расширяется и имеет вид $\xi^0 > 0$, $t^0 > 0$.

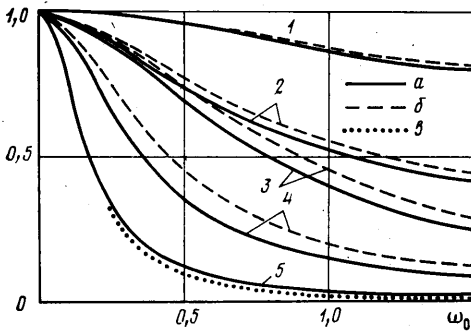
Отметим, что при $w_w = 0$ из (2.7)–(2.8) следует полученный ранее в [7, 10] вывод о том, что если $u_w = 0$, то $\xi^0 = \xi_1$ и решение существует лишь в области отрицательного градиента давления; если же $u_w > 0$, то $\xi^0 > \xi_1$ и область существования расширяется и включает в себя некоторую конечную область с нулевым и положительным градиентом давления. Закрутка вдуваемого газа при прочих равных усло-

виях приводит как к уменьшению, так и к увеличению области D по сравнению со случаем $w_w=0$. В частности, при $w_w=\omega^*r(t)$, что соответствует случаю обтекания осесимметричного тела, вращающегося с угловой скоростью ω^* вокруг своей оси, имеем

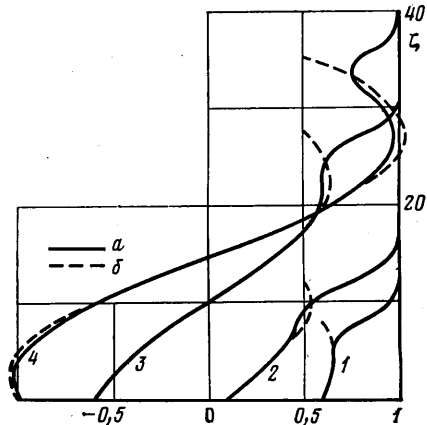
$$D < D_0 \quad (\xi_2 < \xi_1), \quad D = D_0 \quad (\xi_2 = \xi_1), \quad D > D_0 \quad (\xi_2 > \xi_1) \quad (2.10)$$

где D_0 — область существования решения уравнений (2.1) при $w_w=0$.

3. Обсуждение результатов расчетов. Сопоставление асимптотических и численных решений. Система уравнений (1.5) с граничными условиями (1.7) решалась численно на ЭВМ. Решение производилось с помощью программы, созданной для решения уравнений пространственного ламинарного пограничного слоя. Использовалась неявная разностная схема [11] с точностью аппроксимации $O(\Delta\zeta)^4 + O(\Delta\xi)$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Расчеты проводились для двух случаев, перечисленных в п. 1. В случае 1 рассматривались течения однородного сжимаемого газа и несжимаемой жидкости в пограничном слое на сфере, вращающейся с постоянной угловой скоростью ω^* вокруг оси, параллельной вектору скорости набегающего потока. При определении параметров на внешней границе пограничного слоя для течения сжимаемого газа распределение давления по поверхности сферы рассчитывалось по формуле Ньютона, а в случае течения несжимаемой жидкости принималось, что $u_e^* = 1,5V_\infty \sin \theta$ (θ — центральный угол). В случае 2 рассматривался пограничный слой, образованный при закрученном течении газа в сопле Лавала, для которого параметры внешнего потока рассчитаны методом установления в [12]. Использовалась аппроксимация распределения продольной скорости u_e^* вдоль стенки сопла [6]. Распределение окружной составляющей скорости внешнего потока находилось из условия постоянства циркуляции на пристеночной линии тока $w_e^* = a_* r^* \Gamma / r$, где a_* — критическая скорость звука, r^* — радиус критического сечения сопла. Во всех расчетах принималось $\gamma = 1,4$; $\sigma = 0,71$; $\omega = 0,5 - 0,95$, а параметр вдува f_w и относительная температура поверхности θ_w брались постоянными и варьировались в пределах $0 \geq f_w \geq -5$; $0,03 \leq \theta_w \leq 0,5$.

В процессе расчетов определялись профили искомых величин поперек пограничного слоя, а также коэффициенты трения и теплообмена на поверхности тела

$$c_{\xi} = \sqrt{\text{Re}} \frac{\mu^*}{\rho_\infty V_\infty^2} \frac{\partial u^*}{\partial \xi^*} \left(\frac{L}{\xi^*} \right)^\alpha, \quad c_\eta = \sqrt{\text{Re}} \frac{\mu^*}{\rho_\infty V_\infty^2} \frac{\partial w^*}{\partial \zeta^*} \left(\frac{L}{\xi^*} \right)^\beta \quad (3.1)$$

$$c_q = \sqrt{\text{Re}} \frac{\lambda^*}{\rho_\infty V_\infty^3} \frac{\partial T^*}{\partial \xi^*} \left(\frac{L}{\xi^*} \right)^\delta, \quad \tau_{\xi}^\circ = \frac{c_{\xi}(\xi^*)}{c_{\xi}(0)}, \quad \tau_\eta^\circ = \frac{c_\eta(\xi^*)}{c_\eta(0)}, \quad q^\circ = \frac{c_q(\xi^*)}{c_q(0)}$$

Здесь $\alpha = \beta = 1$; $\delta = 0$ и $\alpha = 0,25$; $\beta = \delta = -0,25$ для случаев 1, 2 соответственно.

Перейдем теперь к анализу полученных численных решений.

Случай 1. Течение в окрестности критической точки. Вращение обтекаемого тела оказывает заметное влияние на характер течения в пограничном слое. По мере увеличения угловой скорости вращения $\omega_0 = \omega * L (2c_p T_0)^{-1/2}$ толщина пограничного слоя монотонно уменьшается, а значения коэффициентов трения и теплообмена увеличиваются. На фиг. 1 приведены характерные зависимости относительных коэффициентов трения и теплообмена в критической точке $q^* = c_q(0)/c_q(\omega_0)$ (линии 1, 2) и $\tau_\xi^* = c_\xi(0)/c_\xi(\omega_0)$ (линии 3-5) от параметра ω_0 для различных значений θ_w и f_w ; $\theta_w = 0,1; 0,25$ — линии *a, б* соответственно; $f_w = 0$ — линии 1, 3; $f_w = -1$ — линии 2, 4; $f_w = -3$ — линия 5; асимптотическое решение при сильном вдуве — линия *в*. Наиболее сильно вращение тела влияет на коэффициент трения, причем по мере роста параметра вдува влияние ω_0 на характеристики течения увеличивается. Отметим также, что величина q^* на непроницаемой охлажденной поверхности практически не зависит от θ_w (при $\theta_w \leq 0,45$), в то время как абсолютное значение c_q при изменении θ_w , например от 0,1 до 0,4, меняется более чем на 100%.

Некоторое представление о влиянии закрутки вдуваемого газа на структуру течения в пограничном слое дает фиг. 2, где приведены профили скорости u/u_e поперек пограничного слоя в критической точке для различных значений u_w ($u_w = 0,6; 0,1; -0,6; -1,0$ — линии 1-4 соответственно) при $\theta_w = 0,25$; $\omega_0 = 0,338$. Линии *a* на этой фигуре — численное решение, линии *б* — асимптотическое решение (2.4) в слое вдува. Видно, что между численными и асимптотическими решениями имеется хорошее совпадение. Численные расчеты также показали, что при $\omega_0 = 0$ решение уравнений осесимметричного пограничного слоя при сильном вдуве в критической точке существует лишь при $u_w > -u_e \sqrt{\theta_w}$ в соответствии с результатами асимптотического анализа (2.4).

Таким образом, из численных и асимптотических решений уравнений пограничного слоя при сильном вдуве следует, что решение автономных уравнений в критической точке при закрутке вдуваемого газа существует при любых значениях u_w , в то время как при $\omega_0 = 0$ это решение существует лишь при $u_w > -u_e \sqrt{T_w/T_e}$.

Течение на боковой поверхности. Расчеты показали, что, как и в окрестности критической точки, параметр ω_0 оказывает сильное влияние на абсолютные значения коэффициентов трения и теплообмена на боковой поверхности тела. Например, изменение ω_0 от 0 до 0,5 при прочих равных условиях приводило к изменению c_ξ на 30-35%, а c_q на 25-30%.

Характерные зависимости величины q° от угла θ (θ — центральный угол сферы) для различных значений температуры поверхности, параметров f_w и ω_0 приведены на фиг. 3. Здесь $f_w = 0$; $-0,5$ — линии *a, б* соответственно; $\omega_0 = 0$; $\theta_w = 0,1$ — линия 1; $\omega_0 = 0$, $\theta_w = 0,4$ — линия 2; $\omega_0 = 0,5$; $\theta_w = 0,1$ — линия 3; $\omega_0 = 0,5$; $\theta_w = 0,4$ — линия 4. Если при $\omega_0 = 0$ величина q° слабо зависит от θ_w (при $\theta_w \leq 0,4$) [13], то при $\omega_0 > 0,4$ эта зависимость становится уже существенной. В то же время слабая зависимость q° от f_w при малых вдувах ($f_w = \text{const} \geq -0,5$) для $\omega_0 = 0$ [14] сохраняется и при $\omega_0 \neq 0$. Интересно отметить, что если при $\omega_0 = 0$ q° является монотонно убывающей функцией θ , то начиная с некоторого ω_0 зависимость относительного распределения теплового потока от продольного координаты становится немонотонной и имеет локальный максимум при $\theta^* \neq 0$, т.е. максимум теплового потока в этом случае смещается из критической точки на боковую поверхность сферы. Это объясняется тем, что начиная с некоторого значения параметра закрутки выделение энергии внутри пограничного слоя за счет вязкой диссипации, приводящее при прочих равных условиях к увеличению теплового потока, превалирует над при-

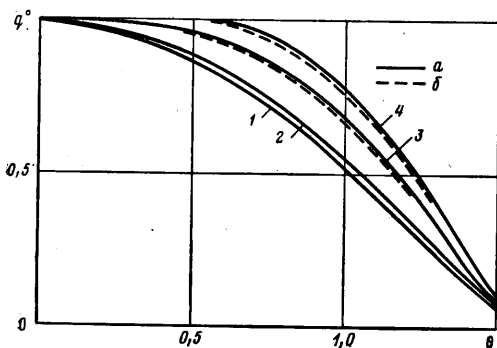
чинами, вызывающими его уменьшение: над падением температуры на внешней границе пограничного слоя и увеличением его толщины.

В качестве примера влияния закрутки обтекаемого тела и параметра вдува на область существования решения уравнений пограничного слоя рассмотрим обтекание вращающейся сферы потоком несжимаемой жидкости для следующих двух вариантов задания граничных условий на поверхности тела:

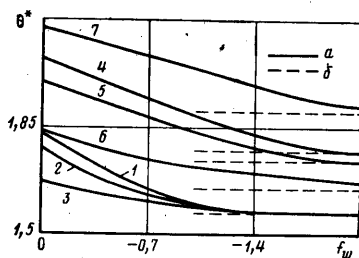
$$\frac{u_w}{u_e} = \text{const} = a \geq 0 \quad (3.2)$$

$$\frac{u_w}{u_e} = \begin{cases} b\xi - c & (\xi \leq \xi_1), \quad \xi_1 = b^{-1}(c+d) \\ d = \text{const} & (\xi > \xi_1), \quad b, c > 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

При втором способе задания граничных условий внутри пограничного слоя имеется некоторая замкнутая область возвратных течений. В этом случае численное решение уравнений (1.5) получалось на основе глобальных итераций по всей области течения, где продольная скорость u была знакопеременной. Производные по ξ при этом заменялись лево- либо правосторонней разностью в зависимости от знака скорости u [15, 16], а в качестве начального приближения использовалось решение автоматических уравнений, получаемых из (1.5) путем отбрасывания членов с производными по ξ .



Фиг. 3

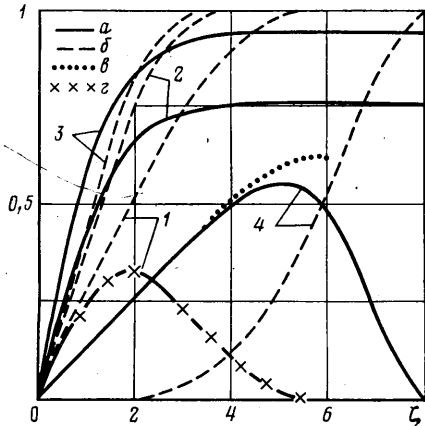


Фиг. 4

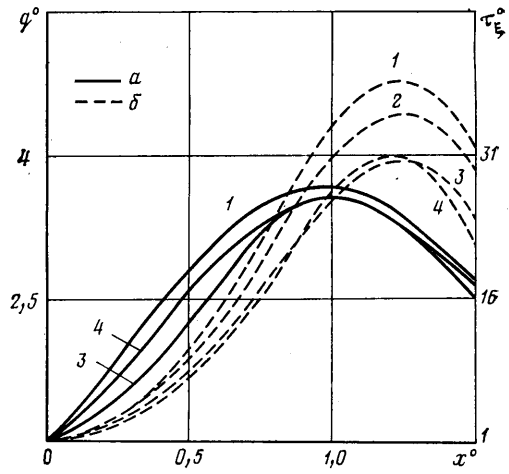
Некоторые результаты расчетов приведены на фиг. 4, где изображены зависимости координаты точки отрыва пограничного слоя θ^* от параметра вдува f_w для различных значений скорости вращения $\omega_0 = 2\omega_*L/(3V_\infty)$. Линии a на этой фигуре — численное решение, линии b — расчет по асимптотическим формулам (2.9); $a=0$; $\omega_0=0; 0,77; 2,0$ — линии 1, 2, 3; $a=0,2$; $\omega_0=0; 0,77; 2,0$ — линии 4, 5, 6; $b=1,0$; $c=0,2$; $d=0,4$; $\omega_0=0,77$ — линия 7. При увеличении $-f_w$ координата точки отрыва, полученная из численного решения задачи, стремится к значению, которое дает асимптотическое решение (2.9). При $-f_w \approx 2,5$ численное решение для координаты точки отрыва совпадает с асимптотическим и с дальнейшим увеличением параметра вдува практически не изменяется. Из численных и асимптотических решений уравнений пограничного слоя также следует, что при задании граничных условий в виде (3.2) — (3.3) в случае $u_w \neq 0$ имеется некоторая конечная область течения с нулевым и положительным градиентом давления, в которой в отличие от случая $u_w = 0$ уравнения ламинарного пограничного слоя в закрученном потоке имеют решение при сколь угодно большом значении параметра вдува.

Таким образом, сравнение численных и асимптотических решений уравнений ламинарного пограничного слоя в закрученном потоке газа показывает, что полученные асимптотические формулы имеют удовлетворительную точность при $-f_w \geq 2,5-3,0$.

Случай 2. Рассматривался вариант расчета пограничного слоя в сопле Лаваля, когда начальная закрутка задавалась по закону твердого тела ($\Gamma=0,45$), а критическая точка, в которой $u_e^*=0$, лежала в области сужения сопла. Некоторые результаты этих расчетов приведены на фиг. 5, 6. На фиг. 5 показаны профили u/u_0 (линия a) и w/w_0 (линия b) поперек пограничного слоя при $\theta_w=0,25$ для различных значений координаты $x^0 = \xi^*/r^*$ и параметра вдува f_w . Здесь $f_w=0$; $x^0=0; 0,6; 1,1$ — линии 1-3 соответственно, $f_w=-2,5$; $x^0=0$ — линия 4, асимптотическое решение при сильном вдуве — линия 5, результаты работы [6] — линия 6. Вблизи критической точки профиль u/u_0 имеет максимум, вызванный наличием в пограничном слое отрицательного градиента давления, неуравновешенного центробежными силами. Величина этого максимума монотонно возрастает по мере увеличения вдува, а при $f_w \rightarrow -\infty$ его значение, как это и следует из асимптотического решения задачи, стре-



Фиг. 5



Фиг. 6

мится к конечному пределу. Отметим, что, как и для случая непроницаемой поверхности [6], при уменьшении температуры поверхности влияние градиента давления на профиль скорости ослабевает.

Остановимся на вопросе о влиянии вдува и температуры поверхности на величины компонент напряжения трения и теплового потока. Абсолютные значения этих параметров сильно зависят от f_w и θ_w . Например, отличие c_{τ} , c_{η} , c_q , подсчитанных при $f_w = -1,5$, от значений этих же параметров при $f_w = 0$ составляло более 100%, а при изменении θ_w от 0,1 до 0,5 — 50–80%. В то же время значения относительных величин компонент напряжения трения и теплового потока τ_{τ}° , τ_{η}° , q° для случая $\theta_w = \text{const} < 0,5$; $f_w = \text{const} > -1,5$ слабо зависят от параметра θ_w . Это хорошо видно из фиг. 6, где приведены распределения q° (линии *a*) и τ_{τ}° (линии *b*) вдоль контура сопла для различных значений f_w и θ_w ($f_w = 0$; $\theta_w = 0,1$; $0,25$ — линии 1, 2; $\theta_w = 0,25$; $f_w = -0,5$; $-1,5$ — линии 3, 4 соответственно). Величины τ_{τ}° и q° слабо зависят также от параметра ω . При его варьировании от 0,5 до 0,8 величины τ_{τ}° и q° менялись не более чем на 10%. Особенностью рассматриваемого течения является наличие максимумов τ_{τ}° и q° в окрестности горла сопла, что объясняется уменьшением в этой области толщины пограничного слоя.

В заключение автор благодарит Э. А. Гершбейна за полезные обсуждения результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. М.: Физматгиз, 1962. 479 с.
2. Taylor G. I. The boundary layer in the converging nozzle of a swirl atomizer.— Quart. J. Mech. Appl. Math., 1950, v. 3, № 2, p. 129–139.
3. Houlihan T. M., Hornstra D. J. Boundary-layer velocity profiles in a swirling convergent flow field.— J. Fluid Mech., 1972, v. 52, № 2, p. 357–367.
4. Богданова В. В. Осесимметричный ламинарный пограничный слой в закрученном потоке.— В кн.: Техническая гидрогазодинамика. М.—Л.: Машиностроение, 1965, с. 65–73 (Тр. Ленингр. политехн. ин-та, № 248).
5. Пэк Л. Х. Гидродинамика и теплообмен в ламинарном пограничном слое с закруткой.— Ракетная техника и космонавтика, 1969, № 9, с. 148–159.
6. Белянин Н. М., Шальман Е. Ю. Ламинарный пограничный слой в закрученном потоке.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 1, с. 43–49.
7. Гершбейн Э. А. К асимптотическому решению уравнений ламинарного многокомпонентного пограничного слоя при больших вдувах.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 2, с. 112–118.
8. Гершбейн Э. А., Пейгин С. В. Ламинарный пограничный слой на частично подвижной поверхности при наличии вдува или отсоса.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 5, с. 28–36.
9. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972. 274 с.
10. Олейник О. А. О системе уравнений Прандтля в теории пограничного слоя.— Докл. АН СССР, 1963, т. 150, № 1, с. 28–31.
11. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое.— В кн.:

Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964, с. 304–325.

12. *Славянов Н. Н.* Теоретическое исследование закрученных течений идеального газа в сопле Лавала. – Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 6, с. 85–92.
13. *Мурзинов И. Н.* Ламинарный пограничный слой на сфере в гиперзвуковом потоке равномерно диссоциирующего воздуха. – Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 2, с. 184–188.
14. *Брыкина И. Г., Гершбейн Э. А., Пейгин С. В.* Ламинарный пограничный слой на стреловидных крыльях бесконечного размаха, обтекаемых под углом атаки. – Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 3, с. 27–39.
15. *Klineberg J. M., Steger J. L.* On laminar boundary-layer separation. – AIAA Pap., 1974, № 94, p. 17.
16. *Казаков А. В.* Нестационарное обтекание короткого щитка вязким сверхзвуковым потоком. – Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 4, с. 111–118.

Томск

Поступила в редакцию
6.IV.1984