

ЛИТЕРАТУРА

1. Суур У. К. О влиянии температуры на механизм изнашивания металлов в струе абразива.— Тр. Таллин. политехн. ин-та, сер. А, 1966, № 237, с. 63—76.
2. Айвис. Эрозия нержавеющей стали 310 при 975°С в атмосфере продуктов сгорания.— Тр. амер. о-ва инж.-мех. Теорет. основы инж. расчетов, 1977, т. 99, № 2, с. 31—38.
3. Игнатов С. Ф., Репин И. В., Сахаров В. П. Установка для испытания материалов на износостойкость при ударе твердых частиц.— Завод. лаб., 1981, т. 47, № 8, с. 89—91.
4. Уэйкмен Т., Табаков В. Экспериментальное исследование эрозии в реактивном двигателе.— Ракетная техника и космонавтика, 1980, т. 18, № 5, с. 183—189.
5. Васин А. В., Полежаев Ю. В. Унос массы при совместном эрозионном и тепловом воздействии двухфазного потока.— Изв. АН СССР. МЖТ, 1984, № 1, с. 120—126.
6. Данбар, Котки, Макмиллен. Возрастание тепловых нагрузок в условиях обтекания тел запыленными гиперзвуковыми потоками.— Ракетная техника и космонавтика, 1975, т. 13, № 7, с. 83—89.
7. Эйчельбергер Р., Кайнике Дж. Высокоскоростной удар.— В кн.: Физика быстропротекающих процессов. Т. 2. М.: Мир, 1971, с. 204—246.
8. Полежаев Ю. В., Романченко В. П., Чирков И. В., Шебеко В. Н. Расчетная модель процесса эрозионного разрушения композиционного материала.— Инж.-физ. журн., 1979, т. 37, № 3, с. 395—404.

Москва

Поступила в редакцию
25.VII.1984

УДК 532.546

ДВИЖЕНИЕ ПОДЗЕМНЫХ ВОД К СКВАЖИНЕ В НЕОДНОРОДНО-СЛОИСТОМ ПЛАСТЕ ПРИ ОТКАЧКЕ ИЗ ДВУХ СЛОЕВ

КАЗАРЯН С. М.

Использование подземных вод в орошении плодородных земель является важной практической задачей. Однако при ее решении не должна нарушаться глобальная гидрогеологическая обстановка режима подземных вод с их естественной разгрузкой. Поэтому предварительно необходимо теоретически исследовать возможность их использования. Ниже такое исследование выполнено применительно к условиям Араратского артезианского бассейна с двумя напорными водоносными горизонтами, отбор подземных вод из которых осуществляется при помощи системы эксплуатационных скважин. Основные особенности этого процесса выясняются уже из анализа решения задачи для одиночной скважины. Последняя и является предметом исследования данной работы. Ниже получено аналитическое решение задачи о неустановившемся движении подземных вод в неограниченной трехслойной, гидравлически связанной среде с учетом инфильтрации и перетекания при жестком режиме в раздельном слое (фиг. 1). При этом напоры в водоносных слоях разные, а отбор воды производится из двух нижних напорных слоев с постоянным суммарным расходом.

Процесс фильтрации описывается следующей системой дифференциальных уравнений [1, 2]:

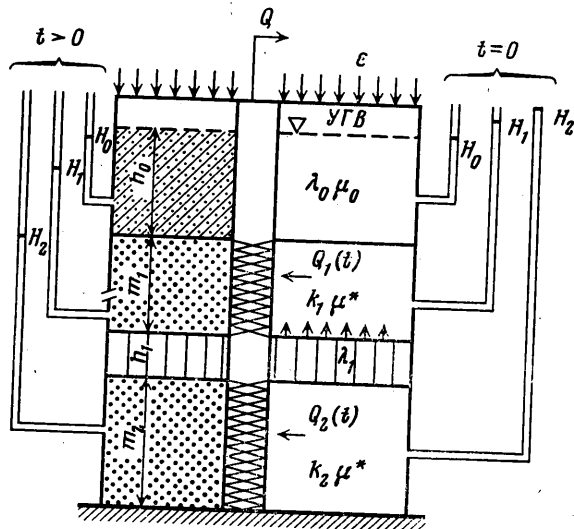
$$\begin{aligned}
 & b_0(S_1 - S_0) - e = \frac{\partial S_0}{\partial t} \\
 & a_1 \left(\frac{\partial^2 S_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_1}{\partial r} \right) - b_1(S_1 - S_2) - b_1^*(S_1 - S_0) = \frac{\partial S_1}{\partial t} \\
 & a_2 \left(\frac{\partial^2 S_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial S_2}{\partial r} \right) - b_2(S_2 - S_1) = \frac{\partial S_2}{\partial t} \quad (1)
 \end{aligned}$$

В системе (1) введены следующие обозначения [1, 3]:

$$a_i = \frac{T_i}{\mu_i^*}, \quad b_0 = \frac{\lambda_0}{h_0 \mu_0}, \quad b_1^* = \frac{\lambda_0}{h_0 \mu_1^*}, \quad b_1 = \frac{\lambda_1}{h_1 \mu_1^*}, \quad b_2 = \frac{\lambda_1}{h_1 \mu_2^*}, \quad e = \frac{\varepsilon}{\mu_0}$$

$$S_i(r, t) = H_{ie} - H_i(r, t)$$

Здесь a_i — коэффициент пьезопроводности верхнего ($i=1$) и нижнего ($i=2$) напорных водоносных слоев; b_i — коэффициент перетекания; $S_i(r, t)$ — понижения уровня подземных вод на расстоянии r от скважины в безнапорном покровном, 1-м и 2-м напорных водоносных слоях в момент времени t ($i=0, 1, 2$); $H_i(r, t)$ — пьезометрические напоры для этих же слоев в течение отбора воды; H_{ie} — их значения в естественных условиях; h_0 — некоторое постоянное среднее значение $H_0(r, t)$; λ_0, μ_0 — коэффициенты фильтрации и водоотдачи для покровного безнапорного слоя; $m_i, k_i, \mu_i^*, Q_i(t)$ — соответственно мощности, коэффициенты фильтрации, упругой водоотдачи и расходы жидкости, поступающей в скважины, для водоносных слоев; h_1, λ_1 — мощность и коэффициент фильтрации отдельного слоя; ε — постоянная интенсивность инфильтрации; $Q=Q_1+Q_2$.



Фиг. 1

Решение системы (1) ищется при следующих начальных и граничных условиях:

$$S_i(r, t) = 0, \quad t = 0 \quad (i=0, 1, 2)$$

$$S_i(r, t) = 0, \quad t > 0, \quad r \rightarrow \infty$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \left(\frac{\partial S_1}{\partial r} + \alpha_T \frac{\partial S_2}{\partial r} \right) = q, \quad S_1(r, t) + \Delta H = S_2(r, t), \quad t > 0, \quad r \rightarrow 0 \quad (2)$$

$$q = -Q/(2\pi T_1), \quad \alpha_T = T_2/T_1, \quad \Delta H = H_{2e} - H_{1e}$$

Здесь $T_i = (km)_i$ — гидропроводность водоносных слоев.

Применяя к уравнениям (1) преобразование Лапласа по времени t , получим с учетом начальных условий линейную неоднородную систему обыкновенных дифференциальных уравнений [4–6]. Решение ее после перехода от изображений к оригиналу с применением теоремы обращения представляется в виде [6].

$$S_j(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} e^{\lambda t} \left\{ S_{j0}^*(\lambda) + \frac{q}{1+\alpha_T} [\Phi_{j1}(\lambda) K_0(\omega_1 r) - \Phi_{j2}(\lambda) K_0(\omega_2 r)] - \frac{\Delta H}{1+\alpha_T} \left[\Phi_{j3}(\lambda) \frac{K_0(\omega_1 r)}{K_0(\omega_1 r_0)} - \Phi_{j4}(\lambda) \frac{K_0(\omega_2 r)}{K_0(\omega_1 r_0)} \right] + \frac{\delta_1}{1+\alpha_T} \left[\Phi_{j5}(\lambda) \frac{K_0(\omega_1 r)}{K_0(\omega_1 r_0)} - \Phi_{j6}(\lambda) \frac{K_0(\omega_2 r)}{K_0(\omega_1 r_0)} \right] \right\} d\lambda \quad (j=0, 1, 2) \quad (3)$$

где K_0 — функция Макдональда, а $\Phi_{jk}(\lambda)$ зависят от безразмерных параметров гидрогеологических условий

$$\Phi_{0k}(\lambda) = (\lambda+1)^{-1} \Phi_{1k}(\lambda) \quad (k=1 \dots 6)$$

$$\Phi_{11}(\lambda) = L - M +$$

$$\begin{aligned}
\Phi_{12}(\lambda) &= \Phi_{11}(\lambda) + 1/\lambda, & \Phi_{13}(\lambda) &= L + \alpha_T M^+, & \Phi_{14}(\lambda) &= \Phi_{13}(\lambda) - \alpha_T/\lambda \\
\Phi_{15}(\lambda) &= \Phi_{13}\lambda\beta^{-1}, & \Phi_{16}(\lambda) &= \Phi_{15}(\lambda) - \alpha_T/\beta, & \Phi_{21}(\lambda) &= M^- + \psi \\
\Phi_{22}(\lambda) &= \Phi_{21}(\lambda) + 1/\lambda, & \Phi_{23}(\lambda) &= M^- + \alpha_T\psi, & \Phi_{24}(\lambda) &= \Phi_{23}(\lambda) + 1/\lambda \\
\Phi_{25}(\lambda) &= \Phi_{23}\lambda\beta^{-1}, & \Phi_{26}(\lambda) &= \Phi_{25}(\lambda) + 1/\beta \\
N_0(\lambda) &= N\lambda^2 + \gamma_5\lambda + \gamma_6, & f(\lambda) &= [(a_0\lambda^2 + b\lambda + c)^2 - 4A^\circ\lambda(\lambda+1)(\lambda^2 + \gamma_3\lambda + \gamma_4)]^{1/2} \\
\beta(\lambda) &= \lambda(\lambda^2 + f_1\lambda + d_1), & M^\pm &= 0,5[\varphi(\lambda) \pm 1]/\lambda, & L &= A^\circ B_1^\circ(\lambda+1)\lambda^{-1}f^{-1} \\
\varphi(\lambda) &= \frac{N_0}{f}, & \omega_{1,2} &= \sqrt{\frac{b_0}{2a_2} \frac{a_0\lambda^2 + b\lambda + c \pm f}{\lambda+1}} & \psi(\lambda) &= \frac{N_0^2 + f^2}{4A^\circ B_1^\circ \lambda(\lambda+1)f} \\
S_{00}^*(\lambda) &= -[(\delta_1\lambda + d_2)\lambda^{-1}\beta^{-1} - e]\lambda^{-1}(\lambda+1)^{-1} \\
S_{10}^*(\lambda) &= -(\delta_1\lambda + d_2)\lambda^{-1}\beta^{-1}, & S_{20}^*(\lambda) &= -d_2\lambda^{-1}\beta^{-1}
\end{aligned} \tag{4}$$

В (4) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
A^\circ &= a_2/a_1, & a_0 &= A^\circ + 1, & N &= A^\circ - 1, & c &= B_2^\circ + A^\circ B_1^\circ, & \delta_1 &= B_1^{*\circ} e^* \\
b &= 1 + B_2^\circ + A^\circ(1 + B_1^\circ + B_1^{*\circ}), & \gamma_3 &= 1 + B_1^\circ + B_1^{*\circ} + B_2^\circ, & \gamma_6 &= A^\circ B_1^\circ - B_2^\circ \\
\gamma_4 &= B_1^\circ + B_2^\circ(1 + B_1^{*\circ}), & \gamma_5 &= A^\circ(1 + B_1^\circ + B_1^{*\circ}) - (1 + B_2^\circ) \\
f_1 &= 1 + B_1^\circ + B_1^{*\circ} + B_2^\circ, & d_1 &= B_2^\circ B_1^{*\circ} + B_1^\circ + B_2^\circ, & d_2 &= B_2^\circ B_1^{*\circ} e^* \\
B_1^\circ &= \frac{b_1}{b_0}, & B_1^{*\circ} &= \frac{b_1^*}{b_0}, & B_2^\circ &= \frac{b_2}{b_0}, & e^* &= \frac{e}{b_0}, & \tau &= b_0 t.
\end{aligned}$$

Подынтегральные функции (3) имеют особые точки типа простых полюсов и точек разветвления [6].

Для функции $S_{j_0}^*(\lambda)$ точки $\lambda = -1, -k_{1,2}$ — простые полюсы, а точка $\lambda = 0$ — полюс второго порядка. Здесь $k_{1,2} = 0,5(f_1 \mp \sqrt{f_1^2 - 4d_1})$. Для функции $\omega_{1,2}(\lambda)$ нули внутреннего квадратного корня (на фиг. 2, 3 они показаны точками A_1^\pm, A_2^\pm), а также $\lambda = -1$ являются точками разветвления. Точка $\lambda = 0$ и нули внешнего квадратного корня $\lambda = -v_{1,2} = k_{1,2}$ являются точками разветвления для функции $\omega_2(\lambda)$.

С учетом отмеченных свойств функций $S_{j_0}^*(\lambda)$ получены оригиналы их изображений.

Для вычисления остальных интегралов в (3) рассмотрим обобщенные контурные интегралы [7]

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{f(\lambda)} K_0(\omega_{1,2}) d\lambda \tag{5}$$

Подынтегральные функции (5) имеют точки разветвления. Поэтому при дополнении контура L влево полуокругом большого радиуса надо обойти все точки разветвления [6, 7]. Полученные контуры изображены на фиг. 2 и 3 соответственно для функций ω_1 и ω_2 . При $R_n \rightarrow \infty$ и $\varepsilon_n \rightarrow 0$ интегралы по контурам Γ_i и по малым окружностям стремятся к нулю (фиг. 2). Таким образом, при $R_n \rightarrow \infty$ и $\varepsilon_n \rightarrow 0$ вычисление интегралов (5) сводится к интегрированию вдоль прямолинейных отрезков соответствующих размеров, лежащих на противоположных берегах разрезов. Ветви многозначных функций на L должны быть выбраны в соответствии с условиями $\text{Re } \omega_1 > 0$ и $\text{Re } \omega_2 > 0$, а значения подынтегральных функций на прямолинейных путях должны получаться аналитическим продолжением. Если аргумент $\lambda(\lambda)$ на L считать изменяющимся от $-\pi/2$ до $\pi/2$, то можно получить значения аргументов на прямолинейных путях. После громоздких выкладок искомые контурные интегралы приводятся к обычным вещественным определенным интегралам. Затем с использованием теоремы о свертке вычисляются все интегралы в (3). Расчетные формулы при этом получаются в виде

$$S_i(r, t) = S_{i0}(t) - \frac{Q}{4\pi T} R_i^{(1)}(r, t) - \frac{\Delta H}{4T} T_i R_i^{(2)}(r, t) + \frac{\delta_1}{4T} T_i R_i^{(3)}(r, t) \quad (i=0, 1, 2) \tag{6}$$

где функции $S_{i0}(t)$ выражаются через элементарные функции, а $R_i^{(j)}(r, t)$ — через определенные интегралы, которые протабулированы для различных значений гидрогеологических параметров пластов.

Для максимального понижения уровня подземных вод расчетные формулы при-

обрегают вид

$$S_0(r, t) = S_{00}(t) + \frac{Q}{4\pi T} R_0(r_0, t) - \frac{\Delta H}{T} T_2(1 - e^{-\tau}) + \frac{T_2}{T_1} S_{00}'(t)$$

$$S_{1,2}(r_0, t) = S_{1,20}(t) + \frac{Q}{4\pi T} R(r_0, t) \mp \frac{\Delta H}{T} T_{2,1} \pm \frac{T_{2,1}}{T} [S_{20}(t) - S_{10}(t)] \quad (7)$$

где

$$R_0(r_0, t) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-\rho\tau} - e^{-\tau}}{\rho(\rho-1)} J_0(r_0^* A(\rho)) d\rho + \frac{2}{c} K_0(r_0^* \sqrt{2c})$$

$$R(r_0, t) = - \int_1^{\infty} \frac{e^{-\rho\tau}}{\rho} J_0(r_0^* A(\rho)) d\rho + \frac{2}{c} K_0(r_0^* \sqrt{2c})$$

$$S_{00}'(t) = \frac{1}{d_1} - \frac{e^{-\tau}}{1 - f_1 + d_1} + \frac{e^{-k_1\tau}}{k_1(k_1 - k_2)(1 - k_1)} + \frac{e^{-k_2\tau}}{k_2(k_2 - k_1)(1 - k_2)}$$

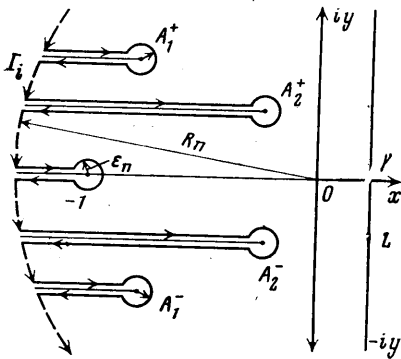
$$r_0^* = \sqrt{\frac{r_0^2 b_0}{2A^0 a_1}}, \quad A(\rho) = \sqrt{\frac{G + A_1}{\rho - 1}}, \quad G = a_0 \rho^2 - b \rho + c$$

$$A_1 = \sqrt{G^2 + 4A^0 \rho(1 - \rho)(\rho - v_1)(\rho - v_2)}$$

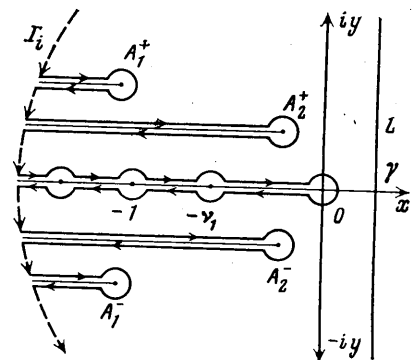
Здесь J_0 — цилиндрическая функция первого ряда вещественного аргумента. Функции (7) аналогичны функциям, входящим в расчетные формулы (6), которые также затабулированы для различных значений безразмерных комплексов.

На территории совхоза «Воскеат» Араратской равнины заложен опытный куст, состоящий из семи скважин, три из которых (1/120, 4/40 и 7/120) являются центральными, четыре (2/40, 5/40, 3/8 и 6/8) — наблюдательными (здесь в числителе номера скважин, а в знаменателе их глубины). Центральные скважины вскрывают все водоносные горизонты (фиг. 1). Через первую скважину откачка воды ведется из обоих, а через седьмую — только из нижнего напорного горизонта. Центральная скважина 4 вскрывает верхний напорный горизонт, из которого ведется откачка. Наблюдательные скважины вскрывают соответственно верхний и покровный водоносные горизонты. Все перечисленные выше скважины расположены на одной прямой на расстоянии 14 м друг от друга.

Целью опытных откачек является определение гидрогеологических параметров для данного литологического разреза, установление гидравлической связи между водоносными горизонтами, сопоставление результатов, полученных по предложенным формулам (6) и (7), с опытными данными при откачке из отдельных горизонтов через одиночные скважины.



Фиг. 2



Фиг. 3

| Сква- жина | d_f , мм | l_f , м | l_i , м | S_m | | | S_e | | |
|---------------|---------------|--------------|--------------|-------|------|-------|-------|------|-------|
| | | | | $t=1$ | 5 | 10 | $t=1$ | 5 | 10 |
| 1 | 159 | 30 | 0 | 6,11 | 8,41 | 11,36 | 6,00 | 8,48 | 11,31 |
| 2 | 89 | 30 | 14 | 0,55 | 1,08 | 1,42 | 0,60 | 1,11 | 1,36 |
| 3 | 89 | 6 | 14 | 0,11 | 0,18 | 0,28 | 0,08 | 0,10 | 0,22 |
| 4 | 89 | 30 | 28 | 0,21 | 0,39 | 0,62 | 0,27 | 0,45 | 0,68 |
| 5 | 89 | 30 | 42 | 0,15 | 0,21 | 0,30 | 0,12 | 0,20 | 0,26 |
| 6 | 89 | 6 | 42 | 0,06 | 0,14 | 0,21 | 0,07 | 0,12 | 0,18 |
| 7 | 159 | 60 | 56 | 1,04 | 2,12 | 2,96 | 1,00 | 2,18 | 2,98 |

В таблице приводится сопоставление указанных результатов лишь при откачке одновременно из двух напорных горизонтов, перепад давления между которыми $\Delta H = H_{2e} - H_{1e} = 4,12$ м. Здесь d_f — диаметр фильтра, l_f — его длина, l_i — расстояние от центральной скважины до остальных скважин, S_m — понижение уровня подземных вод за время 1, 5 и 10 сут, определяемое предлагаемыми расчетными формулами (6), а S_e — понижение уровня по данным опытных измерений. Откачка производилась лишь из центральной скважины I с расходом $Q = 60$ л/с. При этом на центральной скважине было установлено два фильтра в водоносных пластах, а на остальных — по одному.

Хорошее соответствие результатов аналитического расчета с опытными данными подтверждает точность определения гидрогеологических параметров по разработанной методике и приемлемость предлагаемых расчетных формул.

Заметим, что данная задача при более частных условиях рассматривалась ранее в [1].

Предлагаемые расчетные формулы позволяют решать сложные задачи, связанные с использованием подземных вод, а также с осушением. Они могут служить также для оценки точности решений подобных задач численными методами на ЭВМ.

ЛИТЕРАТУРА

1. Шестаков В. М. Фильтрационный расчет откачки из скважины в двухпластовой системе. — Изв. вузов. Геология и разведка, 1982, № 1, с. 67–75.
2. Олейник А. Я. Фильтрационные расчеты вертикального дренажа. Киев: Наук. думка, 1978. 202 с.
3. Щелкачев В. Н. Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. М.: Гостехиздат, 1959. 467 с.
4. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. М.: Наука, 1964. 772 с.
5. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
6. Лаверентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958. 678 с.
7. Уфлянд Я. С. Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин. — ПММ, 1948, т. 12, № 3, с. 287–300.

Ереван

Поступила в редакцию
28.XI.1984