

и (2.1) показывает, что главные добавочные члены к плоскому течению совпадают.

Представление потенциала в виде (1.3) может быть использовано, например, для расчета всплытия пузыря в тяжелой жидкости и его отрыва от кольцевой щели с использованием методов теории функций комплексного переменного.

Вторая задача может быть использована для описания истечения газа из кольцевой щели в невесомую жидкость в присутствии цилиндрического тела.

В заключение автор благодарит Ю. Л. Якимова и Р. Л. Крепс за проявленные интерес и внимание к работе.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Якимов Ю. Л. Асимптотические законы вырождения формы тонких каверн.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 3, с. 3—10.

Москва

Поступила в редакцию  
23.V.1984

УДК 532.517.4:537.84

### К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КОРРЕЛЯЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ПУЛЬСАЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ, ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ

ВАТАЖИН А. Б., ЛЕВИТАН Ю. С.

Построение любых расчетно-теоретических моделей для описания турбулентных магнитогидродинамических (МГД) течений сопряжено с необходимостью вычисления дополнительных одноточечных корреляционных моментов, в которые входят пульсации электромагнитных параметров. Поскольку в подавляющем большинстве МГД-устройств магнитное число Рейнольдса  $Re_m \ll 1$ , то, ограничиваясь только моментами второго порядка, необходимо в случае однородной проводимости корректно определить корреляции  $\langle E'^2 \rangle$ ,  $\langle u'E' \rangle$  и  $\langle u' \times E' \rangle$ , входящие в уравнения, описывающие турбулентное МГД-течение. Эти корреляции будем в дальнейшем называть корреляциями  $M$ . Здесь  $u'$  и  $E'$  — соответственно пульсации скорости и напряженности электрического поля; угловые скобки, как обычно, обозначают осреднение.

Существенно то обстоятельство, что в силу линейности уравнений электродинамики (при однородной проводимости), которые связывают между собой пульсации электрического потенциала  $\phi'$  и пульсационное поле скорости  $u'$ , указанные выше корреляции  $M$  в принципе могут быть вычислены, если известны данные о корреляционных моментах второго порядка для пульсационного поля скорости (которые будем называть корреляциями  $M^*$ ).

В общем случае магнитное поле воздействует на пульсационное поле скорости. Однако для многих практических приложений в первом приближении вычисление корреляций  $M$  можно проводить без учета указанного влияния поля  $B$  на моменты  $M^*$  (но, конечно, не на осредненное движение). Определенные таким образом корреляции  $M$  в дальнейшем могут быть использованы для вычисления поправок к МГД-характеристикам.

Реализация указанного выше подхода представляет собой сложную математическую задачу, которая может решаться различными способами. Одним из перспективных направлений является использование интегральной связи между пульсациями электрического потенциала  $\phi'$  и пульсациями поля скорости, которая получается с помощью решения эллиптического уравнения для пульсации потенциала на основе функции Грина [1].

Настоящая работа посвящена последовательному определению всех корреляций  $M$  с помощью идей, изложенных в работах [1, 2], для одного из интересных и важных случаев, когда корреляции  $M^*$  аппроксимируются моделью однородной и изотропной турбулентности.

1. Рассмотрим турбулентное течение однородной изотропной проводящей несжимаемой среды. Пусть на такое течение наложено электромагнитное поле, которое приводит к появлению пульсаций электрического поля и соответственно к осредненной и пульсационной составляющим электрического тока. Уравнение для пульсации потенциала в этом случае имеет вид [1]

$$\Delta \phi' = B \operatorname{rot} u' \quad (1.1)$$

Решение (1.1) может быть записано с помощью функции Грина  $\Omega$  с учетом естественного граничного условия  $\phi'|_{r=0}$

$$\phi'(P_0) = - \int_{V_P} \Omega(P_0, P) (B \operatorname{rot} u')_P dV_P \quad (1.2)$$

$$\mathbf{E}'(P_0) = -\nabla_{P_0}\varphi' = \int_{V_P} (\nabla_{P_0}\Omega) (\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{u}')_P dV_P \quad (1.3)$$

$$\Omega(P_0, P) = (4\pi r_{PP_0})^{-1} \quad (1.4)$$

где  $P_0, P$  — произвольные точки области  $V$ ;  $r_{PP_0}$  — расстояние между этими точками. На основании данного решения и в силу того, что  $\operatorname{div} \mathbf{u}' = 0$ , корреляции  $M$  приобретают следующий вид:

$$\langle E'_\beta E'_\gamma \rangle_{P_0} = \int_{V_P} \int_{V_P} \frac{\partial \Omega(P_0, P)}{\partial x_\beta(P_0)} \frac{\partial \Omega(P_0, M)}{\partial x_\gamma(P_0)} B_m(P) B_q(M) \varepsilon_{mij} \varepsilon_{qnh} \frac{\partial^2 \langle M_{kj^*} \rangle_{M,P}}{\partial x_i(P) \partial x_n(M)} dV_M dV_P \quad (1.5)$$

$$\langle u'_\beta E'_\gamma \rangle_{P_0} = \int_{V_P} \frac{\partial \Omega(P_0, P)}{\partial x_\gamma(P_0)} B_m(P) \varepsilon_{mij} \frac{\partial \langle M_{j\beta^*} \rangle_{P,P_0}}{\partial x_i(P)} dV_P \quad (1.6)$$

$$\langle M_{kj^*} \rangle_{M,P} = \langle u'_k(M) u'_j(P) \rangle, \quad \langle M_{j\beta^*} \rangle_{P,P_0} = \langle u'_j(P) u'_\beta(P_0) \rangle$$

Здесь индексы  $i, j, k, m, n, q, \beta, \gamma$  обозначают проекции векторов на соответствующие оси координат;  $\varepsilon_{ijk}$  — единичный антисимметричный тензор третьего ранга; индексы  $P, M, P_0$  у операторов указывают, по какой переменной производится дифференцирование; нижние индексы  $P, M, P_0$  у функций указывают точку, в которой вычисляется функция; по повторяющимся индексам производится суммирование.

Формулы (1.5) и (1.6) позволяют вычислить произвольные корреляции  $M$ , если имеются данные о корреляционном тензоре второго ранга  $\langle M_{kj^*} \rangle_{M,P}$  (или  $\langle M_{j\beta^*} \rangle_{P,P_0}$ ).

Будем аппроксимировать эти тензоры соотношениями, справедливыми для однородной и изотропной турбулентности [3]

$$\langle M_{kj^*} \rangle_{M,P} = \langle u'^2 \rangle \left[ \frac{f(r) - g(r)}{r^2} r_k r_j + g(r) \delta_{kj} \right] \quad (1.7)$$

$$r^2 = [\mathbf{r}(P) - \mathbf{r}(M)]^2, \quad r_k = [\mathbf{r}(P) - \mathbf{r}(M)] e_k \quad (1.8)$$

$$f(r) + \frac{r}{2} \frac{df(r)}{dr} = g(r), \quad g(0) = 1, \quad g(\infty) \rightarrow 0 \quad (1.9)$$

Здесь  $f(r), g(r)$  — коэффициенты, соответственно продольной и поперечной корреляций;  $\langle u'^2 \rangle$  — средняя величина от квадрата пульсации любой компоненты скорости;  $\delta_{kj}$  — символ Кронекера;  $e_k$  — единичный вектор вдоль  $k$ -й координаты.

При подстановке соотношений (1.7)–(1.9) в (1.5) и (1.6) все вычисления можно провести до конца.

2. Рассмотрим течение жидкого металла со следующими однородными распределениями осредненных электрических и гидродинамических параметров и их пульсаций:

$$\langle \mathbf{u} \rangle = (\langle u \rangle, 0, 0); \quad \langle \mathbf{E} \rangle = (0, \langle E_y \rangle, 0);$$

$$\mathbf{V} = (0, 0, B); \quad \mathbf{u}' = (u', v', w'); \quad \mathbf{E}' = (E'_x, E'_y, E'_z) \quad (2.1)$$

В качестве примера вычислим корреляцию  $\langle u' E'_y \rangle$ . Подставляя в формулу (1.6) выражение (1.7) для корреляционного тензора  $\langle M_{j\beta^*} \rangle_{P,P_0}$ , а также используя (1.4), (1.8) и (1.9), получим

$$\begin{aligned} \langle u' E'_y \rangle &= \langle u'^2 \rangle \frac{B}{4\pi} \int_{V_P} \frac{r_y}{r} \left( \frac{r_x}{r} \frac{dA_{xy}}{dr} - \frac{r_y}{r} \frac{dA_{xx}}{dr} \right) \frac{dV_P}{r^2} = \\ &= -\langle u'^2 \rangle \frac{B}{4\pi} \int_{V_P} \frac{r_y^2}{r^2} \frac{dg(r)}{dr} \frac{dV_P}{r^2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$A_{ij} = -\frac{r_i r_j}{2r} \frac{df(r)}{dr} + \left[ f(r) + \frac{r}{2} \frac{df(r)}{dr} \right] \delta_{ij}$$

При получении (2.2) использовались очевидные соотношения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Omega(r)}{\partial x_i(P_0)} &= \frac{d\Omega}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_i(P_0)} = -\frac{1}{4\pi r^2} \left( -\frac{r_i}{r} \right) \\ \frac{\partial \langle M_{j\beta^*} \rangle_{P,P_0}}{\partial x_i(P)} &= \frac{d \langle M_{j\beta^*} \rangle_{P,P_0}}{dr} \frac{\partial r}{\partial x_i(P)} = \frac{d \langle M_{j\beta^*} \rangle_{P,P_0}}{dr} \frac{r_i}{r} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для вычисления интеграла в (2.2) необходимо выписать компоненты вектора  $(r_i/r)$  и элемента объема  $(dV/r^2)$  в сферической системе координат  $(\theta, \varphi, r)$

$$\frac{r_x}{r} = \sin \theta \cos \varphi, \quad \frac{r_y}{r} = \sin \theta \sin \varphi, \quad \frac{r_z}{r} = \cos \theta$$

$$\frac{dV}{r^2} = \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \, dr \quad (2.4)$$

С учетом (2.4) и (1.9) окончательно имеем

$$\langle u' E_y' \rangle = - \langle u'^2 \rangle \frac{B}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin^3 \theta \sin^2 \varphi \frac{dg(r)}{dr} dr \, d\theta \, d\varphi = \frac{1}{3} \langle u'^2 \rangle B \quad (2.5)$$

Аналогичным образом находим

$$\langle u' E_x' \rangle = \langle v' E_y' \rangle = \langle w' E_z' \rangle = 0$$

$$\langle E_x'^2 \rangle = \langle E_y'^2 \rangle = \frac{4}{15} \langle u'^2 \rangle B^2, \quad \langle E_z'^2 \rangle = \frac{2}{15} \langle u'^2 \rangle B^2$$

$$\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{E}' \rangle_x = \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{E}' \rangle_y = 0$$

$$\langle \mathbf{u}' \times \mathbf{E}' \rangle_z = \langle u' E_y' \rangle - \langle v' E_x' \rangle = \frac{2}{3} \langle u'^2 \rangle B \quad (2.6)$$

Кроме того, можно получить некоторые количественные соотношения для важных интегральных характеристик устройств со скрещенными электрическим и магнитным полями — удельной мощности  $N$  и джоулева тепловыделения  $Q$ .

Используя известные выражения для этих величин

$$N = -(\mathbf{jE}), \quad Q = \mathbf{j}^2/\sigma \quad (2.7)$$

где  $\mathbf{j}$ ,  $\sigma$  — плотность тока и проводимость, проведя, как обычно, операцию «распульсирования» и предполагая, что пульсационное поле скорости однородно и изотропно, получим с точностью до моментов третьего порядка следующие зависимости:

$$\langle N \rangle = k(1-k) \sigma \langle u \rangle^2 B^2 - \sigma \langle E_\alpha' E_\alpha' \rangle + \sigma \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{E}' \rangle_z B \quad (2.8)$$

$$\langle Q \rangle = (1-k)^2 \sigma \langle u \rangle^2 B^2 + \sigma \langle E_\alpha' E_\alpha' \rangle - 2\sigma \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{E}' \rangle_z B + \frac{4}{3} \sigma q B^2;$$

$$k = \langle E_y \rangle / (\langle u \rangle B)$$

Здесь  $q = \langle u_\alpha' u_\alpha' \rangle / 2$  — энергия турбулентности.

С учетом формул (2.6) получим

$$\langle N \rangle = k(1-k) \sigma \langle u \rangle^2 B^2, \quad \langle Q \rangle = (1-k)^2 \sigma \langle u \rangle^2 B^2 + \frac{8}{3} \sigma q B^2 \quad (2.9)$$

Представляет интерес также и вычисление работы пульсационной силы на пути  $\mathbf{u}'$ , отнесенной к единице объема жидкости

$$A = \langle (\mathbf{j}' \times \mathbf{B}) \mathbf{u}' \rangle \quad (2.10)$$

Эта величина, как известно, входит в уравнение для энергии турбулентности  $q$  [1].

Аналогичная операция «распульсирования» дает с учетом (2.6)

$$A = \sigma B \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{E}' \rangle_z - \frac{4}{3} \sigma q B^2 = -\frac{8}{3} \sigma q B^2 \quad (2.11)$$

откуда следует, что магнитное поле способствует уменьшению энергии турбулентности, так как  $A < 0$ .

Полученные результаты свидетельствуют о том, что пульсационное электрическое поле обладает анизотропией, хотя динамическое поле изотропно. В направлении, параллельном магнитному полю, средняя величина квадрата пульсации электрического поля, как видно из (2.6), вдвое меньше, чем соответствующие величины в двух взаимно перпендикулярных направлениях, ортогональных вектору  $\mathbf{B}$ .

Найденные корреляционные соотношения (2.6) могут быть использованы в следующем приближении для определения отклонения от изотропии пульсационного динамического поля вследствие электромагнитных эффектов. Кроме того, еще раз обратим внимание на то обстоятельство, что общий метод функций Грина (формулы (1.5) и (1.6)) должен позволить в будущем получить соотношения и для анизотропной турбулентности, характерной для пристеночных областей течения или при

наличии сильных магнитных полей. Основная задача в этом случае заключается в адекватной аппроксимации корреляционного тензора  $\langle M_{ij} \rangle_{M, P}$  (или  $\langle M_{ij} \rangle_{P, P_0}$ ), которая должна учитывать особенности каждого конкретного течения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Алавидзе Г. Р., Ватажин А. Б. Описание турбулентных магнитогидродинамических течений с помощью дополнительного дифференциального уравнения для турбулентной вязкости. — Тр. Ин-та механ. МГУ, 1974, № 32, с. 158–170.
2. Артемов В. И., Ватажин А. Б., Левитан Ю. С., Синкевич О. А. Аппроксимация корреляций, содержащих пульсации электрических параметров, при турбулентном течении высокотемпературного электропроводного газа. — Теплофиз. высоких температур, 1984, т. 22, № 4, с. 720–727.
3. Хинце И. О. Турбулентность. М.: Физматгиз, 1963. 680 с.

Москва

Поступила в редакцию  
20.III.1985

УДК 532.529.5

### О ВЛИЯНИИ ТЕПЛОВОГО СОСТОЯНИЯ МАТЕРИАЛОВ НА ИХ ЭРОЗИОННУЮ СТОЙКОСТЬ В ЗАПЫЛЕННОМ ГАЗОВОМ ПОТОКЕ

ВАСИН А. В., МИХАТУЛИН Д. С., ПОЛЕЖАЕВ Ю. В.

В литературе [1–4] описаны результаты исследования эрозионной стойкости некоторых элементов конструкций энергетических машин, пневмотранспортных магистралей, кромок винтов вертолетов и т. п. при одновременном воздействии тепловых потоков и мелкодисперсных частиц; однако эти данные ограничены как по скорости соударения частиц (до 170 м/с), так и по температуре прогретого слоя (до 900 С).

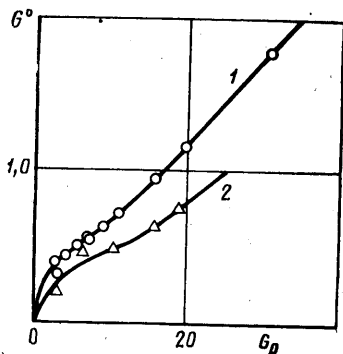
В данной статье представлена методика определения температурного режима материалов при их разрушении в высокотемпературной запыленной струе газа и результаты экспериментального исследования теплоэрозионной стойкости стеклопластика и графита при воздействии на них высокоскоростных запыленных газовых потоков.

Эрозионное воздействие на материал оказывают частицы из тугоплавких окислов, специально вводимые в струю; тепловое воздействие на образец создается высокотемпературной струей газа, а также за счет соударения с образцом твердых частиц, передающих ему часть своей энергии. Регулирование теплового состояния поверхностного слоя образца осуществляется изменением концентрации частиц в потоке и соответственно изменением скорости разрушения материала и градиента температуры в нем. С увеличением концентрации частиц в потоке интервал времени между ударами частиц по поверхности материала уменьшается. При этом скорость эрозионного разрушения материала в потоке увеличивается, а средняя температура уносимого слоя  $T_s$ , с которой соотносят скорость эрозионного разрушения, уменьшается. Таким образом, увеличение концентрации частиц в высокоскоростном газовом потоке приводит к уменьшению влияния теплового воздействия потока на интенсивность эрозионного разрушения образца.

Испытаниям на стенде подвергались цилиндрические образцы с плоским торцом из стеклопластика и графита. Параметры потока соответствовали условию сохранения частиц в твердой фазе. В форкамеру установки вводились частицы микропорошка электрокорунда  $Al_2O_3$  марки М50П ГОСТ 3647-71 с размером основной фракции  $d_p \approx 50$  мкм. Частицы разгонялись в основном тракте установки газовым потоком, затем частично теряли свою скорость в ударном слое, так что окончательная скорость взаимодействия с поверхностью составляла  $V_{pw} \approx 1000$  м/с.

В результате испытаний получены зависимости (фиг. 1) относительных величин уноса  $G^\circ = G_{er} / G_p^*$  стеклопластика (кривая 1) и графита (кривая 2) от плотности потока массы частиц  $G_p$ , кг/м<sup>2</sup>с. Здесь  $G_{er}^*$  — величина эрозионного уноса стеклопластика в потоке с пороговым значением концентрации частиц  $G_p^*$ , выше которого интенсивность эрозионного разрушения  $G' = G_{er} / G_p$  становится величиной постоянной.

При  $G_p < G_p^*$  влияние теплового воздействия высокотемпературного двухфазного потока на эрозионный унос материалов проявляется в отклонении зависимости  $G^\circ(G_p)$  от линейной и увеличении  $G'$  примерно в 2 раза для стеклопластика и в 1,5 раза для графита.



Фиг. 1