**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1985**

УДК 532.5

О ПОТЕНЦИАЛЕ ТЕЧЕНИЯ ИЗ КОЛЬЦЕВОЙ ЩЕЛИ

МАСЛЕННИКОВ А. Г.

Рассматриваются две нестационарные осесимметричные задачи по определению потенциала течения несжимаемой жидкости вне некоторой поверхности, образованной вращением контура.

В первой задаче размеры контура считаются малыми по сравнению с расстоянием до оси симметрии. В этой задаче методами, аналогичными примененным для тонких каверн [1], найдена асимптотика плоского течения вблизи контура.

Во второй задаче движение контура происходит вблизи цилиндрической стенки, а контур состоит из дуги круга и прямого отрезка. Эта задача решается на основе метода осреднения, предложенного Ю. Л. Якимовым в одной из работ. Показано, что в окрестности бесконечно удаленной точки этот потенциал имеет асимптотику пространственного источника для полупространства, а в окрестности щели — асимптотику плоского течения, причем главные дополнительные члены совпадают с полученными в первой задаче на основе применения формулы Грина.

1. Потенциал течения Φ вне поверхности Σ (фиг. 1) может быть представлен по формуле Грина

$$\Phi=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma}\frac{1}{P}\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\Sigma+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Sigma}\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{P}d\Sigma \tag{1.1}$$

где P — расстояние между точкой, в которой определяется потенциал, и точкой поверхности, φ — значение потенциала на Σ.

Потенциал осесимметричного течения (1.1) оценивается для двух участков поверхности Σ — участка длиной $2l$, который считается имеющим прямолинейные образующие поверхности, и остального участка кольца. Длина l задается равенством $l=R_0\beta_0$, где R_0 — расстояние от оси симметрии до контура, β_0 — угол (см. фиг. 1). На первом участке применяется внутреннее разложение для расстояния P и выполняется интегрирование. Для интеграла I от функции $f(\eta)$ имеем

$$I=\int\limits_{x-l}^{x+l}\oint\frac{f(\eta)\,d\eta\,d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+R^2+r^2-2Rr\cos\theta}}=$$

$$=\oint f(\eta)\left[\ln\left(\frac{4l^2}{a^2}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{4}\frac{a^2}{l^2}\right)\right]d\eta \tag{1.2}$$

$$a^2=R^2+r^2-2Rr\cos\theta$$

$$d\xi\,d\eta=d\Sigma$$

где ξ — координата вдоль поверхности кольца, η — в поперечном направлении.

Учитывая (1.1), (1.2), значение потенциала Φ_l, вычисленное на участке длиной $2l$, можно записать в виде

$$\Phi_l=-\frac{1}{2\pi}\oint\frac{\partial\varphi}{\partial n}\ln\frac{1}{a}d\eta+\frac{1}{2\pi}\oint\varphi\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{a}d\eta-\frac{1}{4\pi}\oint\frac{\partial\varphi}{\partial n}\ln(4l^2)\,d\eta$$

Оцениваем значение потенциала по кольцу с вырезом. Потенциал двойного слоя оценивается сверху

$$\left|\frac{1}{4\pi}\int\limits_{L-2l}\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{P}d\Sigma\right|\leqslant|\varphi_*|\frac{\sigma_0}{l^2}\frac{1}{2\pi}$$

где σ_0 — площадь поперечного сечения контура.

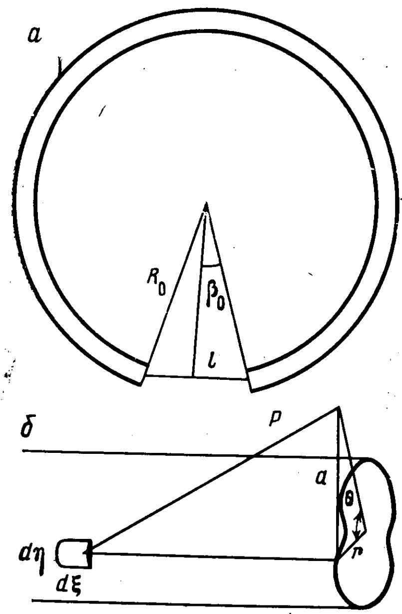
Потенциал простого слоя по кольцу с вырезом

$$-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{L-2l}\frac{1}{P}\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\Sigma=\frac{1}{2\pi}\ln\operatorname{tg}\left(\frac{\beta_0}{4}\right)\oint\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\eta\approx\frac{1}{2\pi}\ln\left(\frac{l}{4R_0}\right)\oint\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\eta$$

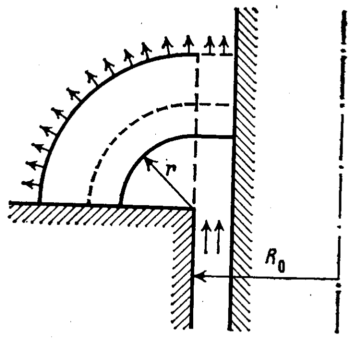
Складывая все оценки, получим с точностью порядка β_0^2 представление потенциала Φ в окрестности поверхности в виде формулы Грина для плоского течения с дополнительными членами

$$\Phi=-\frac{1}{2\pi}\oint\frac{\partial\varphi}{\partial n}\ln\frac{1}{a}d\eta+\frac{1}{2\pi}\oint\varphi\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{a}d\eta-\frac{1}{2\pi}(\ln 8+\ln R_0)\oint\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\eta \tag{1.3}$$

2. Определим приближенное значение потенциала Φ для течения из кольцевой щели, образованной пересечением бесконечного цилиндра с круговым отверстием в



Фиг. 1



Фиг. 2

плоскости (фиг. 2). Предполагается, что для поверхности, площадь которой равна четверти площади тора с радиусом сечения r и площади щели F_0, скорость течения v всюду одинакова и зависит только от r

$$v=\frac{\partial\Phi}{\partial r}=\frac{Q}{F_0+\pi^2R_0r+2\pi r^2}$$

где Q — расход через щель.

Вводя величины h и d по формулам

$$F_0=\pi h^2;\qquad d=\sqrt{\left(\frac{R_0^2\pi^2}{8}-h^2\right)\Big/2}$$

запишем выражение для Φ в виде

$$\Phi=\frac{Q}{4\pi d}\ln\left(\frac{r+\pi R_0/4-d}{r+\pi R_0/4+d}\right)$$

При $r\to\infty$ $\Phi\to -Q/2\pi r$, что совпадает с потенциалом источника для полупространства. При $r\to 0$, $h\to 0$

$$\Phi\approx\frac{Q}{\pi^2R_0}\left[\ln r-\ln\left(\frac{\pi}{2}R_0\right)\right]=\frac{2Q_*}{\pi}\left[\ln r-\ln\left(\frac{\pi}{2}R_0\right)\right] \tag{2.1}$$

где объемный расход Q для полупространства связан с расходом Q_* плоского источника для четверти пространства (см. фиг. 2) равенством $Q=Q_*2\pi R_0$. Сравнение (1.3) и (2.1) показывает, что главные добавочные члены к плоскому течению совпадают.

Представление потенциала в виде (1.3) может быть использовано, например, для расчета всплытия пузыря в тяжелой жидкости и его отрыва от кольцевой щели с использованием методов теории функций комплексного переменного.

Вторая задача может быть использована для описания истечения газа из кольцевой щели в невесомую жидкость в присутствии цилиндрического тела.

В заключение автор благодарит Ю. Л. Якимова и Р. Л. Крепс за проявленные интерес и внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Якимов Ю. Л.* Асимптотические законы вырождения формы тонких каверн.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 3, с. 3–10.

Москва

Поступила в редакцию 23.V.1984

УДК 532.517.4:537.84

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ КОРРЕЛЯЦИЙ, СОДЕРЖАЩИХ ПУЛЬСАЦИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ, ПРИ ТУРБУЛЕНТНОМ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ

ВАТАЖИН А. Б., ЛЕВИТАН Ю. С.

Построение любых расчетно-теоретических моделей для описания турбулентных магнитогидродинамических (МГД) течений сопряжено с необходимостью вычисления дополнительных одноточечных корреляционных моментов, в которые входят пульсации электромагнитных параметров. Поскольку в подавляющем большинстве МГД-устройств магнитное число Рейнольдса $\mathrm{Re}_m \ll 1$, то, ограничиваясь только моментами второго порядка, необходимо в случае однородной проводимости корректно определить корреляции $\langle \mathbf{E}'^2\rangle$, $\langle \mathbf{u}'\mathbf{E}'\rangle$ и $\langle \mathbf{u}'\times\mathbf{E}'\rangle$, входящие в уравнения, описывающие турбулентное МГД-течение. Эти корреляции будем в дальнейшем называть корреляциями M. Здесь $\mathbf{u}'$ и $\mathbf{E}'$ – соответственно пульсации скорости и напряженности электрического поля; угловые скобки, как обычно, обозначают осреднение.

Существенно то обстоятельство, что в силу линейности уравнений электродинамики (при однородной проводимости), которые связывают между собой пульсации электрического потенциала φ' и пульсационное поле скорости $\mathbf{u}'$, указанные выше корреляции M в принципе могут быть вычислены, если известны данные о корреляционных моментах второго порядка для пульсационного поля скорости (которые будем называть корреляциями M^*).

В общем случае магнитное поле воздействует на пульсационное поле скорости. Однако для многих практических приложений в первом приближении вычисление корреляций M можно проводить без учета указанного влияния поля $\mathbf{B}$ на моменты M^* (но, конечно, не на осредненное движение). Определенные таким образом корреляции M в дальнейшем могут быть использованы для вычисления поправок к МГД-характеристикам.

Реализация указанного выше подхода представляет собой сложную математическую задачу, которая может решаться различными способами. Одним из перспективных направлений является использование интегральной связи между пульсациями электрического потенциала φ' и пульсациями поля скорости, которая получается с помощью решения эллиптического уравнения для пульсации потенциала на основе функции Грина [1].

Настоящая работа посвящена последовательному определению всех корреляций M с помощью идей, изложенных в работах [1, 2], для одного из интересных и важных случаев, когда корреляции M^* аппроксимируются моделью однородной и изотропной турбулентности.

1. Рассмотрим турбулентное течение однородной изотропно проводящей несжимаемой среды. Пусть на такое течение наложено электромагнитное поле, которое приводит к появлению пульсаций электрического поля и соответственно к осредненной и пульсационной составляющим электрического тока. Уравнение для пульсации потенциала в этом случае имеет вид [1]

$$\Delta\varphi' = \mathbf{B}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}' \tag{1.1}$$

Решение (1.1) может быть записано с помощью функции Грина Ω с учетом естественного граничного условия $\varphi'|_\Gamma = 0$

$$\varphi'(P_0) = -\int\limits_{V_P} \Omega(P_0, P)\,(\mathbf{B}\,\mathrm{rot}\,\mathbf{u}')_P\,dV_P \tag{1.2}$$