МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 · 1985

УДК 533.6.011.6:532.526

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ОПЛАВЛЕНИИ СТЕКЛОВИДНЫХ МАТЕРИАЛОВ В РАМКАХ ПОЛНЫХ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

ЗНАМЕНСКИЙ В. В., ПОЛЯКОВ И. Н.

Течение пленки расплава, возникающей на поверхности стекловидных тел типа кварца при их аэродинамическом разрушении, впервые рассматривалось в [1, 2]. При этом использовалось стоксовское приближение уравнений пограничного слоя, что оправдывалось малой толщиной пленки и малым значением характерного для нее числа Рейнольдса. В дальнейшем подобный подход был развит для расчета процесса разрушения стеклопластиков [3].

Такое описание течения пленки соответствует «предельной теории» – нулевому приближению асимптотической теории, основанной на малости двух основных определяющих параметров задачи [4]. Однако существуют ситуации, например в областях большой кривизны поверхности, когда для расчета течения пленки необходимо использовать полные уравнения пограничного слоя, что с математической точки зрения существенно осложняет задачу.

В настоящей работе разработан численный метод решения соответствующей краевой задачи. Он основан на применении метода Ньютона для решения нелинейных конечно-разностных уравнений и метода матричной прогонки для решения систем линейных уравнений. Приводятся результаты расчетов распределения параметров процесса оплавления по поверхности тел различной формы. Показано, в частности, что учет высших приближений в асимптотическом решении при реальных значениях малых параметров может приводить к снижению точности полученных результатов.

Ранее процесс оплавления стекловидных материалов в рамках полных уравнений пограничного слоя рассматривался только для окрестности критической точки тела, в которой существует автомодельное решение [5, 6].

1. Отличительной особенностью стекловидных материалов типа кварца является сильная зависимость вязкости расплава $\mu$ от температуры $T$, даваемая формулой [3, 7]

$$\mu=\mu(T)=\exp\left(\frac{\theta}{T}-\beta\right),\quad \theta,\beta=\mathrm{const} \tag{1.1}$$

где $\theta\sim 60\,000-70\,000$ К$\gg T_*\sim 3000$ К, $T_*$ – характерная температура поверхности.

На квазистационарном режиме разрушения, анализом которого ограничивается данная работа, зависимость (1.1) приводит к малости толщины пленки расплава $\delta$ по сравнению с толщиной зоны прогрева $\delta_T$, которая в свою очередь ввиду малой температуропроводности этих материалов обычно много меньше характерного размера тела $L$ [3, 4]. В силу малости отношений $\delta/L$ и $\delta_T/L$ течение расплава и прогрев материала описываются уравнениями пограничного слоя.

Будем рассматривать двумерную задачу – тело плоское ($\nu=0$) или осесимметричное ($\nu=1$). Пусть $x$, $y$ – криволинейная ортогональная система координат с осями, направленными вдоль касательной и внутренней нормали к поверхности тела. В области $y\sim\delta$ введем безразмерные переменные [4]

$$x=Lx',\quad y=\delta_* y',\quad r=Lr',\quad u=\frac{LD_*}{\delta_*}u'$$

$$v=D_*v', \quad D=D_*D', \quad T=T_*T', \quad \mu=\mu_*\mu'$$

$$p=p_*p', \quad \tau=\tau_*\tau'=\mu_*\frac{LD_*}{\delta_*^2}\tau', \quad \delta_*=k\varepsilon\delta_T^*$$

$$q=\rho c_pD_*(T_*-T_\infty)q', \quad \dot{m}_w=\rho D_*v_w', \quad \varepsilon=\frac{T_*}{\theta}$$

$$k=\frac{T_*}{T_*-T_\infty}, \quad \delta_T^*=\frac{\lambda}{\rho c_pD_*}, \quad \mu_*=\mu(T_*)$$

Здесь $r$ — расстояние до оси симметрии; $u$, $v$ — компоненты скорости по осям $x$, $y$ соответственно; $D$ — скорость уноса ($D=-v$ при $y\to\infty$); $\dot{m}_w$ — массовая скорость испарения с поверхности; $p$, $\tau$ и $q$ — давление, напряжение трения и тепловой поток, действующие на поверхность пленки со стороны газового пограничного слоя; $\rho$, $c_p$, $\lambda$ — плотность, удельная теплоемкость и теплопроводность расплава (для простоты предполагаются постоянными); $T_\infty$ — температура непрогретого материала. Звездочками отмечены характерные значения размерных величин, штрихами — безразмерные величины.

В безразмерных переменных (штрихи в дальнейшем опускаем) уравнения пограничного слоя для пленки и граничные условия примут вид

$$\frac{\partial r^\nu u}{\partial x}+\frac{\partial r^\nu v}{\partial y}=0$$

$$\varkappa\left[u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right]=-K_p\frac{dp}{dx}+\frac{\partial}{\partial y}\mu\frac{\partial u}{\partial y} \qquad (1.2)$$

$$k\varepsilon\left[u\frac{\partial T}{\partial x}+v\frac{\partial T}{\partial y}\right]=\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

$$K_p=\frac{p_*\delta_*}{L\tau_*}, \quad \varkappa=\frac{\rho D_*\delta_*}{\mu_*}$$

$$\mu\frac{\partial u}{\partial y}=-\tau, \quad \frac{\partial T}{\partial y}=-\varepsilon q, \quad v=-v_w \quad (y=0) \qquad (1.3)$$

$$u\to 0, \quad \frac{\partial T}{\partial y}=-k\varepsilon D(T-T_\infty) \quad (y\to\infty) \qquad (1.4)$$

Здесь учтено, что в зоне прогрева имеет место тривиальное решение системы уравнений (1.2): $u=0$, $v=-D$.

Начальными условиями для системы (1.2) служат профили $v$ и $T$ при $x=0$, определяемые решением этих уравнений в критической точке с привлечением условий симметрии. Получаемые при этом размерные значения скорости уноса и температуры поверхности удобно принимать в качестве $D_*$ и $T_*$.

Скорость течения в пленке несоизмеримо мала по сравнению с характерной скоростью в газовом пограничном слое [1—4], поэтому обратное влияние разрушения материала на внешний поток сводится лишь к снижению за счет вдува величин $q$ и $\tau$ по сравнению с их значениями $q^\circ$ и $\tau^\circ$ на неразрушающейся поверхности.

Уменьшение теплового потока за счет вдува будем определять по простейшей приближенной зависимости, а для вычисления напряжения трения используем аналогию Рейнольдса [3, 8]

$$\alpha=\alpha^\circ-B\dot{m}_w$$

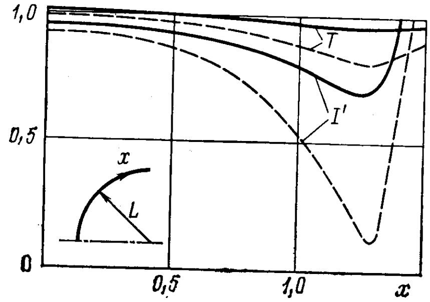
$$\tau^\circ=\alpha^\circ\sigma^{-0,6}V_e, \quad \tau=\alpha\sigma^{-0,6}V_e \qquad (1.5)$$

Здесь $\alpha$ и $\alpha^\circ$ — коэффициенты теплообмена при наличии и отсутствии вдува; $B$ — коэффициент вдува ($B$=0,6 на ламинарном и $B$=0,2 на турбулентном режимах соответственно); $\sigma$ — число Прандтля, $V_e$ — скорость газа на внешней границе пограничного слоя.

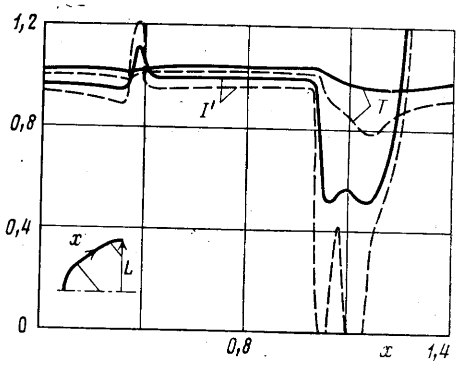
Соотношение теплового баланса дает следующее выражение для $q$:

$$q=\alpha(H_0-h_w)-\dot{m}_wQ-q_r \tag{1.6}$$

где $H_0$ — полная энтальпия в набегающем потоке, $h_w$ — энтальпия газа на поверхности пленки, $Q$ — суммарный тепловой эффект испарения материала, $q_r$ — радиационный поток с поверхности. Соотношения (1.5)—(1.6) для наглядности записаны в размерном виде.




Фиг. 1




Фиг. 2

Величины $\dot{m}_w$ и $Q$ определяются решением системы уравнений, состоящей из закона Кнудсена — Ленгмюра, соотношений материального баланса и закона действующих масс. Это решение достаточно хорошо изучено (см., например, [3]). Здесь будем считать, что зависимости $\dot{m}_w=\dot{m}_w(\alpha^\circ, p, T_w)$ и $Q=Q(\alpha^\circ, p, T_w)$ известны.

Тогда при заданных $\alpha^\circ(x)$ и $p(x)$ соотношения (1.5)—(1.6) замыкают краевую задачу (1.2)—(1.4). Результат решения удобно представлять в виде распределения вдоль поверхности тела эффективной энтальпии материала $I$, вводимой формально по формуле $I=(q^\circ-q_r)/\rho D$.

Решение задачи (1.2)—(1.4) зависит от параметров $\varepsilon$, $\varkappa$, $k$, $K_p$ и безразмерных функций $q^\circ(x)$ и $p(x)$. Пусть режим теплообмена ламинарный. Тогда $\alpha^\circ\sim L^{-0,5}$ и, как нетрудно убедиться, при $q_r\ll q^\circ$ имеет место следующий закон подобия: при отсутствии испарения с поверхности или при реализации так называемого равновесного режима испарения, когда $\dot{m}_w\sim\alpha^\circ$ [3], на геометрически подобных телах значения $T_*$, $I(x)$, а также распределения безразмерных величин $u$, $v$, $T$ совпадают (т. е. не зависят от величины $L$), $D_*\sim L^{-0,5}$, $\delta_*\sim\sqrt{L}$, $\dot{m}_w\sim L^{-0,5}$.

При турбулентном теплообмене $\alpha^\circ\sim L^{-0,2}$ и закон подобия не имеет места.

**2.** Для типичных гиперзвуковых условий обтекания величины $\varepsilon$ и $\varkappa$ являются малыми, причем обычно $\varkappa\ll\varepsilon\ll1$. Поэтому решение краевой задачи (1.2)—(1.4) можно искать в виде рядов по $\varepsilon$ и $\varkappa$ [4]. Решение в нулевом приближении соответствует традиционной, предельной ($\varepsilon$, $\varkappa\to0$), пленочной теории разрушения [1—3].

Выпишем два главных (с учетом соотношения $\varkappa\ll\varepsilon$) члена в разложении эффективной энтальпии и температуры

$$I=I_0+\varepsilon I_\varepsilon, \qquad T=1+\varepsilon T_0 \tag{2.1}$$

При отсутствии испарения с поверхности величина $T_0$ определяется формулами предельной теории; $I_0=I_*=\rho c_p D_*(T_*-T_\infty)=\mathrm{const}$, а для $I_\varepsilon$ в [9, 10] получено аналитическое выражение, имеющее структуру $I_\varepsilon=$

$=I_\varepsilon(T_{0w}, T'_{0wx}, p_x', p_{xx}'', \alpha_x^{0\prime})$, которое здесь не приводим ввиду его громоздкости.

На фиг. 1 штриховыми линиями приведены распределения эффективной энтальпии и температуры, вычисленные по формулам (2.1) (при этом $I'=I/I_0$), на поверхности сферы, на фиг. 2 — на поверхности тела, образующая которого имеет участок большой кривизны (форма тела приведена на фигуре). Расчеты выполнены для однородного кварца при скорости набегающего потока (воздуха) 6000 м/с и статическом давлении в нем 0,1 атм. Формально положено $\dot m_w=0$, а режим теплообмена принят ламинарным. Теплофизические характеристики кварца заимствованы из [3].

Определенные в результате расчета значения $\varepsilon$ и $\varkappa$ составили $\simeq 0{,}05$ и $\simeq 0{,}0003$ соответственно, т. е. $\varepsilon$ и $\varkappa$ достаточно малы. Из приведенных на фиг. 1—2 зависимостей следует, что при этом и $\varepsilon T_0 \ll 1$. В тоже время даже на таком гладком теле, как сфера, поправка $\varepsilon I_\varepsilon$ в формуле (2.1) соизмерима с членом нулевого порядка $I_0$. Отсюда следует, что применение разложений по $\varepsilon$ и $\varkappa$ в целом и традиционной пленочной теории в частности при реальных значениях $\varepsilon$ и $\varkappa$ требует, по крайней мере, дополнительного обоснования.

3. При численном решении задачи введем новые независимые переменные $X=x$ и $Y=f(x)y$. Функция $f(x)$ выбирается из условия, чтобы нижняя граница расчетной области $Y=Y_N$ всегда располагалась на расстоянии нескольких $\delta$ от поверхности тела, что позволяет использовать на этой границе условия (1.4). Целесообразность используемого преобразования обусловлена тем обстоятельством, что величина $\delta \sim 1/q$ [2, 4] и, следовательно, может значительно меняться вдоль поверхности тела. Введем в прямоугольной расчетной области $G\{0 \leqslant X \leqslant X_M;\ 0 \leqslant Y \leqslant Y_N\}$ сетку $G_{ij}\{X_i, Y_j\}$, шаги которой могут, вообще говоря, меняться от слоя к слою. Аппроксимируем уравнения (1.2), предварительно записанные в дивергентной форме, конечно-разностными, используя стандартный двухслойный шеститочечный шаблон [11]. При $s=1$ ($s$ — вес, с которым при аппроксимации производных по $Y$ используются производные на новом слое $i$) схема переходит в полностью неявную на четырехточечном шаблоне. Необходимое условие устойчивости $s \geqslant 0{,}5$.

Сильная зависимость вязкости расплава от температуры обусловливает настолько сильную «перевязанность» уравнений движения и энергии, что, как показал опыт работы над программой, традиционный для задач пограничного слоя метод последовательных прогонок [11] здесь оказывается неустойчивым. (При умеренной зависимости $\mu(T)$, например $\mu \sim 1/T$, соответствующий алгоритм устойчив, что показали специально проведенные методические расчеты). Устойчивость счета была достигнута при использовании метода Ньютона в совокупности с методом матричной прогонки [12] для решения соответствующих линейных уравнений. Вкратце схема решения при этом такова.

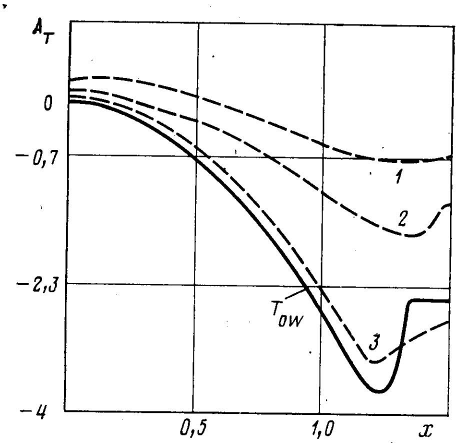
Пусть значения параметров на $i-1$ слое известны. Их значения $f_{ij}$ ($f=u, v, T$) на слое $i$ будем искать в процессе итераций, для чего положим $f_{ij}^{(k+1)} = f_{ij}^{(k)} + (\delta f)_{ij}^{(k)}$, $j=0, 1, \ldots, N$, где $k$ — номер итерации. Подставляя $f_{ij}^{(k+1)}$ в конечно-разностные уравнения и проводя линеаризацию полученных соотношений в предположении малости $(\delta f)_{ij}^{(k)}$, получим систему линейных уравнений относительно $\mathbf{W}_j = \{(\delta u)_j, (\delta v)_j, (\delta T)_j\}$, матрица которой блочно-трехдиагональна (индексы $i$, $k$ ниже для краткости опускаем). Аналогичным образом линеаризуются конечно-разностные аппроксимации граничных условий.

Несмотря на блочно-трехдиагональную структуру полученной системы, применение метода матричной прогонки для ее решения на этом этапе еще невозможно — отсутствие граничного условия для $v$ на нижней границе не позволяет организовать обратную прогонку (прямая прогонка естественным образом начинается от верхней границы $Y=0$). Нетрудно однако убедиться, используя линеаризованное уравнение неразрывности и формально записанные прогоночные соотношения для $\mathbf{U}_j = \{(\delta u)_j, (\delta T)_j\}$, что для каждого $1 \leqslant j \leqslant N$ существует связь вида

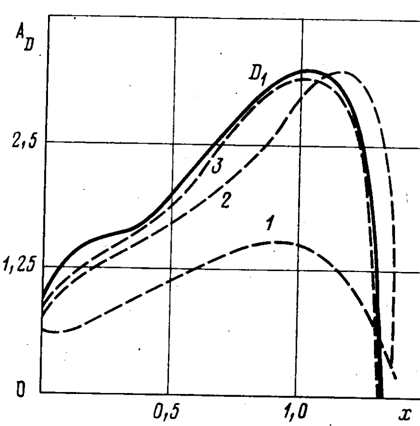
$$(\delta v)_j = V_j^1 (\delta u)_j + V_j^2 (\delta T)_j + V_j^3 \tag{3.1}$$

Коэффициенты $V_j^n$ ($n=1, 2, 3$) определяются через коэффициенты линеаризованного уравнения неразрывности на слое $j$, элементы прогоночных матриц на слое $j-1$ и $V_{j-1}^n$.

Исключая с помощью соотношений (3.1) величины $(\delta v)_j$, приходим к системе векторных уравнений относительно $\mathbf{U}_j$ ($0 \leqslant j \leqslant N$). Решая эти уравнения методом




Фиг. 3

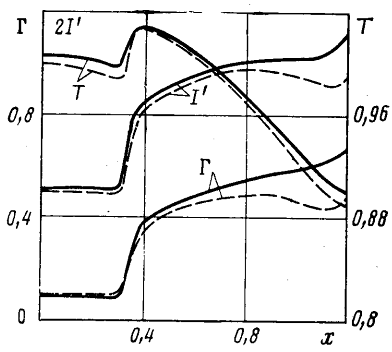



Фиг. 4

матричной прогонки, находим значения $(\delta f)_j$. Затем процесс итерирования продолжается до сходимости.

Описанный метод реализован в АЛГОЛ-программе для ЭВМ БЭСМ-6. Время счета типичного варианта при сетке 80×30 и $\dot{m}_w=0$ составляет 1–2 мин, с учетом испарения – 3-4 мин.

Разработанный метод численного решения задачи связан с выводом и программированием весьма громоздких формул, поэтому вопрос проверки программы является принципиальным. Требования, предъявляемые программой к памяти ЭВМ, не обременительны, поэтому прежде всего была использована возможность проверки сходимости результатов счета при мельчении шагов сеток (как равномерных, так и неравномерных), а также независимости их от выбора функции $f(x)$. Кроме того, была проведена следующая апробация программы.




Фиг. 5

Запишем разложения скорости уноса $D$ и температуры поверхности пленки $T_w$ в ряды по $\varepsilon$ и $\varkappa$ в виде

$$\frac{D-D_0}{\varepsilon} = D_\varepsilon + \frac{\varkappa}{\varepsilon} D_\varkappa + O\left(\varepsilon, \varkappa, \frac{\varkappa^2}{\varepsilon}\right)$$

$$\frac{T_W-1}{\varepsilon} = T_{0W}+\varepsilon T_{\varepsilon W}+\varkappa T_{\varkappa W}+O(\varepsilon, \varkappa) \qquad (3.2)$$

На фиг. 3 и 4 представлены результаты специально проведенной серии расчетов при $\varepsilon$, $\varkappa/\varepsilon \to 0$. Сплошными линиями изображены распределения $T_{0W}$ и $D_\varepsilon$ по поверхности сферы ($\dot{m}_W=0$, теплообмен ламинарный), штриховыми – значения величин $A_T=(T_W-1)/\varepsilon$ и $A_D=(D-D_0)/\varepsilon$, $T_W$ и $D$ – результат численного решения системы (1.2)–(1.4) (*1* – $\varepsilon=\varepsilon_0$, $\varkappa=\varkappa_0$; *2* – $\varepsilon=\varepsilon_0/5$, $\varkappa=\varkappa_0/25$; *3* – $\varepsilon=\varepsilon_0/10$, $\varkappa=\varkappa_0/100$). Численные расчеты при этом проведены на очень мелких сетках со специальным увеличением точности сходимости итераций (относительная погрешность $\delta f/f \ll \varepsilon$). Видно, что результаты расчетов находятся в удовлетворительном соответствии с соотношениями (3.2).

**4.** На фиг. 1–2 сплошными линиями приведены распределения эффективной энтальпии и температуры при $\dot{m}_w=0$, полученные с помощью разработанного численного метода. Видно, что в окрестности критической точки эти значения близки к полученным в рамках асимптотической теории. Однако падение эффективной энтальпии при удалении от критической точки в точном решении значительно меньше предсказываемого первым приближением асимптотической теории – точное значение эффективной энтальпии здесь гораздо ближе к значению $I=I_0=\text{const}$, даваемому предельной теорией.

На фиг. 5 приведены распределения $I$, $T_w$ и коэффициента газификации Г на поверхности сферы при учете испарения с поверхности. Условия обтекания те же, что и на фиг. 1, 2. Предполагается, что на участке $0{,}3 \leqslant x/L \leqslant 0{,}4$ происходит переход от ламинарного режима теплообмена к турбулентному. Сплошные линии — расчет в постановке настоящей работы, штриховая линия — результат предельной теории. Видно, что определяющее влияние на распределение эффективной энтальпии оказывает увеличение газификации при переходе.

Авторы благодарят В. В. Лунева за внимание к работе и полезные обсуждения.

ЛИТЕРАТУРА


1. *Саттон.* Гидродинамика и теплообмен оплавляющейся поверхности.– Вопросы ракетной техники, 1958, № 5, с. 37–45.
2. *Бете, Адамс.* Теория абляции стекловидных материалов.– Вопросы ракетной техники, 1960, № 2, с. 63–79.
3. *Полежаев Ю. В., Юревич Ф. Б.* Тепловая защита. М.: Энергия, 1976. 391 с.
4. *Знаменский В. В., Лунев В. В.* Об асимптотических свойствах уравнений пленочной теории разрушения материалов в задачах об изменении формы тел при аэродинамическом нагреве.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 1, с. 46–54.
5. *Тирский Г. А.* Оплавление тела в окрестности критической точки в плоском и осесимметричном потоке газа.– Журн. вычисл. математики и матем. физики, 1961, т. 1, № 3, с. 481–498.
6. *Тирский Г. А.* Оплавление тела в окрестности критической точки и линии в диссоциированном потоке воздуха с испарением пленки расплава.– ПМТФ, 1961, № 5, с. 39–52.
7. *Френкель Я. И.* Кинетическая теория жидкостей. М.– Л.: Изд-во АН СССР, 1945. 424 с.
8. Основы теплопередачи в авиационной и ракетно-космической технике. М.: Машиностроение, 1975. 623 с.
9. *Hidalgo H.* Ablation of glassy material around blunt bodies of revolution.– ARS Journal, 1960, v. 30, № 9, p. 806–814.
10. *Горский В. В., Полежаев Ю. В.* О некоторых особенностях, связанных с течением пленки расплава.– Теплофиз. высоких температур, 1966, т. 4, № 2, с. 218–227.
11. *Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А.* Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984. 285 с.
12. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978. 591 с.


Москва

Поступила в редакцию
18.XII.1984