

УДК 533.6.011

**УСТОЙЧИВОСТЬ НЕКОТОРЫХ ОДНОМЕРНЫХ
НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ДВИЖЕНИЙ ГАЗА**

БУРДЭ Г. И.

В работе исследуется устойчивость адиабатических неустановившихся движений совершенного газа, для которых величина скорости пропорциональна расстоянию до центра симметрии. Решения уравнений газовой динамики такого вида и их физическая интерпретация рассмотрены в [1]. Устойчивость одного из решений, соответствующего пульсациям однородных гравитирующих шаров, изучалась в работе [2]. Устойчивость других решений (движения газа в отсутствие сил ньютоновского тяготения, непериодические движения гравитирующего газа) ранее не исследовалась. В настоящей работе исследована устойчивость таких решений; показано, что движения, при которых происходит сжатие газа, как правило, неустойчивы.

1. Рассмотрим сначала движения газа в отсутствие сил тяготения. Распределение скорости для решения исследуемого вида представляется формулой

$$v = \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} r \quad (1.1)$$

где r — расстояние до центра симметрии, $R(t)$ — некоторый масштабный фактор. Запишем уравнения газовой динамики, описывающие адиабатические движения совершенного газа, в переменных y_i, t

$$\rho \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + \left(v_k - \frac{dR}{dt} y_k \right) \frac{1}{R} \frac{\partial v_i}{\partial y_k} \right] = - \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial y_i} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(v_k - \frac{dR}{dt} y_k \right) \frac{1}{R} \frac{\partial \rho}{\partial y_k} + \rho \frac{1}{R} \frac{\partial v_k}{\partial y_k} = 0 \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \left(v_k - \frac{dR}{dt} y_k \right) \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial y_k} + \gamma p \frac{1}{R} \frac{\partial v_k}{\partial y_k} = 0 \quad (1.4)$$

$$y_i = \frac{x_i}{R}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \rightarrow \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial y_i}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{R} \frac{dR}{dt} y_k \frac{\partial}{\partial y_k}$$

Здесь x_i — декартовы координаты, по повторяющимся индексам проводится суммирование. Число значений, пробегаемых индексами i, k , равно ν ($i=1, \dots, \nu; k=1, \dots, \nu$), где величина ν указывает вид симметрии задачи: $\nu=1$ для плоских движений, $\nu=2$ для движений с цилиндрической симметрией, $\nu=3$ для движений со сферической симметрией.

Решение уравнений (1.2)–(1.4) с распределением скорости вида (1.1) запишется в форме

$$v_i = \frac{dR}{dt} y_i, \quad \rho = R^{-\nu} \frac{\psi'}{\xi}, \quad p = R^{-\gamma \nu} \left[C + \frac{(\gamma-1)\nu}{2} B \psi \right] \quad (1.5)$$

$$\xi = (y_k y_k)^{1/2} = \frac{r}{R} \frac{dR}{dt} = \pm [A + BR^{-\nu(\gamma-1)}]^{1/2} \quad (1.6)$$

где штрих обозначает дифференцирование по ξ . Характер решения (1.5), (1.6), зависящего от произвольной функции $\psi(\xi)$ и трех произвольных постоянных A, B, C , подробно обсуждается в [1]. При сравнении (1.5), (1.6) с формулами [1] следует иметь в виду, что в [1] вместо R используется $\mu=R^{-1}$.

Исследуем устойчивость движения (1.5), (1.6) относительно малых возмущений

$$v_i = v_i^\circ + u_i, \quad \rho = \rho^\circ(1 + \varepsilon), \quad p = p^\circ + \pi \quad (1.7)$$

Подставляя (1.7) в систему (1.2)–(1.4) и линеаризуя по возмущениям, приходим с использованием (1.5) к следующим уравнениям для величин u_i, ε, π :

$$R \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{dR}{dt} u_i + R \frac{d^2 R}{dt^2} y_i \varepsilon = -R^\nu \frac{\xi}{\psi'} \frac{\partial \pi}{\partial y_i} \quad (1.8)$$

$$R \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \left(\frac{\psi''}{\xi \psi'} - \xi^{-2} \right) (y_k u_k) + \frac{\partial u_k}{\partial y_k} = 0 \quad (1.9)$$

$$R \frac{\partial \pi}{\partial t} + \gamma \nu \frac{dR}{dt} \pi + \left[(\gamma - 1) \frac{\nu B}{2} \right] R^{-\gamma \nu} \frac{\psi'}{\xi} (y_k u_k) + \\ + \gamma R^{-\gamma \nu} \left\{ C + \left[(\gamma - 1) \frac{\nu B}{2} \right] \psi \right\} \frac{\partial u_k}{\partial y_k} = 0 \quad (1.10)$$

Сверткой уравнения (1.8) с операторами $\partial/\partial y_i$ и y_i можно получить два уравнения для величин $(y_k u_k)$ и $\partial u_k/\partial y_k$. Преобразуем полученную таким образом систему к новым переменным $H, G, E, W, \eta = \ln \xi$

$$E = -G - \beta H, \quad W = -\gamma q G - b H \quad (1.11)$$

$$LH = bE - \frac{\partial W}{\partial \eta}, \quad LG = -\Delta_1 W + D \left(bE - \frac{\partial W}{\partial \eta} \right) \quad (1.12)$$

$$H = R \psi' \frac{(y_k u_k)}{\xi}, \quad G = R \xi \psi' \frac{\partial u_k}{\partial y_k}, \quad E = R^2 \xi \psi' \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad W = R^2 \frac{\partial}{\partial t} (R^{\gamma \nu} \pi) \quad (1.13)$$

$$N = \nu(\gamma - 1), \quad b = \frac{NB}{2}, \quad \beta = \frac{\xi \psi''}{\psi'} - 1, \quad q = \frac{C + b\psi}{\xi \psi'} \quad (1.14)$$

$$D = \frac{\partial}{\partial \eta} + (\nu - 2 - \beta), \quad L = R^2 \frac{\partial}{\partial t} R^\nu \frac{\partial}{\partial t} \quad (1.15)$$

где Δ_1 обозначает угловую часть оператора Лапласа, $\Delta_1 = 0$ при $\nu = 1$.

2. Рассмотрим сначала решения уравнений для возмущений в случае, когда $B = 0$ (сжатие или расширение газа под поршнем, движущимся с постоянной скоростью, или разлет газа от точки [1]). При $b = 0$ подстановка W из (1.11) в (1.12) дает уравнение

$$LG = \gamma \left[D \frac{\partial}{\partial \eta} (qG) + \Delta_1 (qG) \right] \quad (2.1)$$

Решения (2.1) могут быть представлены в виде разложений по цилиндрическим ($\nu = 2$), либо сферическим ($\nu = 3$) гармоникам

$$G = \sum_a G_a(\eta, t) U_a, \quad \Delta_1 U_a = -a^2 U_a \quad (2.2)$$

(случаю $\nu = 1$ соответствует $a = 0$). Дальнейшее разделение переменных $G_a = \alpha(t) \chi(\eta)$ приводит к уравнениям

$$\gamma \left[D \frac{d}{d\eta} (q\chi) - a^2 (q\chi) \right] + \lambda \chi = 0 \quad (2.3)$$

$$L\alpha + \lambda\alpha = 0 \quad (2.4)$$

Уравнение (2.3) при степенной зависимости $\psi = h\xi^s$ имеет решения вида ($J_m(z)$ — функция Бесселя первого рода)

$$\chi = \xi^{1/2(3s-v)} J_m(\Lambda \xi^{s/2}), \quad \Lambda = \left(\frac{4\lambda h}{S\gamma C} \right)^{1/2}, \quad m = \left[\frac{(S-v)^2 + 4a^2}{S^2} \right]^{1/2} \quad (2.5)$$

В задаче о поршне, где величине R можно придать смысл расстояния от центра симметрии до поршня, значения λ определяются из условия $u_r = \xi^{-1}(y_k u_k) = 0$ при $\xi = 1$. Это условие с использованием (1.11), (1.12) и (2.5) приводит к соотношению

$$\left(1 - \frac{v}{S} \right) J_m(\Lambda) + \Lambda J_m'(\Lambda) = 0 \quad (2.6)$$

Все корни уравнения (2.6) вещественны и образуют бесконечную последовательность Λ_n , а функции $J_m(\Lambda_n \xi^{s/2})$ образуют при данном m полную систему функций. Из вещественности Λ следует положительность значений $\lambda = \lambda_n$, входящих в (2.4).

Решения уравнения (2.4) имеют вид

$$\alpha_n = w^{(N-1)/N} J_\mu(w), \quad w = \frac{2}{N} \left(\frac{\lambda_n}{AR^N} \right)^{1/2}, \quad \mu = \frac{1-N}{N} \quad (2.7)$$

Учитывая, что зависимость возмущений скорости от времени определяется фактором $u^{(n)} \sim R^{-1} \alpha_n$ ($u \sim R^{-1} G$, см. (1.13)), получим

$$u^{(n)} = w^{(N+1)/N} J_\mu(w) \sim R^{-1/2(N+1)} J_\mu(w) \quad (2.8)$$

Несущественные постоянные множители здесь и далее опускаются. При дискретных значениях γ , соответствующих полуцелым значениям $\mu = k - 1/2$, (2.8) примет вид

$$u^{(n)} = w \cos w \quad (k=0) \quad (2.9)$$

$$u^{(n)} = w^{2k+1} \left(-\frac{1}{w} \frac{d}{dw} \right)^{k-1} \frac{\sin w}{w} \quad (k>0)$$

$$\gamma = 1 + 2[v(2k+1)]^{-1}, \quad N = 2(2k+1)^{-1}. \quad (2.10)$$

При произвольных γ можно записать (2.8) для больших значений λ либо для больших степеней сжатия, используя асимптотические выражения для функций Бесселя

$$u^{(n)} = w^{1/N+1/2} \sin(w+\delta) \quad (2.11)$$

где δ — постоянная.

В выражениях (2.9), (2.11) коэффициенты при гармониках $\sin w$ и $\cos w$ содержат только положительные степени w (отрицательные степени R). Таким образом, при расширении газа (увеличении R) возмущения скорости затухают при любом γ и, наоборот, при сжатии газа возмущения скорости колебательно нарастают и движение становится неустойчивым. Из соотношений (1.13) и уравнений (1.11) видно, что возмущения давления и плотности $\sim R^{-1} u^{(n)}$, т. е. ведут себя аналогично $u^{(n)}$.

3. Исследование устойчивости решения (1.5), (1.6) при $B \neq 0$ начнем с рассмотрения одномерных возмущений, для которых $u = u_r(\xi, t)$, $\pi = \pi(\xi, t)$, $\varepsilon = \varepsilon(\xi, t)$. В этом случае $G = DH$ и уравнение (1.12) с использованием (1.11), (1.15) сводится к следующему:

$$LH = \gamma \frac{\partial}{\partial \eta} [q(DH)] - b(v-2)H \quad (3.1)$$

Разделяя переменные $H=\alpha(t)\Theta(\xi)$, приходим к уравнениям

$$v \frac{d}{d\eta} [q(D\Theta)] + \lambda\Theta = 0, \quad L\alpha + \kappa\alpha = 0 \quad (3.2)$$

$$\kappa = \lambda + b(v-2) \quad (3.3)$$

Первое уравнение (3.2) может быть представлено в различных формах в зависимости от интерпретации основного решения. Если $B < 0$ и решение (1.5), (1.6) интерпретируется как движение газа, граничащего с пустотой, в качестве переменной удобно использовать величину $Q=q(D\Theta)$, обращающуюся в нуль на границе с пустотой. Подействовав на первое уравнение (3.2) оператором qD , при $\psi = h\xi^s$ после преобразования к новой независимой переменной $z = -2hb\xi^s/C - 1$ получим уравнение, решения которого при дискретных значениях $\lambda = \lambda_n$ имеют вид полиномов Якоби [3] и обращаются в нуль при $z=1$

$$Q_n = P_n^{-1, v/S-1}(z); \quad \lambda_n = S(-b)\gamma n(n+v/S-1) \quad (n=1, 2, \dots) \quad (3.4)$$

В случае, когда основное решение интерпретируется как движение газа в области, ограниченной поршнем (поршень движется по закону (1.6)), первое уравнение (3.2) рассматривается как уравнение для Θ ($\Theta=0$ при $\xi=1$). Тогда преобразованием

$$x = -\frac{bh}{C}\xi^s, \quad y = x^{-1}\Theta \quad (3.5)$$

(3.2) сводится к уравнению, решением которого является гипергеометрическая функция [4]

$$y = F(\sigma_1, \sigma_2; \sigma_3; x), \quad \sigma_1 = \frac{\sigma_3}{2} \pm \sqrt{\mu}, \quad \sigma_3 = 1 + \frac{v}{S} \quad (3.6)$$

$$\mu = \frac{1}{4} \left(1 - \frac{v}{S}\right)^2 - \frac{\lambda}{Sb\gamma}$$

Величины λ_n определяются из уравнения (условие $u_r=0$ при $\xi=1$)

$$F[\sigma_1(\lambda), \sigma_2(\lambda); \sigma_3; -bh/C] = 0 \quad (3.7)$$

Явные выражения для корней уравнения (3.7) найти не удастся. Однако на основе (3.5)–(3.7) можно решить вопрос о знаке λ , существенный для исследования второго уравнения (3.2).

Рассмотрим сначала случай $b < 0$. Из условия положительности давления и соотношения (1.5) следует $0 < x < 1$, так что (3.6) представляется гипергеометрическим рядом [4]. Соотношение (3.7) может быть выполнено только в том случае, если гипергеометрический ряд имеет нули в промежутке $(0, 1)$. Если $\lambda/b > 0$ и $\mu < 0$, гипергеометрический ряд с комплексно-сопряженными σ_1 и σ_2 является знакоопределенным и не имеет нулей в промежутке $(0, 1)$. Если $\lambda/b > 0$ и $\mu > 0$, то при вещественных σ_1 и σ_2 , согласно теореме Клейна о нулях гипергеометрической функции [5], $F(a_1, a_2; a_3; z)$ не имеет нулей в промежутке $(0, 1)$, если выполняется условие

$$\frac{1}{2}(|a_1 - a_2| - |a_3 - a_1 - a_2| - |1 - a_3| + 1) \leq 1 \quad (3.8)$$

Подставляя (3.6) в (3.8), можно видеть, что при $\lambda/b > 0$ нулей нет. Таким образом, при $b < 0$ соотношение (3.7) может выполняться лишь при условии $\lambda/b < 0$ ($\lambda > 0$).

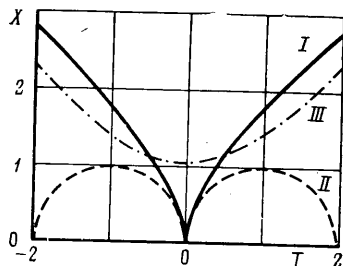
В случае $b > 0$ значения переменной x не заключены в промежутке $(0, 1)$. Поэтому перейдем к переменной $e = x/(x-1)$ и преобразуем (3.6) к виду

$$y = (1-e)^{-\sigma_1} F(\sigma_3/2 + \sqrt{\mu}, \sigma_3/2 + \sqrt{\mu}; \sigma_3; e) \quad (3.9)$$

Применяя снова соотношение (3.8) ($0 < e < 1$), можно видеть, что при $\lambda/b < 0$ (3.9) не имеет нулей, т. е. и в случае $b > 0$ (3.7) имеет корни лишь среди положительных λ . В том, что корни (3.7) вообще существуют, можно убедиться, рассматривая (3.6) при больших λ , когда справедливо асимптотическое соотношение, связывающее гипергеометрические функции и функции Бесселя [6].

Перейдем к анализу второго уравнения (3.2). При $B \neq 0$ величина dR/dt не постоянна (ср. с (2.4)), а вид зависимости $R(t)$ определяется знаками постоянных A и B в (1.6) (подробный анализ см. в [1]). Фигура иллюстрирует эту зависимость для трех возможных случаев: I ($A > 0, B > 0$), II ($A < 0, B > 0$), III ($A > 0, B < 0$) при $\nu = 3$ и $\gamma = 5/3$. По осям графиков на фигуре отложены величины $X = |A/B|^{1/N} R$ и $T = |A|^{1/2} |A/B|^{1/N} t$.

При дискретных значениях γ , задаваемых формулой (2.10), уравнение для α удается проинтегрировать в элементарных функциях



$$\alpha_n = \left[\frac{1}{\tau(\theta)} \frac{d}{d\theta} \right]^k \sin(\omega_n \theta + \delta) \quad (3.10)$$

$$(k=0, 1, \dots); \quad u^{(n)} \sim R^{-1} \alpha_n$$

$$\tau = \left(\frac{|B|}{|A|} \right)^{1/2} R^{-N/2}, \quad (3.11)$$

$$\omega_n^2 = \frac{4\kappa_n}{N^2 |B|} - \frac{B}{|B|} \left(\frac{1}{N} - \frac{1}{2} \right)^2$$

$$\theta = \operatorname{ar sh} \tau, \quad \vartheta = \operatorname{arch} \tau, \quad \phi = \operatorname{arc sin} \tau \quad (3.12)$$

где выражения для θ соответствуют случаям I, II, III; во всех случаях θ монотонно растет при сжатии газа.

При произвольных γ решение второго уравнения (3.2) можно представить в виде гипергеометрической функции либо в виде функций Лежандра $P_\beta^\mu(z)$ и $e^{i\mu\pi} Q_\beta^\mu(z)$ [4]

$$\alpha_n = F\left(a+g, a-g; \frac{1}{N}; \varphi\right), \quad \varphi = -\left(\frac{B}{A}\right) R^{-N} \quad (3.13)$$

$$a = \frac{1}{2N} - \frac{1}{4}, \quad g = i\left(\frac{\kappa_n}{BN^2} - a^2\right)$$

$$\alpha_n = R^{1/2(1-N)} P_\beta^{1-1/N}(z), \quad z = 1 + \left(\frac{B}{A}\right) R^{-N}, \quad \beta = -\frac{1}{2} + 2ig \quad (3.14)$$

Характер решения (3.13) можно представить, рассматривая возмущения с большими λ_n и применяя асимптотическую формулу для гипергеометрической функции при больших значениях параметров [4]

$$\begin{aligned} & [(1-z)/2]^{-(a+g)} F[a+g, a-c+1+g; a-b+1+2g; 2(1-z)^{-1}] \sim \\ & \sim e^{-(a+g)\xi} (1-e^{-\xi})^{-c+1/2} (1+e^{-\xi})^{c-a-b-1/2}; \quad \xi = \ln(z + \sqrt{z^2-1}) \end{aligned} \quad (3.15)$$

где $|g|$ — большая величина; в правой части опущен несущественный в данной ситуации постоянный множитель. Для применения (3.15) к (3.13) надо совершить линейные преобразования функции (3.13)

$$\alpha_n \sim (1-\varphi)^{-(a+g)} F\left[a+g, a + \frac{1}{2} + g; 1+2g; (1-\varphi)^{-1}\right] \quad (3.16)$$

$$\alpha_n \sim (-\varphi)^{-(a+g)} F\left(a+g, \frac{1}{2} - a+g; 1+2g; \varphi^{-1}\right) \quad (3.17)$$

Формула (3.16) относится к случаю II, (3.17) — к I, III. Применяя соотношение (3.15) к (3.16), (3.17), после некоторых элементарных преоб-

разований получим

$$\alpha_n \sim \tau^{-1/N+1/2} \sin(\omega_n \vartheta + \delta); \quad u^{(n)} \sim R^{-i/n-N/4} \sin(\omega_n \vartheta + \delta) \quad (3.18)$$

где τ , ω_n и ϑ определены соотношениями (3.11), (3.12).

Рассматривая возмущения с любыми λ_n при больших степенях сжатия ($\varphi \gg 1$) на основе асимптотической формулы [4]

$$F(a_1, a_2; a_3; z) = c_1 z^{-a_1} + c_2 z^{-a_2} \quad (z \rightarrow \infty) \quad (3.19)$$

также придем к выражению (3.18) (в случаях I и II). Тот же результат дает использование асимптотических выражений для функций Лежандра при больших λ_n [5].

И наконец, в случае $A=0$, когда замены переменных (3.11)–(3.13) не имеют смысла, второе уравнение (3.2) интегрируется в элементарных функциях при произвольных значениях параметров и дает для $u^{(n)}$ выражение вида (3.18) с $\vartheta = \ln(R^{-N/2})$.

Анализируя точное решение (3.10)–(3.12) и приближенные выражения (3.18), можно видеть, что для всех возмущений величины ω_n вещественны ($\lambda_n > 0$, причем из (3.4)–(3.9) следуют и более сильные неравенства, обеспечивающие положительность ω_n^2), т. е. временная зависимость возмущений имеет, как правило, колебательный характер. Частота колебаний увеличивается при сжатии газа $\sim R^{-N/2-1}$ и $\rightarrow \infty$ при неограниченном расширении газа; величина частоты тем больше, чем меньше пространственный масштаб возмущений. Во всех случаях коэффициенты при гармониках $\sin \omega_n \vartheta$ и $\cos \omega_n \vartheta$ содержат только отрицательные степени R . Таким образом, на отрезках времени, соответствующих сжатию газа в основном движении, имеет место колебательное нарастание искажений основного движения. Нарастание возмущений происходит на любой стадии и при любом режиме сжатия (при $B=0$ см. п. 2) в рамках решения (1.5), (1.6).

Раскачку колебаний на фоне сжатия можно объяснить тем, что в этом случае возмущение радиальной составляющей скорости приводит к смещению частицы в область течения, где отличие ее скорости от скорости основного движения оказывается еще большим (при расширении, естественно, наоборот).

4. Рассмотрим устойчивость движения (1.5), (1.6) при $B \neq 0$ по отношению к возмущениям произвольной пространственной структуры. Исследование решений системы (1.11), (1.12) проведем для случая, когда в основном движении плотность ρ^0 не зависит от координаты ($\psi = h\xi^2$). Тогда $\beta=0$, $E=-G$, $D=\partial/\partial\eta + \nu - 2$ (см. (1.14), (1.11), (1.15)) и, исключая W и H из (1.11), (1.12), придем к уравнению

$$L^2 G = L \left[\gamma \left(D \frac{\partial}{\partial \eta} + \Delta_1 \right) (qG) - b(\nu - 2)G \right] - b^2 \Delta_1 G \quad (4.1)$$

Разделение переменных в (4.1) приводит к уравнениям (в обозначениях п. 2)

$$\gamma \left(D \frac{d}{d\eta} - a^2 \right) (q\chi) + \lambda\chi = 0 \quad (4.2)$$

$$L^2 \alpha + [\lambda + b(\nu - 2)] L \alpha - b^2 a^2 \alpha = 0 \quad (4.3)$$

Решения уравнения (4.2) для радиальной части возмущений рассмотрим, только при $B < 0$ для газа, граничащего с пустотой (см. п. 2), когда удастся выписать явные выражения для значений λ_n

$$\chi = q^{-1} \xi^{-\nu/2+1+M} P_n^{-1,M}(z), \quad z = -2hb\xi^2/C - 1 \quad (4.4)$$

$$\lambda_n = (-b) 2\gamma n(n+M), \quad M = [(\nu/2-1)^2 + a^2]^{1/2}$$

в случае $\nu=3$ при $a^2=l(l+1)$ имеем $M=l+1/2$.

Оператор, стоящий в левой части уравнения (4.3), факторизуется следующим образом:

$$(L+\kappa_n^{(1)})(L+\kappa_n^{(2)})\alpha_n=0 \quad (4.5)$$

$$\kappa_n^{(1,2)} = \frac{1}{2} \{ \lambda_n + b(\nu-2) \pm \sqrt{[\lambda_n + b(\nu-2)]^2 + 4a^2b^2} \} \quad (4.6)$$

Уравнение (4.5) сводится к двум уравнениям вида (3.2), решения которого рассмотрены в п. 3. Корень $\kappa_n^{(1)}$ в (4.6) соответствует колебательной неустойчивости и переходит в (3.3) при $a=0$. Корень $\kappa_n^{(2)}$ существует лишь при $a \neq 0$ (при этом обязательно $b \neq 0$) и для возмущений с достаточно большими a дает монотонные моды неустойчивости процесса сжатия газа.

При расширении газа возмущения с любыми κ_n затухают. Для анализа поведения возмущений на стадиях, соответствующих расширению газа, следует перейти во втором уравнении (3.2) к переменным, обратным использованным в (3.11)–(3.13). Например, для получения асимптотического решения при $R \rightarrow \infty$ можно совершить линейное преобразование функции (3.13) к переменной $V = \varphi^{-1}$ (выражение (3.17)), что позволяет применить соотношение (3.19) и приводит к формуле $u^{(n)} = c_1 V^{-1} + c_2 V^{-1/N}$, из которой следует затухание возмущений при увеличении R .

5. Исследуем устойчивость неперидических движений гравитирующего газа с распределением скорости вида (1.1). При учете сил ньютоновского тяготения между частицами газа необходимо добавить в уравнение движения (1.2) член, соответствующий гравитационной силе, и дополнить систему уравнением для гравитационного потенциала Φ

$$\rho \left[\frac{\partial v_i}{\partial t} + \left(v_k - \frac{dR}{dt} y_k \right) \frac{1}{R} \frac{\partial v_i}{\partial y_k} \right] = - \frac{1}{R} \frac{\partial p}{\partial y_i} - \frac{\rho}{R} \frac{\partial \Phi}{\partial y_i} \quad (5.1)$$

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y_k \partial y_k} = 4\pi f \rho \quad (5.2)$$

Здесь f — гравитационная постоянная.

Для однородных газовых шаров основное решение системы (1.3), (1.4), (5.1), (5.2) имеет вид

$$v_i^0 = \frac{dR}{dt} y_i, \quad \rho^0 = \frac{2h}{R^3}, \quad p^0 = \frac{1}{R^{3\nu}} \left[C + \frac{3(\gamma-1)}{2} B h \xi^2 \right] \quad (5.3)$$

$$\Phi^0 = \frac{4\pi f h}{3} R^{-1} \xi^2, \quad \frac{dR}{dt} = \pm \left[A + B R^{-3(\gamma-1)} + \frac{16\pi f h}{3} R^{-1} \right]^{1/2} \quad (5.4)$$

При $\gamma > 4/3$ и некоторых ограничениях на величины A и B [1] это решение описывает периодические пульсации, устойчивость которых исследовалась в [2]. При $\gamma = 4/3$ решение (5.3), (5.4) соответствует неперидическим движениям газа. Рассмотрим устойчивость таких движений.

Налагая на решение (5.3), (5.4) малые возмущения и линеаризуя по ним, приходим после преобразований к системе уравнений, аналогичной (1.11), (1.12), но содержащей на одно уравнение и одно неизвестное больше. Эта система сводится к уравнению вида

$$L^2 G = L \left[\gamma \left(D \frac{\partial}{\partial \eta} + \Delta_1 \right) (qG) - \left(\frac{B}{2} - 8\pi f h \right) G \right] - \frac{B^2}{4} \Delta_1 G \quad (5.5)$$

которое разделяется на уравнения (2.2) и (4.2) для угловой и радиальной частей возмущений и уравнение (4.5) для $\alpha_n(t)$, где

$$\kappa_n^{(1,2)} = \left(\frac{\lambda_n}{2} + \frac{B}{4} - 4\pi f h \right) \pm \left[\left(\frac{\lambda_n}{2} + \frac{B}{4} - 4\pi f h \right)^2 + \frac{a^2 B^2}{4} \right]^{1/2} \quad (5.6)$$

Угловая часть возмущений имеет вид сферических гармоник, радиальная часть величины G выражается через полиномы Якоби (4.4) при λ_n , определенных соотно-

шением (5.7) ($B < 0$)

$$\chi = q^{-1} \xi^l P_n^{-1, l+1/2}(z), \quad z = -\frac{Bh}{C} \xi^2 - 1, \quad q = \frac{B}{4} + \frac{C}{2h} \frac{1}{\xi^2}$$

$$\lambda_n = (-B)^4 / 3n(n+l+1/2) \quad (5.7)$$

Таким образом, зависимость возмущений скорости от времени, определяемая фактором $u^{(n)}(t)$, описывается формулами (3.10)–(3.12), (3.18), в которых λ_n вычисляется на основе (5.6), (5.7). Сравнение (5.6) и (4.6) показывает, что влияние гравитации на поведение возмущений может быть существенным для гармоник с небольшими n и l (в частности, для сферических возмущений с $l=0$ колебательные моды могут превращаться в монотонные).

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. М.: Наука, 1981. 447 с.
2. Сибгатуллин Н. Р. Об устойчивости однородных нелинейных пульсаций гравитирующих газовых шаров.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 4, с. 14–20.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. М.: Наука, 1974. 295 с.
4. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. М.: Наука, 1973. 294 с.
5. Гобсон Е. В. Теория сферических и эллипсоидальных функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1952. 476 с.
6. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Ч. 1. М.: Изд-во иностр. лит., 1949. 798 с.

Пермь

Поступила в редакцию
29.VI.1984