

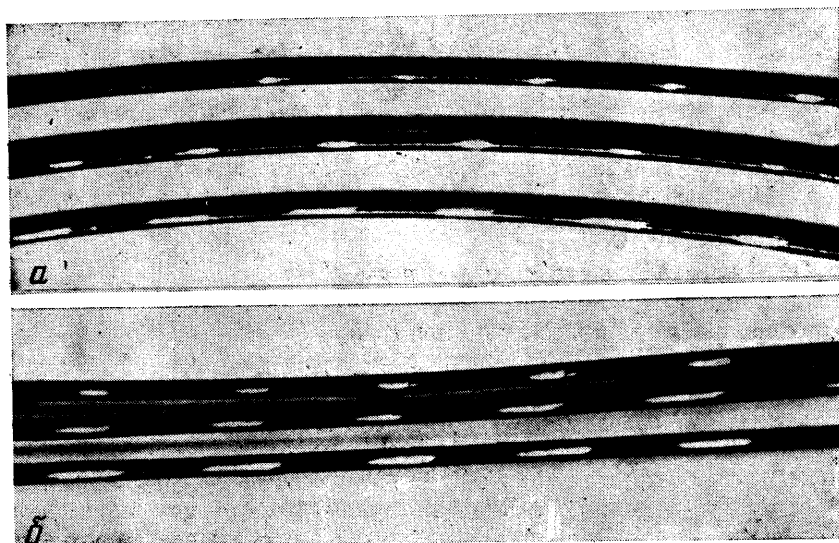
УДК 532.595

КОЛЕБАНИЯ СИСТЕМЫ ДВУХ КОАКСИАЛЬНЫХ ЦИЛИНДРОВ С ЖИДКОСТЬЮ МЕЖДУ НИМИ

ЗЕЛЕЗЕЦКИЙ В. Л., ТУМИН И. М.

Рассматривается задача о колебаниях системы двух коаксиальных цилиндров с жидкостью между ними. Подобная система встречается в различных областях техники [1, 2]. В частности, она представляет практический интерес в технологии нанесения полимерных покрытий. При этом внутренний цилиндр движется в направлении своей оси, а внешний выполняет роль калибрующего устройства, на вход которого подается раствор полимера. Одним из основных параметров процесса является толщина жидкой полимерной пленки, остающаяся на внутреннем цилиндре после его выхода из внешнего. Толщина пленки из-за вибраций системы может оказаться периодически неоднородной, как это показано на фиг. 1.

Ниже приближенными методами получены аналитические выражения для основных физических характеристик колебаний такой системы. Отметим, что обыч-



Фиг. 1

но принимаемые допущения о малости амплитуды колебаний и заданном законе движения одного цилиндра относительно другого [3, 4] в данном случае неприемлемы, так как амплитуда колебаний может быть соизмерима с величиной зазора, а закон колебаний не может задаваться произвольно, поскольку он определяется условиями процесса.

Рассмотрены системы с закрепленным и свободным внешними цилиндрами. Показано, что для системы с закрепленным внешним цилиндром имеет место зависимость средней объемной скорости течения жидкости через зазор между цилиндрами Q от частоты колебаний ω . Вначале с ростом ω величина Q растет от $Q=Q_0$ при $\omega=0$ и достигает максимума при некотором значении ω , а затем уменьшается и асимптотически стремится к некоторой постоянной величине $Q_1 > Q_0$. В принципе возможно создание высокопроизводительного насоса на базе системы таких колеблющихся цилиндров. Для системы со свободным внешним цилиндром Q

практически не зависит от ω , т. е. $Q \approx Q_0 = \text{const}$. Экспериментальные исследования качественно подтвердили справедливость теоретических зависимостей и показали удовлетворительное количественное согласие.

1. Движение жидкости в кольцевом канале между цилиндрами описывается системой уравнений Навье — Стокса в цилиндрической системе координат. Для упрощения задачи ниже принимаются обычные допущения развитого течения [5] вдоль оси z , т. е.

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial v_i}{r \partial \varphi} \ll \frac{\partial v_i}{\partial r}, \quad \frac{\partial^2 v_i}{r^2 \partial \varphi^2} \ll \frac{\partial^2 v_i}{\partial r^2}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial v_i}{\partial z} = 0 \quad (i=r, \varphi, z)$$

и далее рассматривается система уравнений

$$\frac{\partial p}{\partial r} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v_\varphi}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \varphi} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial v_\varphi}{r \partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} \right) \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 v_z}{r \partial r} \right) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_\varphi}{r \partial \varphi} = 0 \quad (1.4)$$

Здесь p — давление в жидкости; r, φ, z — координаты цилиндрической системы; v_r, v_φ, v_z — составляющие вектора скорости жидкости; ρ — плотность жидкости; ν — кинематическая вязкость; t — время.

Для приложений необходимо рассмотреть два варианта задачи. В первом варианте внешний цилиндр закреплен и система координат привязана к его оси. Граничные условия на поверхности внутреннего цилиндра, описываемой выражением $r=r_1(t, \varphi) = (R_1^2 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} - \varepsilon \cos \varphi$, будут иметь вид

$$v_z = u, \quad v_r = \varepsilon' \cos \varphi, \quad v_\varphi = -\varepsilon' \sin \varphi, \quad \varepsilon' = \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (1.5)$$

На поверхности внешнего цилиндра $r=R_2$

$$v_z = 0, \quad v_r = 0, \quad v_\varphi = 0 \quad (1.6)$$

Здесь u — скорость движения внутреннего цилиндра вдоль своей оси относительно внешнего цилиндра, R_1 и R_2 — радиусы внутреннего и внешнего цилиндров соответственно, $\varepsilon(t)$ — расстояние между осями внутреннего и внешнего цилиндров. Колебания внутреннего цилиндра происходят в одной плоскости, относительно которой отсчитывается угол φ .

Функция $\varepsilon(t)$, входящая в граничные условия, неизвестна. Для ее определения необходимо ввести дополнительное условие, которое можно получить, рассматривая внутренний цилиндр как колеблющуюся струну с точкой закрепления в месте расположения внешнего цилиндра. Тогда сила действия внутреннего цилиндра на жидкость в зазоре равна силе действия струны на точку закрепления. Она приравнивается гидродинамической силе действия жидкости на внутренний цилиндр, т. е.

$$\pi \frac{T}{\lambda} A \sin \omega t = L \int_0^\pi p(t, \varphi) (R_1 \cos \varphi - \varepsilon \cos 2\varphi) d\varphi \quad (1.7)$$

Здесь T, λ, A и ω — натяжение, длина волны колебаний, амплитуда и частота колебаний струны, L — длина внешнего цилиндра.

Во втором варианте внешний цилиндр подвижен в плоскости, перпендикулярной оси z , а система координат привязана к оси внутреннего цилиндра. В этом случае граничные условия на поверхности внутреннего цилиндра $r=R_1$ имеют вид

$$v_z=u, \quad v_r=0, \quad v_\varphi=0 \quad (1.8)$$

На поверхности внешнего цилиндра $r=r_2(t, \varphi) = (R_2^2 - \varepsilon^2 \sin^2 \varphi)^{1/2} - \varepsilon \cos \varphi$ будем иметь

$$v_z=0, \quad v_r=-\varepsilon' \cos \varphi, \quad v_\varphi=\varepsilon' \sin \varphi \quad (1.9)$$

Условием для нахождения функции $\varepsilon(t)$ будет равенство инерционной силы колебания внешнего цилиндра и гидродинамической силы

$$M \frac{d^2}{dt^2} (B \sin \omega t + \varepsilon) = 2L \int_0^\pi p(t, \varphi) (R_2 \cos \varphi - \varepsilon \cos 2\varphi) d\varphi \quad (1.10)$$

где M — масса внешнего цилиндра, B — амплитуда колебаний внутреннего цилиндра в месте расположения внешнего цилиндра.

2. Задача (1.1)–(1.7) решается следующим образом. Приближенное решение уравнения (1.2) находится в предположении допустимости представления $p(t, \varphi) = p_1(t, \varphi) + p_2(t, \varphi)$ такого, что

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial p_1}{r \partial \varphi} = \frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2} + \frac{\partial v_\varphi}{r \partial r} - \frac{v_\varphi}{r^2} \quad (2.1)$$

$$p_2(t, \varphi) = - \frac{\dot{\rho}}{R_2 - r_1} \int_{r_1}^{R_2} r \left(\int \frac{\partial v_\varphi}{\partial t} d\varphi \right) dr \quad (2.2)$$

где μ — динамическая вязкость.

Из (2.1) с учетом граничных условий (1.5), (1.6) следует

$$v_\varphi = \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} \left(r \ln \frac{r}{R_2} - x_1 r_1 \ln \frac{r_1}{R_2} \right) - \varepsilon' x_1 \sin \varphi$$

$$x_1 = \frac{R_2 r^{-1} - r R_2^{-1}}{R_2 r_1^{-1} - r_1 R_2^{-1}} \quad (2.3)$$

Интегрирование уравнения (1.4) по r в пределах от r_1 до R_2 , а затем по φ с учетом (2.3) приводит к уравнению

$$\frac{R_2^2}{\mu r_1} \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} \left[\left(\frac{r_1}{R_2} \ln \frac{r_1}{R_2} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(1 - \frac{r_1^2}{R_2^2} \right)^2 \right] =$$

$$= \left(1 - \frac{r_1^2}{R_2^2} - 2 \ln \frac{r_1}{R_2} \right) \varepsilon' \sin \varphi \quad (2.4)$$

из которого находится выражение для $\partial p_1 / \partial \varphi$.

Введение параметра $\Delta = (R_2 - R_1) / R_2$, который полагается малым, позволяет в последующих выкладках исключать величины высоких порядков малости относительно Δ . Кроме того, удобно перейти к безразмерной форме искомой функции

$$y(t) = \frac{\varepsilon(t)}{R_2 - R_1}, \quad -1 \leq y(t) \leq 1, \quad y' = \frac{dy}{dt}, \quad y'' = \frac{d^2 y}{dt^2}$$

Тогда из (2.4) следует

$$p_1 = -2\mu(1 - w_1 \Delta) (w_1 \Delta)^{-2} y', \quad w_1 = 1 + y \cos \varphi \quad (2.5)$$

Из (2.2) с учетом (2.3) можно получить

$$p_2 = -\frac{1}{3} \rho R_2^2 \left\{ \frac{y''}{y} \left[2 - \frac{1}{4} w_1 \Delta (5 - 3 \ln w_1) \right] + \left(\frac{y'}{y} \right)^2 \left[w_1^{-1} - 3 - 2\Delta + \frac{1}{2} w_1 \Delta \left(\frac{7}{2} - 3 \ln w_1 \right) \right] \right\} \quad (2.6)$$

Подстановка выражений (2.5) и (2.6) в (1.7) дает уравнение для искомой функции $y(t)$

$$\frac{AT}{LR_1 \lambda \omega} \cos \omega t + \frac{2\mu}{\Delta^2 (1-y^2)^{1/2}} y + \frac{1}{12} R_2^2 \Delta \rho y' + \frac{1}{3} \rho R_2^2 \int \frac{1 - (1-y^2)^{1/2}}{y^3 (1-y^2)^{1/2}} (y')^2 dt = 0 \quad (2.7)$$

Можно показать, что удовлетворительным приближением для точного решения уравнения (2.7) среди множества периодических функций будет

$$y = \frac{y_1 \sin(\omega t + \psi)}{[1 + y_1^2 \sin^2(\omega t + \psi)]^{1/2}} \quad (2.8)$$

где y_1 является решением алгебраического уравнения

$$y_1^2 - \left(\frac{\omega_1}{\omega} \right)^2 = a^2 \left(\frac{1 - y_1^2}{y_1^2} \right)^2 \quad (2.9)$$

$$a = 4,1 \cdot 10^{-2} \frac{AR_2 T \Delta^4 \rho}{L \lambda \mu^2}, \quad \omega_1 = \frac{AT \Delta^2}{4,1 LR_2 \lambda \mu}, \quad \psi = \arctg \frac{6y_1^2 \mu}{R_2^2 \Delta^2 \rho \omega (1 - y_1^2)}$$

При решении уравнения (1.3) принимается следующее упрощающее допущение:

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} \approx \frac{1}{R_2 - r_1} \int_{r_1}^{R_2} \frac{\partial v_z}{\partial t} dr = \frac{4uv}{R_2^2 - r_1^2} f_1(t, \varphi) \quad (2.10)$$

С учетом (2.10) и соответствующих граничных условий (1.5), (1.6) решение уравнения (1.3) будет иметь вид

$$v_z = u \left[(1 - f_1) \frac{\ln r R_2^{-1}}{\ln r_1 R_2^{-1}} + f_1 \frac{R_2^2 - r^2}{R_2^2 - r_1^2} \right]$$

$$f_1 = \frac{R_2^2 (1 + w_1 \Delta) y' \cos \varphi}{w^4 [4v + (1 + w_1 \Delta) (R_2 w_1)^2 \Delta^3 y' \cos \varphi]}$$

Экспериментально наблюдаемыми величинами могут быть средняя объемная скорость течения жидкости через зазор между цилиндрами

$$Q = \frac{2}{t} \int_0^t \int_0^\pi \int_{r_1}^{R_2} v_z r dr d\varphi dt \quad (2.11)$$

и толщина жидкой пленки h , остающаяся на поверхности внутреннего цилиндра после его выхода из внешнего, которая находится из равенства

$$2 \int_{r_1}^{R_2} v_z r dr = u [(R_1 + h(t, \varphi))^2 - R_1^2] \quad (2.12)$$

Для величины Q из (2.11) получается выражение

$$k = \frac{1}{8} \left\{ \frac{(1 + y_1^2)^{1/2} - 1}{y_1^2} \frac{Q = \pi u R_2^2 \Delta (1 + k)}{4 + 3y_1^2} \frac{1}{8(1 + y_1^2)^{1/2} [1 - (1 + \Delta) (a y_1 \omega)^2 \omega_1^{-2}]} \right\} \quad (2.13)$$

Чувствительной к изменению параметров эксперимента является толщина пленки h в плоскости колебаний ($\varphi=0$). Из равенства (2.12) в первом приближении имеем

$$h(t) = \frac{1}{2}(R_2 - R_1)(1+k)(1+y(t)) \quad (2.14)$$

что в принципе позволяет сравнивать экспериментально получаемую функцию $h(t)$ с расчетной.

Из анализа выражения (2.13) следует принципиальная возможность создания насоса с любой заданной производительностью на базе системы колеблющихся коаксиальных цилиндров. Для этого параметры системы должны быть подобраны так, чтобы выполнялось условие

$$(1+\Delta) \left(ay_1 \frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 = 1 + \delta$$

где $\delta > 0$ — малая величина.

Анализ формулы (2.9) показывает, что в области малых частот ($\omega \leq \omega_1$) скорость движения внутреннего цилиндра пропорциональна приложенной силе, стоящей в левой части уравнения (1.7). Это хорошо известная зависимость в гидродинамике медленных движений [6]. Можно показать, что этот же результат получится, если в уравнении (1.2) отбросить член $\partial v_\varphi / \partial t$, т. е. при $\omega \leq \omega_1$ задачу можно рассматривать как квазистационарную.

В области больших частот ($\omega > \omega_1$) при достаточно большой вязкости μ жидкость в зазоре ведет себя как твердое тело.

3. Для решения задачи (1.1)–(1.4), (1.8)–(1.10) используется тот же алгоритм, что и для предыдущей. Ниже приведены окончательные выражения, аналогичные (2.3), (2.5), (2.6), (2.7)

$$\begin{aligned} v_\varphi &= x_2 \varepsilon' \sin \varphi + \frac{1}{2\mu} \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} \left(r \ln \frac{r}{R_1} - x_2 r_2 \ln \frac{r_2}{R_1} \right) \\ p_1 &= 2\mu \frac{1-\Delta}{\Delta} \left[\frac{1}{2} (1-\Delta) w_3 + (1+\Delta) w_4 \right] y' \\ p_2 &= -\frac{1}{3} R_1^2 w_2 \rho \left\{ \frac{y''}{y} \left[\frac{1}{2} w_2 w_3 + (w_2 - 3) w_4 \right] - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{y'}{y} \right)^2 \left[\frac{1}{2} w_2 w_3 + (w_2 - 3) w_4 + (1 + y^2 \cos^2 \varphi)^{-1} \right] \right\} \\ M \frac{d^2}{dt^2} (B \sin \omega t + R_2 y \Delta) &= 4LR_1 \frac{\pi\mu}{\Delta^2} \{ g_1 - 2\Delta [2 - (1 + y^2)^{1/2}] \} y' - \\ &\quad - \frac{2}{3} LR_1^2 R_2 \pi \rho \left\{ \left[g_1 + g_2 + g_3 + \frac{1}{6} y^2 - \left(2 - \frac{1}{3} y^2 \right) g_4 \right] y'' - \right. \\ &\quad \left. - \left[g_1 + g_2 + g_3 + \frac{1}{6} y^2 - \left(2 - \frac{1}{3} y^2 + (1 + y^2)^{-1/2} \right) g_4 \right] \frac{(y')^2}{y} \right\} \\ x_2 &= \frac{rR_1^{-1} - R_1 r^{-1}}{r_2 R_1^{-1} - R_1 r_2^{-1}}, \quad w_2 = 1 - y \cos \varphi \\ w_3 &= \ln \frac{1 + (y \cos \varphi)^2}{(1 - y \cos \varphi)^2}, \quad w_4 = \arctg (y \cos \varphi) \\ g_1 &= \frac{(1 + y^2)^{1/2} - (1 - y^2)^{1/2}}{y^2}, \quad g_2 = \ln \frac{1 + (1 - y^2)^{1/2}}{1 + (1 + y^2)^{1/2}} \end{aligned} \quad (3.1)$$

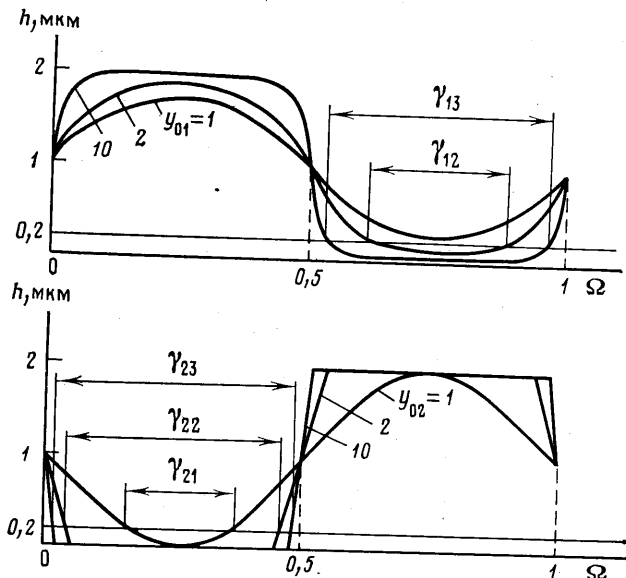
$$g_3 = \frac{2}{3} \frac{(1-y^2)^{1/2} - 1}{y^2}, \quad g_4 = \frac{(1+y^2)^{1/2} - 1}{y^2}$$

После упрощения и интегрирования равенства (3.1) для искомой функции $y(t)$ получается уравнение

$$\beta y' - \omega_2 y + \frac{B\omega}{R_2 \Delta} \cos \omega t = 0 \quad (3.2)$$

$$\beta = 1 + b(2-c), \quad \omega_2 = 4 \frac{LR_1 \pi \mu}{MR_2 \Delta^3}$$

$$b = \frac{LR_1^2 \pi \rho}{3M\Delta}, \quad c = \left(\frac{B}{R_2 \Delta} \right)^2 \frac{\omega^2}{\omega^2 + \omega_2^2}$$



Фиг. 2

Из (3.2) в первом приближении находим

$$y(t) = y_2 \sin(\omega t + \psi), \quad |\sin(\omega t + \psi)| \leq \frac{1}{y_2} \quad (3.3)$$

$$y(t) = 1, \quad |\sin(\omega t + \psi)| > \frac{1}{y_2}$$

$$y_2 = \frac{B\omega}{R\Delta} (\beta^2 \omega^2 + \omega_2^2)^{-1/2}, \quad \psi = \text{arctg} \left(-\frac{\omega_2}{\beta \omega} \right)$$

Необходимо отметить принципиальное отличие этой задачи от предыдущей. Если в задаче (1.1)–(1.7) при достаточно малых частотах колебаний систему можно было рассматривать как квазистационарную, то здесь это недопустимо ни при каких частотах.

Из уравнения (1.3) находим

$$v_2 = u \left[f + \frac{1}{8} f_2 v^{-1} (R_1^2 f + r_2^2 - r^2) \right]$$

$$f = \ln r r_2^{-1} / \ln R_1 r_2^{-1}, \quad f_2(t, \varphi) = y' (1 - y \cos \varphi)^{-1} \cos \varphi$$

Для величины средней объемной скорости течения жидкости через за-

зор между цилиндрами из (2.11) следует

$$Q = \pi \Delta u R_2^2$$

а для толщины пленки из (2.12) получаем

$$h(t, \varphi) = \frac{1}{2} (R_2 - R_1) w_2 \left[1 + \frac{1}{16} R_2^2 \Delta^2 w_2 \omega v^{-1} (y_2^2 - y^2 \cos^2 \varphi)^{1/2} \right] \quad (3.4)$$

4. Экспериментальная проверка полученных закономерностей проводилась на промышленном агрегате для нанесения эмалевой изоляции на электропровод. При изучении вибрации было установлено, что основные частоты колебаний провода лежат в интервале от 1 до 50 Гц. Наиболее вредной является частота 10 Гц и поэтому она была выбрана для эксперимента. Основные технологические параметры проведения эксперимента были такими: $R_1 = 2 \cdot 10^{-4}$ м; $R_2 = 2,2 \cdot 10^{-4}$ м; $L = 5 \cdot 10^{-4}$ м; $\rho = 10^3$ кг/м³; $\mu = 1$ н·с/м²; $M = 4,5 \cdot 10^{-3}$ кг; $T = 7$ Н.

ij	γ_{ij}	γ_{ij}^*	ij	γ_{ij}	γ_{ij}^*
11	0	0,10	21	0,18	0,22
12	0,30	0,25	22	0,38	0,40
13	0,45	0,50	23	0,48	0,50

В эксперименте, выполнявшемся на вибростенде ВЭДС-10А, проволоке сообщалась частота 10 Гц. Для закрепленного внешнего цилиндра амплитуда принимала значения $A = 2,8; 5,6; 28 \cdot 10^{-3}$ м, длина волны $\lambda = 7$ м; для подвижного внешнего цилиндра $B = 4,8; 9,7; 48,4 \cdot 10^{-4}$ м. При этом теоретические значения основных параметров были следующими: $\omega_1 = 62,1; 124,2; 621$ с⁻¹, $a = 5, 10, 50 \cdot 10^{-3}$, $\omega_2 = 1,3 \cdot 10^{-3}$ с⁻¹, $b = 4,7 \cdot 10^{-3}$; $c = 1,1; 4,4; 110$; $y_1 = y_2 = 1, 2, 10$.

Соответствующие расчетные профили толщины пленки $h(t)$ приведены на фиг. 2, где $\Omega = (\omega t + \varphi) / 2\pi$. Для системы с закрепленным внешним цилиндром на фиг. 2, а представлена функция $h(t) = 1 + y(t)$, определенная в (2.14). Функция $y(t)$ рассчитывается по формуле (2.8) при изменении $\omega t + \varphi$ от 0 до 2π . Для системы со свободным внешним цилиндром (фиг. 2, б) в соответствии с (3.4) $h(t) = 1 - y(t)$, где функция $y(t)$ рассчитывается по формуле (3.3).

Указанные на фиг. 2 величины интервалов γ_{ij} , где $h(t) \leq 0,2$, сопоставляются в таблице с экспериментальными данными γ_{ij}^* . Последние в эксперименте легко определяются как отношение длин светлых участков на проволоке к длине периода. Наблюдается удовлетворительное согласие теории с экспериментом.

На фиг. 1 представлены фотографии проводов, на которые наносилась эмалевая изоляция при вибрации проволоки с частотой 10 Гц при указанных выше амплитудах. Фиг. 1, а соответствует закрепленному внешнему цилиндру, фиг. 1, б — подвижному внешнему цилиндру. Светлые области на поверхности провода — области не покрытые лаком или покрытые пленкой лака, толщина которой меньше 0,2 мкм. Максимальная толщина пленки на проволоке 2 мкм. Величина периода функции $h(t)$ составляет 3,5 мм. Экспериментальный профиль толщины такой пленки получить не удалось, поэтому сравнение теории с экспериментом проведено по величинам γ_{ij} и γ_{ij}^* .

ЛИТЕРАТУРА

1. France P. W., Dunn P. L., Reeve M. H. Plastic Coating of glass fibers and its influence on strength.— *Fiber and Integr. Opt.*, 1979, v. 2, № 3–4, p. 267–286. Copyright 1979 Grance, Russak Company, Inc.
2. Привезенцев В. А., Пешков И. Б. Обмоточные и монтажные провода. М.: Энергия, 1971. 552 с.
3. Pathak R. P., Dubey R. K., Sharma R. G. A note on unsteady flow of a viscous fluid between two co-axial circular cylinders when one of them executes a pharmonic motion.— *Indian J. Theor. Phys.*, 1979, v. 27, № 4, p. 295–300.
4. Farah M. N. Laminare, instationäre Strömung im Ringraum zwischen zwei Röhren, von denen das innere harmonisch schwingt.— *ZAMM.*, 1981, B. 61, № 8, S. 365–377.
5. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. М.—Л.: Гостехиздат, 1951. 420 с.
6. Ханпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.

Москва

Поступила в редакцию
27.VII.1984