

УДК 532.593

МЕТОД ФАКТОРИЗАЦИИ В НЕУСТАНОВИВШИХСЯ ЗАДАЧАХ  
О ВОЗБУЖДЕНИИ ГРАВИТАЦИОННО-УПРУГИХ ВОЛН  
В ЖИДКОСТИ С ЧАСТИЧНО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

ЗОЛОТАРЕВ А. А., ЗОЛОТАРЕВА Л. И.

Развивается подход к решению неустановившихся задач со смешанными граничными условиями для слоя тяжелой жидкости. В качестве иллюстрации рассмотрена плоская задача о возбуждении волн смещениями, заданными в некоторой области нижней границы слоя, когда верхняя граница частично покрыта упругой пластиной. В отличие от [1, 2] предлагаемый подход дает возможность построить решение в виде суммы гармоник и выполнить аналитическое исследование характера распространения и установления волновых полей. При этом выделены пространственно-временные области формирующихся и сформировавшихся волновых пакетов.

Математическая постановка задачи имеет вид

$$\partial \mathbf{V} / \partial t = -\rho_*^{-1} \nabla q, \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = 0, \quad -\infty < x, y < \infty, \quad -H \leq z \leq 0 \quad (1)$$

$$q = \rho_* g \zeta, \quad (x, y) \in \Omega; \quad q = \rho_* g \zeta + \Pi \zeta, \quad (x, y) \in \Omega, \quad z = 0 \quad (2)$$

$$\Pi = d_0 \nabla^4 + \rho_0 h \partial^2 / \partial t^2$$

$$w = \partial \zeta / \partial t, \quad z = 0$$

$$R = M_n = M_\tau = 0, \quad (x, y) \in \partial \Omega, \quad z = 0$$

$$w = \partial f(\mathbf{X}, t) / \partial t, \quad (x, y) \in D; \quad w = 0, \quad (x, y) \in D, \quad z = -H \quad (3)$$

$$u = v = w = f = \zeta = \partial \zeta / \partial t = 0, \quad t = 0 \quad (4)$$

$$\mathbf{V} = \{u, v, w\}, \quad \mathbf{X} = \{x, y\}$$

Здесь  $\{x, y, z\}$  — декартова прямоугольная система координат с началом на невозмущенной свободной поверхности жидкости, ось  $z$  направлена вертикально вверх;  $q$  — динамическая составляющая полного давления  $p$  в жидкости;  $\mathbf{V}$  — вектор скорости;  $\rho_*$  — плотность жидкости;  $H$  — толщина слоя жидкости;  $\zeta$  — возвышение свободной поверхности, совпадающее в области  $\Omega$ , занятой пластиной, с ее вертикальными смещениями;  $R$ ,  $M_n$  и  $M_\tau$  — перерезывающая сила, изгибающий и крутящий моменты на краю пластины  $\partial \Omega$ ;  $d_0$ ,  $\rho_0$ ,  $h$  — жесткость, плотность и толщина пластины соответственно;  $f(\mathbf{X}, t)$  — известные вертикальные смещения нижней границы слоя жидкости, отличные от нуля в области  $D$ ;  $t$  — время;  $g$  — ускорение силы тяжести.

Введем безразмерные переменные

$$x_1 = x/H, \quad y_1 = y/H, \quad z_1 = z/H, \quad \zeta_1 = \zeta/H, \quad f_1 = f/H$$

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}/c, \quad t_1 = tc/H, \quad c = \sqrt{gh}$$

$$p_1 = p/(\rho c^2), \quad q_1 = q/(\rho c^2)$$

$$d_1 = d_0/(\rho g H^4), \quad \rho_1 = \rho_0 h/(\rho_* H)$$

Далее используются лишь безразмерные переменные, а индексы 1 всюду опускаются.

Используя интегральные преобразования Лапласа по времени  $t$  и Фурье по горизонтальным координатам  $x, y$ , а также принцип суперпозиции решений для пластины и слоя жидкости, сведем задачу (1)–(4) к интегральному уравнению относительно искомого давления под пластиной

$$\int_{\Omega} p_L(\xi, s) k_1(X - \xi, s) d\xi = \psi(X, s) + \int_D f_L(\xi, s) k_0(X - \xi, s) d\xi \quad (5)$$

$$(x, y) \in \Omega, \quad \operatorname{Re} s \geq s^* > 0$$

$$p_L(X, s) = \int_0^{\infty} p(X, t) e^{-st} dt, \quad f_L(X, s) = \int_0^{\infty} f(X, t) e^{-st} dt$$

$$k_j(X, s) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} K_j(\alpha, s) e^{-i(\alpha \cdot X)} d\alpha, \quad j=0, 1$$

$$\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2\}, \quad \alpha = |\alpha| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$$

$$K_1(\alpha, s) = \frac{[1 + \rho \kappa_1^2(\alpha)][s^2 + \kappa_2^2(\alpha)]}{[s^2 + \kappa_1^2(\alpha)][\rho s^2 + d\alpha^4]}, \quad K_0(\alpha, s) = \frac{s^2}{\operatorname{ch} \alpha [s^2 + \kappa_1^2(\alpha)]}$$

$$\kappa_1^2(\alpha) = \alpha \operatorname{th} \alpha, \quad \kappa_2^2(\alpha) = \kappa_1^2(\alpha) \frac{1 + d\alpha^4}{1 + \rho \kappa_1^2(\alpha)}$$

где  $s^*$  — абсцисса сходимости преобразования Лапласа;  $\alpha$  — вектор волновых чисел с компонентами  $\alpha_1, \alpha_2$ ;  $p_L(X, s), f_L(X, s)$  и  $\psi(X, s)$  — трансформанты Лапласа  $p(X, t), f(X, t)$  и общего решения уравнения  $\Pi\psi=0$  соответственно. Если  $\Omega$  содержит бесконечно удаленную точку, то под  $\psi(X, s)$  понимается решение, удовлетворяющее условиям излучения волн на бесконечность.

Дальнейшее изложение методики решения проведем на примере плоской задачи и полуограниченной области  $\Omega: x \geq 0, -\infty < y < \infty$ . В формулах (5) векторы  $X, \xi$  следует заменить на скалярные переменные  $x, \xi$ . При этом функция  $\psi(x, s)$  имеет вид

$$\psi(x, s) = C_1(s) e^{-\lambda x} + C_2(s) e^{i\lambda x}, \quad x \geq 0; \quad \psi(x, s) = 0, \quad x < 0 \quad (6)$$

$$C_1(s) = (4d\lambda^3)^{-1} [(1-i)P_+(\lambda, s) - iP_+(i\lambda, s)]$$

$$C_2(s) = (4d\lambda^3)^{-1} [P_+(\lambda, s) + (1-i)P_+(i\lambda, s)]$$

$$P_+(\alpha, s) = \int_0^{\infty} p_L(x, s) e^{i\alpha x} dx$$

$$\lambda = (-\rho d^{-1} s^2)^{1/4}, \quad 0 \leq \arg \lambda < \pi/2$$

Коэффициенты  $C_1, C_2$  в (6) определены из краевых условий (2) на краю пластины  $\partial\Omega$ .

Продолжая уравнение (5) в область  $x < 0$  (внешнюю по отношению к  $\Omega$ ) функцией  $\varphi(x, s)$  и применяя преобразование Фурье по переменной  $x$ , сведем задачу к эквивалентному функциональному уравнению

$$P_+(\alpha, s) K_1(\alpha, s) + \Phi_-(\alpha, s) = \Psi_+(\alpha, s) + F(\alpha, s) K_0(\alpha, s) \quad (7)$$

$$\alpha \in E, \quad \operatorname{Re} s \geq s^* > 0$$

$$F(\alpha, s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_L(x, s) e^{i\alpha x} dx$$

$$\Psi_+(\alpha, s) = \int_0^{\infty} \psi(x, s) e^{i\alpha x} dx, \quad \Phi_-(\alpha, s) = \int_{-\infty}^0 \varphi(x, s) e^{i\alpha x} dx$$

где  $E$  — пересечение областей регулярности функций, входящих в уравнение (7).

Исследуем особенности функций  $K_1(\alpha, s)$  и  $K_0(\alpha, s)$ , определенных в (5). Для мнимых значений  $s = -i\sigma$  ( $-\infty < \sigma < \infty$ ) уравнение  $\kappa_j^2(\alpha) + s^2 = 0$  ( $j=1, 2$ ) имеет два действительных корня [3, 4]  $\alpha = \pm z_j(-i\sigma)$  и счетное множество комплексных корней  $\alpha = \pm i\eta_{j,k}(-i\sigma)$  ( $k=1, 2, \dots$ ), причем в случае  $j=1$  они чисто мнимые.

Если  $\text{Re } s > 0$ , то  $z_j(s)$ ,  $i\eta_{j,k}(s)$  принадлежат верхней полуплоскости  $\alpha$ . Для  $\alpha = z_j(s)$  обратные функции определяются явно:  $s = -i\kappa_j(\alpha)$ . Здесь знак корня в  $\kappa_j(\alpha)$  выбирается совпадающим со знаком переменной  $\alpha$  для ее действительных значений, что обеспечивает положение корня  $\alpha = z_j(s)$  в верхней полуплоскости для любого  $s$ , лежащего справа от мнимой оси ( $\text{Re } s > 0$ ).

Из свойств функций  $K_1(\alpha, s)$ ,  $K_0(\alpha, s)$  и анализа [5] особенностей остальных функций, входящих в (7), следует, что при  $\text{Re } s \geq s^* > 0$  функциональное уравнение (7) выполняется в общей полосе регулярности  $E$ , содержащей всю действительную ось  $\alpha$ , т. е. при  $-\infty < \text{Re } \alpha < \infty$ ,  $\gamma_- < \text{Im } \alpha < \gamma_+$ ;  $\gamma_- < 0 < \gamma_+$ .

В формулах (7) и ниже индексы плюс и минус означают регулярность соответствующих функций переменной  $\alpha$  соответственно в верхней ( $\text{Im } \alpha > \gamma_-$ ) и нижней ( $\text{Im } \alpha < \gamma_+$ ) полуплоскостях.

Дальнейшее решение задачи выполняется посредством факторизации уравнения (7) [6, 7], что позволяет представить решение в виде контурных интегралов. Так, для давления под пластиной и смещения поверхности жидкости имеем

$$p(x, t) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} \frac{G_+(\alpha, s)}{K_+(\alpha, s)} e^{st} ds d\alpha, \quad x \geq 0 \quad (8)$$

$$\xi(x, t) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \int_{\delta-i\infty}^{\delta+i\infty} Z(\alpha, s) e^{st} ds d\alpha, \quad -\infty < x < \infty \quad (9)$$

$$Z(\alpha, s) = F(\alpha, s) K_0(\alpha, s) + G_+(\alpha, s) K_+^{-1}(\alpha, s) K_2(\alpha, s)$$

$$K_2(\alpha, s) = -\frac{\kappa_1^2(\alpha)}{s^2 + \kappa_1^2(\alpha)}, \quad K_1(\alpha, s) = K_+(\alpha, s) K_-(\alpha, s)$$

$$\delta \geq s^* > 0$$

Функция  $G_+(\alpha, s)$  в (8), (9) может быть представлена в виде

$$G_+(\alpha, s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_+} \frac{F(\xi, s) K_0(\xi, s)}{K_-(\xi, s)} X(\xi, \alpha, s) d\xi \quad (10)$$

$$X(\xi, \alpha, s) = \frac{1}{\xi - \alpha} + \frac{i}{4d\lambda^3 \Delta(s)} \left[ \frac{\Delta_1(\xi, s)}{(\alpha + i\lambda) K_+(i\lambda, s)} + \frac{\Delta_2(\xi, s)}{(\alpha + \lambda) K_+(\lambda, s)} \right]$$

$$\Delta_1(\xi, s) = \frac{1-i}{(\xi - \lambda) K_+(\lambda, s)} - \frac{i}{(\xi - i\lambda) K_+(i\lambda, s)} + \frac{(\xi + \lambda)(\xi - \lambda)^{-1}(\xi - i\lambda)^{-1}}{8d\lambda^4 K_+^2(\lambda, s) K_+(i\lambda, s)}$$

$$\Delta_2(\xi, s) = \frac{1}{(\xi - \lambda) K_+(\lambda, s)} + \frac{1-i}{(\xi - i\lambda) K_+(i\lambda, s)} - \frac{(\xi + i\lambda)(\xi - \lambda)^{-1}(\xi - i\lambda)^{-1}}{8d\lambda^4 K_+(\lambda, s) K_+^2(i\lambda, s)}$$

$$\Delta(s) = 1 - \frac{i}{8d\lambda^4} \left[ \frac{1}{K_+^2(\lambda, s)} - \frac{4i}{K_+(\lambda, s) K_+(i\lambda, s)} - \frac{1}{K_+^2(i\lambda, s)} + \right]$$

$$+ \frac{1}{64d^2 \lambda^8 K_+(\lambda, s) K_+(i\lambda, s)}$$

Здесь бесконечный контур интегрирования  $\Gamma_+$  расположен в полосе регулярности  $E$  ниже действительной оси плоскости  $\alpha$ , что следует из возможности представления  $G_+$  интегралом Коши.

Таким образом, формулы (8), (9) с учетом (10) дают точное решение задачи (1) — (4), в плоской постановке.

Рассмотрим случай, когда задан гармонический закон смещения конечного отрезка нижней границы слоя жидкости

$$f(x, t) = \exp\{i[\eta(x - a_1) - \omega t]\}, \quad a_1 \leq x \leq a_2, \quad t > 0; \quad \omega > 0, \quad (11)$$

$$\eta = \text{Re } \eta + i \text{Im } \eta$$

Такой выбор функции смещения не сужает общности метода построения решения. Подставим соответствующую (11) трансформанту  $F(\alpha, s)$  в (10) и вычислим  $G_+(\alpha, s)$  по теореме о вычетах. При этом контур  $\Gamma_+$  замкнем в верхнюю или нижнюю полуплоскость так, чтобы обеспечить убывание экспонент подынтегрального выражения, поведение которых определяется положением возмущенного участка нижней границы (отрезка  $[a_1, a_2]$ ) относительно края пластины.

Например, для  $a_1, a_2 > 0$ , когда область смещения дна находится под пластиной, имеем

$$\zeta(x, t) = \frac{1}{4\pi^2 i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\alpha x} \int_{\delta - i\infty}^{\delta + i\infty} \frac{T(\alpha, s)}{s + i\omega} e^{st} ds d\alpha \quad (12)$$

$$T(\alpha, s) = [F_1(\alpha) + F_2(\alpha)] K_3(\alpha, s) + \frac{N(\alpha, s) K_+^{-1}(\alpha, s) K_2(\alpha, s)}{s^2}$$

$$K_3(\alpha, s) = \frac{1}{\text{ch } \alpha [1 + \rho \kappa_1^2(s)] [s^2 + \kappa_2^2(s)]}$$

$$N(\alpha, s) = \sum_{j=0}^2 N_j(\alpha, s), \quad N_0(\alpha, s) = \sum_{n=1}^{\infty} [F_1(\alpha_n) + F_2(\alpha_n)] T_n(\alpha, s)$$

$$N_j(\alpha, s) = F_j(z_2) T_0(\alpha, s), \quad j = 1, 2$$

$$T_n(\alpha, s) = \frac{s^2 K_+(\alpha_n, s) (d\alpha_n^4 + \rho s^2) X(\alpha_n, \alpha, s)}{2\omega \text{ch } \alpha_n [1 + \rho \kappa_1^2(\alpha_n)] \kappa_2'(\alpha_n)}$$

$$\alpha_0 = z_2(s), \quad \alpha_n = i\eta_{2, n}(s), \quad \kappa_2^2(\alpha_n) + s^2 = 0; \quad \delta \geq s^* > 0$$

$$\kappa_2' = \frac{d\kappa_2}{d\alpha_n}, \quad F(\alpha, s) = \frac{F_1(\alpha) + F_2(\alpha)}{s + i\omega}$$

$$F_j(\alpha) = \frac{(-1)^j i}{\alpha + \eta} \exp\{i[(\alpha + \eta)a_j - \eta a_1]\}$$

Вычислим внутренний интеграл в (12), учитывая, что подынтегральная функция имеет полюсы на мнимой оси  $s_0 = -i\omega$ ,  $s_1 = -i\kappa_1(\alpha)$ ,  $s_2 = -i\kappa_2(\alpha)$ . Далее выполним почленное интегрирование по  $\alpha$  каждого из полученных слагаемых, соответствующих вычетах в полюсах  $s_j$  ( $j = 0, 1, 2$ ). Для этого путь интегрирования по действительной оси заменим контуром  $\Gamma$ , совпадающим с действительной осью и обходящим точки  $\alpha = -z_2(-i\omega)$  и  $\alpha = z_1(-i\omega)$  по малым полуокружностям в верхней и нижней полуплоскостях. Выбранный контур  $\Gamma$  обеспечивает выполнение принципа предельной амплитуды [3].

Таким образом, выражение (12) эквивалентно следующему:

$$\zeta(x, t) = e^{-i\omega t} [I_0(x) + I_1(x, t) + I_2(x, t)]$$

$$I_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} T(\alpha, -i\omega) e^{-i\alpha x} d\alpha, \quad I_j(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} B_j(\alpha) e^{i\alpha x + \eta_j(\alpha, t)} d\alpha$$

$$\varphi_j(\alpha, t) = [\omega + (-1)^j \kappa_j] t x^{-1} - \alpha, \quad B_1(\alpha) = \frac{\kappa_1 N(\alpha, -i\kappa_1)}{2K_+(\alpha, -i\kappa_1)(\omega - \kappa_1)}$$

$$B_2(\alpha) = \frac{\kappa_2^2 [F_1(\alpha) + F_2(\alpha)] - \operatorname{ch} \alpha N(\alpha, i\kappa_2) K_-(\alpha, i\kappa_2) (\kappa_1^2 - \kappa_2^2)}{2\kappa_2 \operatorname{ch} \alpha (1 + \rho \kappa_1^2) (\omega + \kappa_2)}$$

$$\kappa_j = \kappa_j(\alpha), \quad j=1, 2$$

Стационарная составляющая решения находится с помощью теории вычетов. Главные части переменных во времени составляющих  $I_1$  и  $I_2$  выделяются посредством деформации контура  $\Gamma$  вблизи особых точек. Оценивая остатки методом стационарной фазы [4, 8], для возвышения свободной поверхности жидкости ( $x < 0$ ) находим

$$\zeta \sim \theta_1(x, t), \quad x < -c_1 t \quad (13)$$

$$\zeta = A_0 e^{-i(z_1 x + \omega t)} + \theta_1(x, t), \quad -c_1 t < x < -c_1(t - a_1/c_2)$$

$$\zeta = (A_0 + A_1) e^{-i(z_1 x + \omega t)} + \theta_1(x, t), \quad -c_1(t - a_1/c_2) < x < -c_1(t - a_2/c_2)$$

$$\zeta = (A_0 + A_1 + A_2) e^{-i(z_1 x + \omega t)} + \theta_1(x, t), \quad -c_1(t - a_2/c_2) < x \leq 0$$

$$c_j = \kappa_j'(z_j), \quad z_j = z_j(-i\omega), \quad A_j = -\frac{i\omega N_j(z_j, -i\omega)}{2c_2 K_+(z_j, -i\omega)}$$

$$\theta_1(x, t) = O(|x|^{-\nu}) + \begin{cases} O(|x + a_j|^{-\mu}), & |x + a_j| \rightarrow \infty \\ O(t^{-1}), & |x + a_j| \leq \text{const}, \quad t \rightarrow \infty \end{cases}, \quad 1/3 \leq \mu, \nu \leq 1$$

где  $N_j(\alpha, s)$  заданы формулами (12);  $c_j$  — групповые скорости волн в жидкости и пластине соответственно.

Смещение полуограниченной пластины ( $x > 0$ ), покрывающей поверхность жидкости, исследуется аналогично. В силу громоздкости полученных формул выпишем решение лишь для некоторых пространственно-временных областей.

Пусть  $a_2/c_2 < t < 2a_1/c_2$ . При этом генерируемые волны, отраженные от края пластины, не успевают вернуться к области возмущений дна. Имеем

$$\zeta = \sum_{j=1}^5 \zeta_j + \theta_2(x, t), \quad 0 < x < -a_2 + c_2 t \quad (14)$$

$$\zeta = \sum_{j=1}^4 \zeta_j + \theta_2(x, t), \quad -a_2 + c_2 t < x < -a_1 + c_2 t$$

$$\zeta = \sum_{j=1}^3 \zeta_j + \theta_2(x, t), \quad -a_1 + c_2 t < x < a_1$$

$$\zeta = \sum_{j=0,2,3,6} \zeta_j + \theta_2(x, t), \quad a_1 < x < a_2$$

$$\zeta = \sum_{j=3,6,7} \zeta_j + \theta_2(x, t), \quad a_2 < x < c_2 t$$

$$\zeta = \zeta_6 + \zeta_7 + O((x - a_2)^{-\mu}), \quad c_2 t < x < a_1 + c_2 t$$

$$\zeta = \zeta_7 + O((x - a_2)^{-\mu}), \quad a_1 + c_2 t < x < a_2 + c_2 t$$

$$\zeta = O((x - a_2)^{-\mu}), \quad x > a_2 + c_2 t$$

Здесь введены обозначения

$$\zeta_0 = K_3(-\eta, -i\omega) e^{-i[\eta(x - a_1) + \omega t]}$$

$$\zeta_j = -\frac{i\omega F_j(z_2) e^{-i(z_2 x + \omega t)}}{2c_2 \operatorname{ch} z_2 [1 + \rho \kappa_1^2(z_2)]}, \quad z_2 = z_2(-i\omega), \quad j=1, 2$$

$$\zeta_j = \frac{i}{2\omega c_2} \frac{N_{j-3}(-z_2, -i\omega) K_-(-z_2, -i\omega) [\kappa_1^2(z_2) - \omega^2]}{1 + \rho \kappa_1^2(z_2)} e^{i(z_2 x - \omega t)}, \quad j=3, 4, 5$$

$$\zeta_j = -\frac{i\omega}{2c_2} \frac{F_{j-5}(-z_2) e^{i(z_2 x - \omega t)}}{\operatorname{ch} z_2 [1 + \rho \kappa_1^2(z_2)]}, \quad j=6, 7$$

$$\theta_2(x, t) = O(x^{-\nu}) + \begin{cases} O(|x-a_1|^{-\mu}) + O(|x-a_2|^{-\mu}), & |x-a_j| \rightarrow \infty \\ O(t^{-1}), & |x-a_j| \leq \text{const}, \quad t \rightarrow \infty, \quad x \rightarrow \infty \end{cases}$$

Пусть  $t > 2a_2 c_2^{-1}$ . В этом случае волновая картина в области  $0 < x < a_2 + c_2 t$  установилась. Имеем

$$\zeta = \sum_{j=1}^5 \zeta_j + \theta_2(x, t), \quad 0 < x < a_1 \tag{15}$$

$$\zeta = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq 1}}^6 \zeta_j + \theta_2(x, t), \quad a_1 < x < a_2$$

$$\zeta = \sum_{j=3}^7 \zeta_j + \theta_2(x, t), \quad a_2 < x < -a_2 + c_2 t$$

$$\zeta = \sum_{\substack{j=3 \\ j \neq 6}}^7 \zeta_j + O(|x-a_2|^{-\mu}), \quad -a_2 + c_2 t < x < -a_1 + c_2 t$$

$$\zeta = \sum_{j=3, 6, 7} \zeta_j + O(|x-a_2|^{-\mu}), \quad -a_1 + c_2 t < x < c_2 t$$

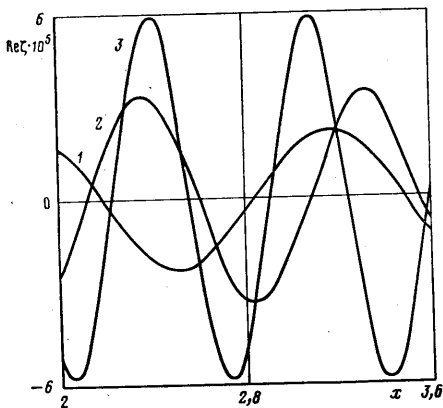
$$\zeta = \zeta_6 + \zeta_7 + O(|x-a_2|^{-\mu}), \quad c_2 t < x < a_1 + c_2 t$$

$$\zeta = \zeta_7 + O(|x-a_2|^{-\mu}), \quad a_1 + c_2 t < x < a_2 + c_2 t$$

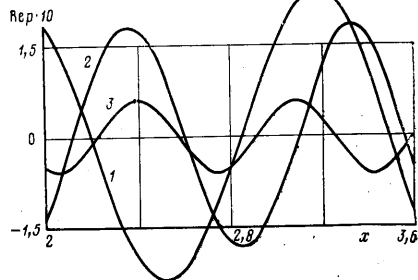
$$\zeta = O(|x-a_2|^{-\mu}), \quad x > a_2 + c_2 t$$

$$1/3 \leq \mu, \nu \leq 1$$

Таким образом, из (13)–(15) следует, что каждый конец интервала  $[a_1, a_2]$ , на котором задан закон смещений дна  $f(x, t)$ , излучает в обе стороны волны, не убывающие с расстоянием и распространяющиеся с групповыми скоростями  $c_1$  в жидкости и  $c_2$  в пластине. Причем волны  $\zeta_1, \zeta_6$  генерируются соответственно краем  $x=a_1$  влево и вправо. От точки



Фиг. 1



Фиг. 2

$x=a_2$  излучаются аналогично  $\zeta_2, \zeta_7$ . Волновой вклад  $\zeta_3$  определяется наличием края пластины. Его амплитуда имеет порядок  $e^{-\beta a_1}$ , где  $\beta = \inf |\operatorname{Re} \eta_{2,n}|, n \geq 1$ . Волнам  $\zeta_1, \zeta_2$  соответствуют отраженные от границы пластины волны  $\zeta_4, \zeta_5$ . Вклад  $\zeta_0$ , обусловленный конкретным видом функции  $f(x, t)$ , определяет основную часть поверхностной волновой картины над областью заданных смещений дна.

Изучены также давления под пластиной (8) и смещения верхней границы слоя (9) для других вариантов расположения области возмущений  $[a_1, a_2]$  относительно края пластины.

Например, фиг. 1, 2 иллюстрируют поведение смещений пластины  $\zeta$  и контактных давлений  $p$  без учета временного множителя  $e^{-i\omega t}$  при  $0 < x < c_2(t + a_1 c_1^{-1})$  в зависимости от горизонтальной координаты  $x$  для  $a_1 = -35, a_2 = -25, \eta = 0,01, \rho = 0,0174, \omega = 3,193$  и трех различных значений жесткости  $d: 2,305 \cdot 10^{-3}, 3,842 \cdot 10^{-4}, 3,842 \cdot 10^{-5}$  (линии 1, 2, 3 соответственно). Видно, что в рассматриваемом диапазоне параметров уменьшение жесткости пластины приводит к росту амплитуд ее смещений, падению давлений под пластиной и уменьшению длин волн.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Сеймов В. М. Динамические контактные задачи. Киев: Наук. думка, 1976. 284 с.
2. Бабешко В. А., Зинченко Ж. Ф., Смирнова А. В. К задаче о набегании волн нормального давления на штамп. — ПМТФ, 1982, № 2, с. 143–146.
3. Стокер Дж. Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959. 617 с.
4. Черкесов Л. В. Гидродинамика волн. Киев: Наук. думка, 1980. 259 с.
5. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. М.: Наука, 1976. 455 с.
6. Нобл Б. Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. М.: Изд-во иностр. лит., 1962. 279 с.
7. Золотарев А. А., Золотарева Л. И. Анализ неустановившихся волн в жидкости с частично свободной границей. Ростов-на-Дону: Ростов. ун-т, 1984. 14 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 31.07.84, № 5562–84 Деп.
8. Золотарев А. А. Развитие возмущений на поверхности раздела вязкой жидкости. — В кн.: Гидродинамика высоких скоростей. Л.: Судостроение, 1980, с. 14.

Ростов-на-Дону

Поступила в редакцию  
3.XII.1984