МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 6 • 1985

УДК 532.51.013.4:537.5

К МЕХАНИЗМУ РАЗВИТИЯ НЕУСТОЙЧИВОСТИ КАПЛИ ЖИДКОСТИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

ГРИГОРЬЕВ А. И., СИНКЕВИЧ О. А.

Неустойчивость поверхности жидкости в электрическом поле, проявляющаяся в образовании на ней конических выступов, из которых бьют струйки, распадающиеся на мелкие заряженные капельки, давно привлекает к себе исследователей в связи с проблемой разделения зарядов в грозовых облаках [1]. Эта неустойчивость была обнаружена еще в середине XVIII в. [2], а первый теоретический анализ неустойчивости заряженной капли был выполнен Рэлеем в конце прошлого века [3]. Несмотря на обилие экспериментальных и теоретических работ, общее число которых измеряется сотнями, ясности в характере развития неустойчивости нет.

Согласно представлениям [3], переносимым обычно с заряженной капли на каплю в поле, неустойчивость капли жидкости во внешнем электрическом поле связана с неустойчивостью мод капиллярных волн более высоких, чем основная. Однако, как отмечено в [4], для возбуждения в капле высоких мод капиллярных волн согласно модели [3] требуется значительно более сильное внешнее поле $\mathbf{E}_0$, чем для возбуждения основной моды. В экспериментах [4–10] выброс струй наблюдается при некоторой выдержке во времени при напряженности поля, соответствующей появлению неустойчивости основной моды. Поэтому для объяснения экспериментальных фактов Тейлор [4] предложил феноменологическую модель, сводящуюся к вытягиванию внешним полем струй из вершин конических выступов на поверхности жидкости. Механизм образования этих конических выступов в [4] не рассматривался. Покажем, рассматривая возбуждение неустойчивости высоких мод капиллярных волн на поверхности с меняющейся во времени кривизной, что возражения Тейлора против модели Рэлея несостоятельны: высокие моды могут возбуждаться в том же внешнем поле, что и основная мода, если учесть зависимость напряженности электрического поля у поверхности капли от ее кривизны.

1. Пусть неподвижная идеально проводящая капля радиуса R несжимаемой невязкой жидкости в непроводящей, идеальной, несжимаемой среде с диэлектрической проницаемостью, равной единице, находится в однородном электрическом поле $\mathbf{E}_0$. Равновесная форма такой капли во внешнем поле близка к эллипсоиду вращения, вытянутому вдоль поля [11–13]. Примем форму капли эллипсоидальной (e — эксцентриситет) и будем в приближении $e^2 \ll 1$ решать в сферической системе координат, связанной с центром капли, задачу об устойчивости во внешнем поле E_0 капиллярных волн, существующих в капле уже в силу теплового движения молекул [14].

Уравнение эллипсоида, вытянутого вдоль поля (полярный угол отсчитывается от $\mathbf{E}_0$), имеет вид

$$\eta(\theta) \equiv \frac{r(\theta)}{a} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{\sqrt{1-e^2\cos^2\theta}}$$

где a, e^2 — большая полуось эллипсоида и квадрат его эксцентриситета.

Пусть в капле и окружающей среде существует движение бесконечно малой амплитуды с потенциалами скоростей $\psi_i(r, \theta, \varphi, t)$ ($i=1$ внутри, $i=2$ вне капли), приводящее к искажению ее формы $r(\theta, \varphi, t) = r(\theta) +$

$+\xi(\theta,\ \varphi,\ t)$; $|\xi| \ll R$. Потенциалы ψ_i, а также потенциал Φ электрического поля вне капли являются гармоническими функциями, удовлетворяющими на поверхности капли следующим граничным условиям [12, 15]:

$$\Delta\psi_i=0; \quad i=1,2; \quad \Delta\Phi=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial n_1}=-\frac{\partial\psi_2}{\partial n_2}=\frac{\partial\psi}{\partial n}; \quad \frac{\partial\xi}{\partial t}\approx\frac{\partial\psi}{\partial n} \quad (r=r(\theta)) \tag{1.2}$$

$$\Phi(r(\theta)+\xi(\theta,\ \varphi,\ t))=0 \tag{1.3}$$

$$\Delta p=-\rho_1\frac{\partial\psi_1}{\partial t}+\rho_2\frac{\partial\psi_2}{\partial t}+f(\theta)=\sigma\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}\right) \tag{1.4}$$

где f — общее давление, оказываемое на границу раздела внешним и возмущенным электрическими полями, σ — коэффициент поверхностного натяжения, R' и R'' — главные радиусы кривизны поверхности в данной точке. Все производные в (1.2)—(1.4) отнесены к невозмущенной поверхности эллипсоида, а в приближении $e^2 \ll 1$ — к поверхности сферы радиуса R. В том же приближении $e^2 \ll 1$ в граничных условиях (1.2) производные по нормали к поверхности $\partial\psi/\partial n$ можно заменить на $\partial\psi/\partial r$ — производные по радиальной координате.

В сферических координатах при $e^2 \ll 1$ в линейном по ξ/R приближении лапласовское давление под искаженной волновым движением эллипсоидальной поверхностью имеет вид

$$\sigma\left(\frac{1}{R'}+\frac{1}{R''}\right)=-\sigma\left\{\frac{2}{R^2}-\frac{1}{R^2}L^+\right\}\xi-\frac{\sigma}{R^2}e^2[3(1+e^2)\sin^2\theta-2]\xi \tag{1.5}$$

Здесь L^+ — оператор Лежандра (угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах, взятая со знаком минус). Первое слагаемое в (1.5) — давление под искаженной сферической поверхностью [15], второе слагаемое представляет собой добавку, связанную с эллипсоидальностью капли.

2. Для потенциалов скоростей ψ_i, потенциала электрического поля Φ и возмущения ξ полагаем: ψ_1, ψ_2, Φ, $\xi \sim \exp(i\omega t)$. Подставляя такую временную зависимость в (1.4) с учетом (1.5) и дифференцируя полученное соотношение один раз по t при постоянных θ, φ, получим в линейном по ξ/R приближении с учетом граничных условий (1.2)

$$(\rho_1\psi_1-\rho_2\psi_2)\omega^2+\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\sigma}{R^2}\{2-L^+\}\frac{\partial\psi}{\partial r}+$$
$$+\frac{2\sigma e^2}{R^2}\left[3(1+e^2)\sin^2\theta-2\right]\frac{\partial\psi}{\partial r}=0 \quad (r=R) \tag{2.1}$$

Выражение для частной производной по времени от давления электростатического поля на поверхность слабоэллипсоидальной капли запишется в линейном по ξ/R приближении в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t}\equiv\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{E^2}{8\pi}\right]_{r=r(\theta)+\xi(\theta,\varphi,t)} \approx\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{8\pi}\frac{\partial E_*^2}{\partial r}\xi+\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}_*\,\delta\mathbf{E}\right]_{r=r(\theta)} \tag{2.2}$$

Представляя $\Phi=\Phi_*+\delta\Phi$; $\mathbf{E}_*=-\nabla\Phi_*$; $\delta\mathbf{E}=-\nabla(\delta\Phi)$, из (1.1)—(1.3) получим

$$r=r(\theta): \quad \delta\Phi\approx\xi\frac{\partial\Phi_*}{\partial\mathbf{r}}\approx-\xi\mathbf{E}_* \tag{2.3}$$

где Φ_* и $\mathbf{E}_*$ — потенциал и напряженность электростатического поля у невозмущенной эллипсоидальной поверхности. Используя (2.3), преобразуем (2.2) к виду

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{E_*^2}{4\pi}\frac{\partial^2\xi}{\partial r\,\partial t}\bigg|_{r=r(\theta)}\approx\frac{E_*^2}{4\pi}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\bigg|_{r=R}$$

Подставляя сюда явное выражение для напряженности поля у поверхности проводящего эллипсоида вращения, вытянутого по полю [12], найдем

$$r=R:\qquad \frac{\partial f}{\partial t}=E_0^2K\frac{(1-e^2)\eta^2\cos^2\theta}{1-e^2\eta^2\cos^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}$$

$$K=\frac{1}{4\pi}\left\{\frac{e^3}{(1-e^2)(\ln\sqrt{\alpha}-e)^2}\right\}^2,\qquad \alpha=\frac{1+e}{1-e}\tag{2.4}$$

В приближении $e^2\ll 1$ это соотношение можно разложить по степеням $\cos^2\theta$ и, ограничившись первыми двумя членами, представить в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t}\approx E_0^2K\cos^2\theta\{[1-2e^2(1-e^2)]+2e^2(1-e^2)\cos^2\theta\}\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2}\tag{2.5}$$

3. Из условий ограниченности потенциала в центре капли и при $r\to\infty$ пусть $\psi_i(\theta,\varphi)$ внутри и вне капли имеют вид

$$\psi_1(\theta,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}A_n^m r^n Y_n^m,\qquad \psi_2(\theta,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=-n}^{n}B_n^m r^{-(n+1)}Y_n^m\tag{3.1}$$

Удовлетворяя граничным условиям (1.2), найдем связь между A_n^m и B_n^m, учитывая, что мода с $n=0$ соответствует радиальным пульсациям капли, невозможным в несжимаемой жидкости, а мода с $n=1$ – ее движению как целого

$$B_0=B_1^m=A_1^m=0;\qquad B_n^m=\frac{n}{n+1}R^{2n+1}A_n^m\qquad (n\geqslant 2)\tag{3.2}$$

Подставим (2.5) – (3.2) в (2.1) и, учитывая, что Y_n^m являются собственными функциями оператора L^+, получим, переходя к безразмерным переменным

$$\sum_{n,m}C_n^mY_n^m\{\delta_nz^2-E_n\}=-\sum_{n,m}C_n^mY_n^mn\cos^2\theta\times$$
$$\times\{[\varepsilon+(n-1)(1-h)K\nu]+(n-1)hK\nu\cos^2\theta\}\tag{3.3}$$

$$C_n^m=A_n^mR^n;\qquad \delta_n=1+\frac{n}{n+1}\frac{\rho_2}{\rho_1};\qquad z^2=\omega^2\frac{R^3\rho_1}{\sigma}$$

$$\varepsilon=6e^2(1+e^2);\qquad E_n=n(n-1)(n-2)+\frac{1}{3}\varepsilon(1+3e^2)n$$

$$\nu=\frac{E_0^2R}{\sigma};\qquad h=2e^2(1-e^2)\tag{3.4}$$

Правую часть (3.3) распишем с учетом известного рекуррентного соотношения для $\cos^2\theta Y_n^m(\theta,\varphi)$ (см., например, [17], с. 542) и, приравнивая коэффициенты при сферических функциях одного порядка, получим систему алгебраических уравнений для определения C_n^m.

$$C_n^m\{-\delta_nz^2+E_n-[\varepsilon ns_n^m+n(n-1)K\nu\{s_n^m-h(s_n^m-f_n^m)\}]\}=$$
$$=K\nu h(C_{n-4}^mq_n^m+C_{n+4}^ma_n^m)+C_{n-2}^m\{\varepsilon\xi_n^m+(n-3)K\nu[\xi_n^m-h(\xi_n^m-d_n^m)]\}(n-2)+$$
$$+C_{n+2}^m\{\varepsilon\varkappa_n^m+(n+1)K\nu[\varkappa_n^m-h(\varkappa_n^m-b_n^m)]\}(n+2)\tag{3.5}$$

$$\varkappa_n^m=\frac{1}{2n+3}\sqrt{\frac{[(n+1)^2-m^2][(n+2)^2-m^2]}{(2n+1)(2n+5)}}$$

$$\xi_n^m = \frac{1}{2n-1}\sqrt{\frac{[(n-1)^2-m^2](n^2-m^2)}{(2n-3)(2n+1)}}$$

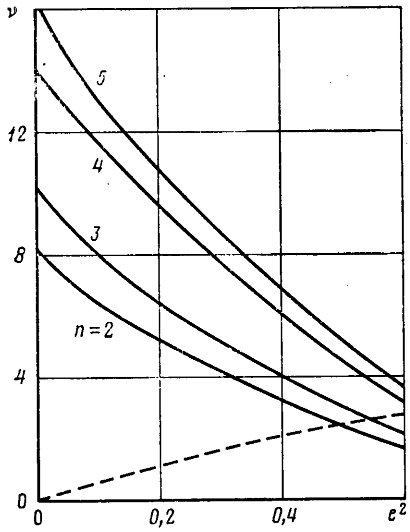
$$s_n^m = \frac{2n^2+2n-2m^2-1}{(2n-1)(2n+1)}; \qquad d_n^m = \xi_n^m (s_n^m + s_{n-2}^m)$$

$$f_n^m = n(\varkappa_n^m \xi_{n+2}^m + s_n^m s_n^m + \xi_n^m \varkappa_{n-2}^m) \tag{3.6}$$

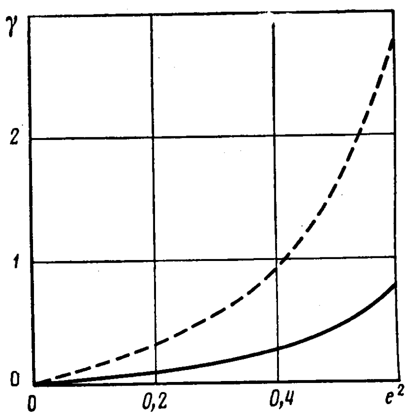
$$q_n^m = (n-4)(n-5)\xi_n^m \xi_{n-2}^m$$

$$a_n^m = \varkappa_n^m \varkappa_{n+2}^m (n+3)(n+4); \qquad b_n^m = \varkappa_n^m (s_n^m + s_{n+2}^m)$$

4. Требуя обращения в нуль определителя системы (3.5), получим дисперсионное уравнение относительно z^2, определяющее спектр капиллярных волн в капле при изменении параметров ε, h, K, ν. Приравнивая нулю свободный член дисперсионного уравнения, найдем критические условия появления неустойчивости в виде $\nu=\nu(e^2)$, так как ε, h и K являются функциями только от e^2.



Фиг. 1



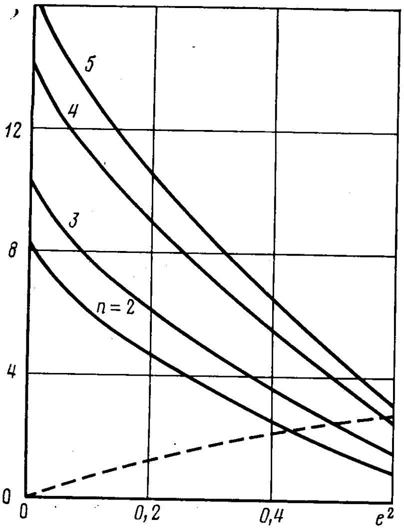
Фиг. 2

Система (3.5) бесконечная и дисперсионное уравнение также будет бесконечного порядка. Критические условия будем искать методом последовательных приближений: рассматривая два, три, четыре и т. д. уравнений.

На фиг. 1 сплошными линиями представлены результаты численного расчета по (3.5) критических условий появления неустойчивости для первых четырех осесимметричных мод. Расчетные значения ν при e^2, не удовлетворяющих условию $e^2 \ll 1$, приведены, чтобы проиллюстрировать основную тенденцию изменения критических значений параметра ν при увеличении e^2, хотя ясно, что с увеличением e^2 расчеты по полученным выше соотношениям дают заниженные значения ν. При $e^2=0$ расчетные значения точно соответствуют критическим условиям появления неустойчивости во внешнем электрическом поле для капиллярных волн в сферической капле.

Критические условия появления неустойчивости сильно зависят от эксцентриситета капли, который определяется величиной внешнего поля.

На фиг. 1 штриховой линией нанесена зависимость квадрата эксцентриситета равновесной капли от параметра ν: $e^2=e^2(\nu)$, полученная по данным [11]. Неустойчивость основной моды с $n=2$ как раз и соответствует вытягиванию капли в эллипсоид [13]. Причем при достижении критического параметра $\nu=\nu_*$ $(n=2)$ и вследствие развития неустойчивости эксцентриситет капли увеличится, так что достигнутое значение параметра ν станет уже закритическим. Это означает, что неустойчивость будет развиваться и дальше. Как только эксцентриситет достигнет величины, при которой критическое значение для третьей моды сравняется с ν_*, станет неустойчивой третья мода. Дальнейший рост эксцентриситета вызовет неустойчивость четвертой, пятой и более высоких мод, что соответствует наблюдаемому в экспериментах. Тем самым теория Рэлея вопреки замечанию [6] не противоречит эксперименту.



Фиг. 3

Само критическое значение параметра $\nu=\nu_*$, при котором произойдут описанные явления, определится из фиг. 1 пересечением нижней сплошной кривой $(n=2)$, дающей критические значения ν для основной модели, и штриховой линии, представляющей значение эксцентриситета равновесной капли для данного ν. Искомое значение $\nu_*\approx2{,}5$. По экспериментальным данным [16], $\nu_*\approx2{,}28$, по [6] $\nu_*\approx\approx2{,}59\pm0{,}08$, по [9] $\nu_*\approx2{,}22$ и по [10] $\nu_*\approx2{,}56$.

5. Интересно отметить слабую зависимость рассчитанных значений критического параметра ν_* от количества учтенных членов аппроксимации (2.5) выражения (2.4). Численный анализ показывает, что отличие приближенного значения (2.5) от точного (2.4), как и следовало ожидать, сильно зависит от e^2, а также от угла θ, достигая максимального значения при $\theta°=45$; 135 и обращаясь в нуль при $\theta°=0$; 90; 180.

На фиг. 2 сплошной линией нанесена зависимость максимальной относительной ошибки γ, допускаемой при замене (2.4) на (2.5), от e^2 при $e^2\leqslant0{,}6$, $\theta°=45$; 135. Штриховой линией на том же графике приведена зависимость γ от e^2, если в (2.5) ограничиться первым членом, т. е. взять

$$\frac{\partial f}{\partial t}\approx E_0^2K\cos^2\theta\frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} \qquad (5.1)$$

Максимальная относительная ошибка при этом значительно больше ошибки, допускаемой при замене (2.4) на (2.5), и сильно растет с увеличением e^2.

На фиг. 3 представлены критические значения параметра ν, рассчитанные с использованием аппроксимации (5.1). Выбрасывание струй в этой аппроксимации происходит при критическом значении $\nu_*=2{,}3$, что дает ошибку в определении ν_* 8%. По-видимому, такая слабая зависимость ν_* от вида аппроксимации выражения (2.4) связана с тем, что критические условия появления неустойчивости в основном определяются силами, действующими вдоль оси симметрии капли (вдоль направления поля E_0), а при $\theta°=0$; 180 и (2.5) и (5.1) совпадает с (2.4).

В реальных условиях в грозовых облаках не очень крупной капле обеспечена вытянутая форма уже в силу ее аэродинамического взаимодействия с окружающим воздухом. Так как критические условия появления неустойчивости сильно зависят от величины эксцентриситета (см. фиг. 1), то выброс каплями струек во внешнем электрическом поле может происходить при значениях критического параметра ν_*, даже меньших 2,5, если удлинение капли вдоль внешнего поля за счет аэродинамических условий будет достаточно большим.

Полученные данные позволяют объяснить результаты экспериментов [7, 9], где была обнаружена зависимость между аэродинамической деформацией капли и критическим значением поля, при котором выбрасываются струи.

Метод расчета критических условий неустойчивости, использованный в работе, был предложен в [18] и является развитием метода, которым решалась в [15] задача о спектре капиллярных волн в сферической капле.

В заключение авторы благодарят Ю. Б. Кузмичева за помощь в численных расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мучник В. М., Фишман Б. Е.* Электризация грубодисперсных аэрозолей в атмосфере. Л.: Гидрометеоиздат, 1982. 208 с.
2. *Hogan J. J., Hendricks C. D.* Investigation of the charge-to-mass ratio of electrically sprayed liquid particles.— AIAA Journal, 1965, v. 3, № 2, p. 296—301.
3. *Rayleigh R.* On the equilibrium of liquid conducting masses charged with electricity.— Philosophical magasin, 1882, v. 14, p. 184—186.
4. *Taylor G.* Disintegration of water drops in an electric field.— Proc. Roy. Soc. London, 1964, v. A 280, № 1382, p. 383—397.
5. *Габович М. Д.* Жидкометаллические эмиттеры ионов.— Усп. физ. наук, 1983, т. 140, № 1, с. 137—151.
6. *Pfeifer R. J., Hendricks C. D.* Parametric studies of electrohydrodynamic spraying.— AIAA Journal, 1968, v. 6, № 3, p. 496—502.
7. *Richards C. N., Dawson G. A.* The hydrodynamic instability of water drops falling at terminal velocity in vertical electric fields.— J. Geophys. Res., 1971, v. 76, № 15, p. 3446—3455.
8. *Wilson C. T. R., Taylor G.* The bursting of soap — bubbles in a uniform electric field.— Proc. Cambr. Philos. Soc., 1925, v. 22, № 5, p. 728—730.
9. *Macky W. A.* Some investigation on the deformation and breaking of water drops in strong electric fields.— Proc. Roy. Soc. London, 1931, v. A133, № 822, p. 565—587.
10. *Garton C. G., Krasucki Z.* Bubbles in insulating liquids: stability in an electric field.— Proc. Roy. Soc. London, 1964, v. A280, № 1381, p. 211—226.
11. *O'Konski C. T., Thacher H. C.* The distortion of aerosol droplets by an electric field.— J. Phys. Chemistry, 1953, v. 57, № 9, p. 955—958.
12. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
13. *Торза С., Кокс Р., Мейсон С.* Электрогидродинамическая деформация и разрыв капель.— В сб.: Реология суспензий. М.: Мир, 1975, с. 285—333.
14. *Френкель Я. И.* К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме.— ЖЭТФ, 1936, т. 6, № 4, с. 347—350.
15. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М.— Л.: Гостехиздат, 1944. 624 с.
16. *Zeleny J.* The electrical discharge from liquid points and a hydrostatic method of measuring the electric intensity at their surface.— Amer. Phys. Soc. Rev., 1914, v. 3, № 2, p. 69—91.
17. *Бете Г., Солпитер Э.* Квантовая механика атомов с одним и двумя электронами. М.: Физматгиз, 1960. 562 с.
18. *Стаханов И. П.* Об устойчивости шаровой молнии.— Журн. техн. физики, 1974, т. 44, № 7, с. 1373—1379.

Москва

Поступила в редакцию
19.VI.1984