

УДК 532.529

ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ЗАТУПЛЕННОМ ТЕЛЕ В ПОТОКЕ ЗАПЫЛЕННОГО ГАЗА

ОСИПЦОВ А. Н.

Проблема взаимодействия газопылевых потоков с твердыми поверхностями возникла в связи с изучением движения летательных аппаратов в запыленной атмосфере [1–2], движения газовзвеси в энергетических установках и рядом других приложений [3]. Наличие дисперсной примеси может приводить к значительному увеличению тепловых потоков [4], эрозии обтекаемой поверхности [5]. Эти явления обусловлены совместным действием ряда факторов: изменением структуры пограничного слоя несущей фазы из-за наличия частиц, соударениями частиц с поверхностью, шероховатостью разрушающейся поверхности и др.

Ниже продолжено начатое ранее [6–7] исследование влияния частиц на структуру динамического и теплового двухфазного пограничного слоя при обтекании затупленного тела. Принята модель запыленного газа [8] с несжимаемой несущей фазой. Методом сращиваемых разложений [9] получены уравнения двухфазного пограничного слоя. В уточнении классификации, проведенной в [6], показано, что вид уравнений пограничного слоя различен для режимов наличия и отсутствия инерционного осаждения частиц. Проведено численное решение полученных уравнений в окрестности критической точки затупленного тела. Для широкого диапазона определяющих параметров найдены распределения температур и скоростей фаз в пограничном слое, а также коэффициенты трения и теплообмена несущей фазы. В случае примеси малоинертных частиц, не выпадающих на тело, показано, что даже при малой массовой концентрации частиц в набегающем потоке их накопление в пограничном слое может привести к резкому увеличению тепловых потоков в критическую точку.

1. Постановка задачи. Рассмотрим стационарное обтекание плоского или осесимметричного затупленного тела однородным двухфазным потоком при больших числах Рейнольдса. Примем обычные предположения модели запыленного газа [8]: частицы — сферы одинакового радиуса σ , массы m , их объемной концентрацией и броуновским движением можно пренебречь. В качестве выражений для межфазного силового и теплового взаимодействий используем формулу Клячко [10] и аппроксимационную зависимость [11]

$$F_s = 6\pi\mu n_s (V - V_s) \left(1 + \frac{1}{6} Re_{s1}^{\frac{1}{6}}\right), \quad Re_{s1} = 2|V - V_s| \sigma / \nu$$

$$Q_s = 4\pi\lambda n_s (T - T_s) \left(1 + 0.3 Pr^{\frac{1}{6}} Re_{s1}^{\frac{1}{6}}\right), \quad Pr = c\mu/\lambda$$

Здесь μ , ν , λ , c — соответственно динамическая и кинематическая вязкости, теплопроводность и теплоемкость несущей фазы, n_s — числовая концентрация частиц. Систему координат свяжем с поверхностью тела. Координата x совпадает с образующей, y направлена по нормали к поверхности, r — расстояние до оси симметрии, $r_w(x)$ — уравнение поверхности тела. В безразмерном виде уравнения движения и притока тепла для обеих фаз [8] примут вид

$$\frac{\partial}{\partial x} (ur^j) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{vr^j}{H} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} (\rho_s u_s r^j) + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\rho_s v_s r^j}{H} = 0$$

$$\begin{aligned}
& Hu \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{uv}{R+y} + H \frac{\partial p}{\partial x} + \alpha \beta \rho_s (u - u_s) D = \varepsilon A_1 \\
& Hu \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{u^2}{R+y} + \frac{\partial p}{\partial y} + \alpha \beta \rho_s (v - v_s) D = \varepsilon A_2 \\
& Hu_s \frac{\partial u_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial u_s}{\partial y} + \frac{u_s v_s}{R+y} = \beta (u - u_s) D \\
& Hu_s \frac{\partial v_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial v_s}{\partial y} - \frac{u_s^2}{R+y} = \beta (v - v_s) D \\
& Hu \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\varepsilon}{Pr} A_3 + \text{Ec} \Phi + \frac{2}{3} \frac{\alpha \beta}{Pr} \rho_s (T_s - T) G + \alpha \beta \text{Ec} \rho_s D |\mathbf{V} - \mathbf{V}_s|^2 \\
& Hu_s \frac{\partial T_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial T_s}{\partial y} = \frac{2}{3} \frac{c}{c_s} \frac{\beta}{Pr} (T - T_s) G, \quad H = \frac{R}{R+y} \\
& A_1 = \frac{1}{r^j} \frac{\partial}{\partial y} \left\{ r^j H \left[\frac{\partial}{\partial y} (Hu) - \frac{\partial v}{\partial x} \right] \right\} \\
& A_2 = \frac{H}{r^j} \frac{\partial}{\partial x} \left\{ r^j H \left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} (Hu) \right] \right\} \\
& A_3 = \frac{H}{r^j} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(r^j H \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{r^j}{H} \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right] \\
& D = 1 + \frac{1}{\varepsilon} \text{Re}_s^{1/2} [(u - u_s)^2 + (v - v_s)^2]^{1/2} \\
& G = 1 + 0,3 \text{Pr}^{1/2} \text{Re}_s^{1/2} [(u - u_s)^2 + (v - v_s)^2]^{1/2} \\
& \Phi = 2(e_{xx}^2 + 2e_{xy}^2 + e_{yy}^2), \quad e_{xx} = H \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v}{R+y} \\
& e_{xy} = \frac{1}{2} \left(H \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{u}{R+y} \right), \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \\
& \rho_s = \frac{\rho_s^*}{\rho_{s\infty}^*}, \quad p = \frac{p^*}{\rho^* V_\infty^2}, \quad T = \frac{T^* - T_w^*}{T_{\infty}^* - T_w^*}, \quad T_s = \frac{T_s^* - T_w^*}{T_{\infty}^* - T_w^*} \\
& u = \frac{u^*}{V_\infty}, \quad v = \frac{v^*}{V_\infty}, \quad u_s = \frac{u_s^*}{V_\infty}, \quad v_s = \frac{v_s^*}{V_\infty} \\
& x = \frac{x^*}{L}, \quad y = \frac{y^*}{L}, \quad R = \frac{R^*}{L}
\end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь $R^*(x)$ — радиус кривизны тела в точке x , индексом s отмечены параметры частиц. В плоском случае $j=0$, в осесимметричном $j=1$, индексы ∞ и w относятся к параметрам на бесконечности и на теле соответственно, L — характерный размер тела. Соответствующие размерные величины здесь и, где это необходимо, ниже отмечены звездочкой. Остальные обозначения общепринятые. Система уравнений (1.1) зависит от семи безразмерных параметров

$$\begin{aligned}
& \frac{c}{c_s}, \quad \alpha = \frac{\rho_{s\infty}^*}{\rho^*}, \quad \beta = \frac{6\pi\sigma\mu L}{m V_\infty}, \quad Pr \\
& \varepsilon = \frac{1}{\text{Re}} = \frac{v}{V_\infty L}, \quad \text{Re}_s = \frac{2\sigma V_\infty}{v}, \quad \text{Ec} = \frac{V_\infty^2}{c(T_{\infty}^* - T_w^*)}
\end{aligned}$$

Температура обтекаемого тела считается заданной. Отраженными от тела частицами пренебрегаем, имея в виду, например, жидкие капли, расходящиеся по поверхности. Границные условия на теле имеют вид $u=v=T=0$. Для упрощения выкладок в дальнейшем положено $\text{Pr}=\frac{2}{3}$.

При малых ε в соответствии с теорией сингулярных возмущений [9] всю область течения можно разбить на область «внешнего» невязкого обтекания и область пограничного слоя. При выводе уравнений пограничного слоя считаем, что $\varepsilon \rightarrow 0$, а все остальные определяющие параметры имеют порядок единицы. Траектории частиц, найденные из решения внешней задачи, в случае криволинейной обтекаемой поверхности не совпадают с поверхностью тела [7]. Существует критический размер частиц β^* , такой, что при $\beta > \beta^*$ траектории частиц «втыкаются» в поверхность тела, т. е. частицы входят в пограничный слой с конечной нормальной скоростью [8, 10]. Этот режим называется режимом инерционного осаждения.

Критический размер частиц соответствует критическому значению параметра β^* . Стого говоря, β^* есть функция Re_s и геометрических параметров обтекаемого тела. Например, при потенциальном обтекании пластиинки полушириной L , поставленной перпендикулярно потоку газовзвеси с малой массовой концентрацией частиц и стоксовским законом межфазного взаимодействия, $\beta^* = 4$ [8]. При $\beta \geq \beta^*$ частицы не выпадают на тело — режим отсутствия инерционного осаждения. В этом случае частицы входят в пограничный слой, имея нормальную компоненту скорости порядка нормальной скорости несущей фазы. Случаи наличия и отсутствия инерционного осаждения отличаются условиями асимптотического сращивания с внешним решением, что сказывается на структуре уравнений двухфазного пограничного слоя.

2. Уравнения пограничного слоя при $\beta < \beta^*$. Пусть из решения внешней задачи найдены параметры фаз на теле (обозначаем индексом e)

$$v_e = 0; u_e(x), v_{se}(x), p_e(x), \rho_{se}(x), T_e(x), T_{se}(x) \sim O \quad (1)$$

Построим уравнения пограничного слоя, используя стандартную технику метода сращиваемых разложений [9]. Введем растянутую координату $\eta = y/\sqrt{\varepsilon}$. Ищем параметры течения в пограничном слое в виде разложений ($\varepsilon \rightarrow 0$; x, η — фиксированы)

$$u_0(x, \eta) + \dots, \sqrt{\varepsilon}v_0(x, \eta) + \dots, u_{s0}(x, \eta) + \dots, v_{s0}(x, \eta) + \dots$$

$$p_0(x, \eta) + \dots, \rho_{s0}(x, \eta) + \dots, T_0(x, \eta) + \dots, T_{s0}(x, \eta) + \dots$$

Из (1.1) получаем уравнения и граничные условия для пограничного слоя

$$\begin{aligned} u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial \eta} + \frac{dp_e}{dx} + \alpha \beta \rho_{se} (u_0 - u_{se}) D_0 &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2} \\ u_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_0}{\partial \eta} &= \frac{3}{2} \frac{\partial^2 T_0}{\partial \eta^2} + \text{Ec} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right)^2 + \\ + \alpha \beta \rho_{se} [(T_{se} - T_0) G_0 + \text{Ec} ((u_0 - u_{se})^2 + v_{se}^2) D_0] & \\ \frac{\partial}{\partial x} [u_0 r_w^j(x)] + \frac{\partial}{\partial \eta} [v_0 r_w^j(x)] &= 0 \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$D_0 = 1 + \frac{1}{\text{Re}_s} \text{Pr}^{\frac{2}{3}} [(u_0 - u_{se})^2 + v_{se}^2]^{\frac{1}{3}}$$

$$G_0 = 1 + 0,3 \text{Re}_s^{\frac{1}{6}} \text{Pr}^{\frac{1}{6}} [(u_0 - u_{se})^2 + v_{se}^2]^{\frac{1}{4}}$$

$$\eta = 0: u_0 = v_0 = T_0 = 0; \eta \rightarrow \infty: u_0 \rightarrow u_e(x), T_0 \rightarrow T_e(x)$$

Из (2.1) видно, что частицы движутся через пограничный слой несущей фазы, сохраняя значения параметров, найденные из решения внешней задачи на поверхности тела. В то же время частицы существенно изменяют параметры пограничного слоя несущей фазы, так как в уравнениях (2.1) члены, учитывающие межфазное взаимодействие, имеют порядок единицы.

3. Решения уравнений (2.1) вблизи критической точки. Пусть внешнее решение на поверхности тела при малых x имеет вид

$$p_e(x) = p_1 + p_2 x^2 + \dots, \quad \rho_{se}(x) = \rho_{s1} + \dots, \quad u_e(x) = u_1 x + \dots \\ u_{se}(x) = u_{s1} x + \dots, \quad v_{se}(x) = -v_{s1} + \dots, \quad T_{se}(x) = T_{s1} + \dots, \quad T_e(x) = T_1 + \dots$$

Из внешних уравнений импульса и притока тепла несущей фазы, рассмотренных на поверхности тела, получаем соотношения

$$2p_2 = \rho_{s1} \alpha \beta (u_{s1} - u_1) (1 + 1/\text{Re}_s^{2/3} v_{s1}^{2/3}) - u_1^2 \quad (3.1) \\ \text{Ec} v_{s1}^2 (1 + 1/\text{Re}_s^{2/3} v_{s1}^{2/3}) = (T_1 - T_{s1}) (1 + 0,3 \text{Re}_s^{1/3} \text{Pr}^{1/3} v_{s1}^{1/2})$$

В окрестности критической точки ищем решение уравнений (2.1) в виде

$$u_0(x, \eta) = u_1 x f(z) + \dots, \quad v_0(x, \eta) = \sqrt{u_1} g(z) + \dots \\ T_0(x, \eta) = T_1 \theta(z) + \dots, \quad z = \sqrt{u_1} \eta$$

Из уравнений (2.1) с использованием (3.1) получаем краевую задачу

$$g' = -2^j f, \quad f' = h, \quad h' = f^2 + gh + A(f-1) - 1 \\ \theta' = \kappa, \quad \kappa' = -2/3 [g\kappa + B(\theta-1)] \\ A = \alpha \beta \rho_{s1} (1 + 1/\text{Re}_s^{2/3}) / u_1 \quad (3.2) \\ B = A (1 + 0,3 \text{Pr}^{1/3} \text{Re}_{se}^{1/3}) / (1 + 1/\text{Re}_{se}^{2/3}) \\ z=0: f=g=\theta=0; \quad z \rightarrow \infty: f \rightarrow 1, \quad \theta \rightarrow 1$$

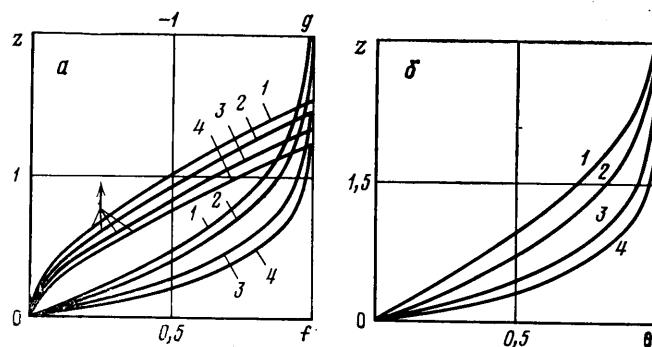
Произведение $\text{Re}_s v_{s1}$, равное числу Рейнольдса, при котором частица входит в пограничный слой на оси симметрии, обозначено Re_{se} . Различные решения внешней задачи в уравнениях (3.2) соответствуют различным значениям двух безразмерных параметров A и B . В дальнейшем для простоты положим $B=A$, поскольку в диапазоне $0 \leq \text{Re}_{se} \leq 40$ значения A и B (при принятом значении $\text{Pr}=2/3$) различаются не более чем на 8 %. При $B=A=0$ система (3.2) совпадает с постановкой классической задачи о распределении скорости и температуры вязкой жидкости в окрестности критической точки [12]. Для коэффициентов трения C_f и теплоотдачи Nu несущей фазы имеем соотношения

$$C_f = \mu \frac{\partial u^*}{\partial y^*} / \rho^* V_\infty^2 = \frac{u_1^{2/3} f'(0) x}{\sqrt{\text{Re}}} \quad (3.3) \\ \text{Nu} = \lambda \frac{\partial T^*}{\partial y^*} / \left[\frac{\lambda}{L} (T_\infty^* - T_w^*) \right] = u_1^{1/3} \theta'(0) \sqrt{\text{Re}}$$

Значения $f'(0)$ и $\theta'(0)$ — функции параметра A . При больших значениях A легко находится асимптотическое решение системы (3.2) и асимптотика $f'(0), \theta'(0)$

$$f \sim 1 - \exp(-\sqrt{A}z), \quad \theta \sim 1 - \exp(-\sqrt{2A/3}z) \\ g \sim 2^j A^{-1/2} [1 - \sqrt{A}z - \exp(-\sqrt{A}z)] \\ f'(0) \sim \sqrt{A}, \quad \theta'(0) \sim \sqrt{2/3}z$$

При конечных значениях параметра A решение уравнений (3.2) было найдено численно методом Кутта — Мерсона. Краевая задача сводилась к задаче Коши путем подбора дополнительных граничных условий $f'(0)$ и $\theta'(0)$. Результаты численных расчетов зависимостей $f(z)$, $g(z)$ и $\theta(z)$ в осесимметричном случае для значений $A=0, 1, 5, 10$ (кривые 1—4 соответственно) приведены на фиг. 1. В плоском случае качественное поведение рассчитанных функций аналогично. Зависимость найденных значений $f'(0)$ и $\theta'(0)$ (определяющих C_f и Nu) от параметра A приведена в табл. 1. Абсолютная погрешность приведенных результатов не превышает 10^{-4} . Из табл. 1 и фиг. 1 видно, что с увеличением массовой концентрации ча-



Фиг. 1

стиц трение и тепловой поток в стенку увеличиваются, профили скорости и температуры несущей фазы становятся более наполненными.

Чтобы вычислить полные потоки импульса и тепла в стенку, к определенному выше вкладу со стороны несущей фазы нужно добавить соответствующие потоки со стороны дисперсной фазы. Эти потоки будут определяться значениями параметров частиц, найденными из внешнего реше-

Таблица 1

A	$j=0$		$j=1$	
	$f'(0)$	$\theta'(0)$	$f'(0)$	$\theta'(0)$
0	1,2326	0,4867	1,3119	0,6529
1	1,5853	0,9197	1,6453	1,0120
3	2,1232	1,4663	2,1664	1,5196
5	2,5507	1,8642	2,5858	1,9038
10	3,3917	2,6079	3,4174	2,6345
20	4,6370	3,6693	4,6555	3,6874

ния на стенке, и существенно зависеть от механизма взаимодействия частиц с поверхностью. Приведем верхнюю оценку для величины теплового потока q_s^* в критическую точку со стороны частиц

$$q_s^* = \rho_{se}^* v_{se}^* [c_s(T_{se}^* - T_w^*) + \frac{1}{2}(v_{se}^*)^2]$$

Сравним вклад несущей фазы q^* и максимальный вклад дисперсной фазы q_s^* в тепловой поток. С использованием (3.3) имеем

$$\frac{q^*}{q_s^*} = \frac{3}{2} \sqrt{u_1} \theta'(0) \frac{T_\infty^* - T_w^*}{T_e^* - T_w^*} \frac{c}{c_s} \frac{\rho^*}{\rho_{se}^*} \sqrt{Re} \frac{v}{v_{se}^* L [1 + v_{se}^{*2}/(2c_s(T_e^* - T_w^*))]} \quad (3.4)$$

Для достаточно крупных частиц, которые практически сохраняют скорость невозмущенного потока, из (3.4) имеем $q_s^*/q^* \approx \alpha \sqrt{Re}$. Следователь-

но, вклад крупных частиц в суммарный тепловой поток может значительно превосходить вклад со стороны несущей фазы даже при малой массовой концентрации частиц. В случае частиц умеренных размеров, заметно теряющих скорость вблизи поверхности тела, вклады каждой из фаз в тепловой поток будут сравнимы.

4. Уравнения пограничного слоя при $\beta > \beta^*$ и малой массовой концентрации частиц. При $\beta > \beta^*$ нормальные компоненты скоростей фаз в пограничном слое на лобовой части обтекаемого тела имеют одинаковый порядок малости. Динамика одиночных малоинерционных частиц ($\beta \geq \beta^*$) в пограничном слое при обтекании сферы изучалась в [13]. Для построения уравнений двухфазного пограничного слоя необходимо знать поведение плотности среды частиц вблизи стенки во внешнем решении. Для конечных значений массовой концентрации α в настоящее время имеются лишь некоторые результаты численных расчетов (например, [1]), из которых следует, что плотность среды частиц при $\beta > \beta^*$ вблизи стенки неограниченно возрастает. Тип особенности плотности определен лишь в пренебрежении влиянием частиц на движение несущей фазы [14], т. е. при $\alpha \ll 1$, поэтому ниже рассмотрим случай достаточно малых α . Считаем, что $\alpha \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$, причем между параметрами α и ε имеется связь, приводящая к конечному влиянию частиц на движение несущей фазы в пограничном слое. Вид этой связи уточняется ниже. Для простоты далее будем рассматривать обтекание плоского или осесимметричного торца и примем во всей области течения стоксовский режим обтекания частиц.

Пусть из решения внешней задачи ($\varepsilon \rightarrow 0$; x ; y — фиксированы) найдено распределение параметров фаз на теле и асимптотика плотности частиц при $y \rightarrow 0$

$$v_e = v_{se} = 0; p_e(x), u_{se}(x), T_e(x), T_{se}(x) \sim O(1)$$

$$\rho_{se}(x, y) \sim d(x)/y^\delta, d(x) \sim O(1)$$

Заметим, что особенность плотности частиц интегрируемая, и модель невзаимодействующих частиц остается применимой [14]. Погранслойная координата $\eta = y/\sqrt{\varepsilon}$ вводится, как и раньше. Ищем параметры фаз в пограничном слое в виде

$$u_0(x, \eta) + \dots, u_{s0}(x, \eta) + \dots, \sqrt{\varepsilon} v_0(x, \eta) + \dots, \sqrt{\varepsilon} v_{s0}(x, \eta) + \dots \\ p_0(x, \eta) + \dots, T_0(x, \eta) + \dots, T_{s0}(x, \eta) + \dots, \varepsilon^{-\delta/2} d(x) \rho_{s0}(x, \eta) + \dots \quad (4.1)$$

Порядки величин выбраны из условий сращивания с внешним решением. Подставляя (4.1) в (1.1) и оставляя главные члены, получаем уравнения и граничные условия для пограничного слоя

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_0 x^j}{\partial x} + \frac{\partial v_0 x^j}{\partial \eta} &= 0, \quad \frac{\partial \rho_{s0} u_{s0} x^j}{\partial x} + \frac{\partial \rho_{s0} v_{s0} x^j}{\partial \eta} = 0 \\ u_0 \frac{\partial T_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial T_0}{\partial \eta} &= \frac{3}{2} \frac{\partial^2 T_0}{\partial \eta^2} + Ec \left(\frac{\partial u_0}{\partial \eta} \right)^2 + \\ &+ \frac{\alpha \beta}{\varepsilon^{\delta/2}} d \rho_{s0} [(T_{s0} - T_0) + Ec(u_0 - u_{s0})^2] \\ u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} + v_0 \frac{\partial u_0}{\partial \eta} + \frac{dp_0}{dx} + \frac{\alpha \beta}{\varepsilon^{\delta/2}} d \rho_{s0} (u_0 - u_{s0}) &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial \eta^2}, \quad \frac{\partial p_0}{\partial \eta} = 0 \\ u_{s0} \frac{\partial u_{s0}}{\partial x} + v_{s0} \frac{\partial u_{s0}}{\partial \eta} &= \beta (u_0 - u_{s0}) \\ u_{s0} \frac{\partial v_{s0}}{\partial x} + v_{s0} \frac{\partial v_{s0}}{\partial \eta} &= \beta (v_0 - v_{s0}) \end{aligned} \quad (4.2)$$

$$u_{s0} \frac{\partial T_{s0}}{\partial x} + v_{s0} \frac{\partial T_{s0}}{\partial \eta} = \frac{c}{c_s} \beta (T_0 - T_{s0})$$

$$\eta=0: \quad u_0=v_0=T_0=0; \quad \eta \rightarrow \infty: \quad u_0 \rightarrow u_e, \quad u_{s0} \rightarrow u_{se}, \quad p_0 \rightarrow p_e, \quad \rho_{se} \eta^\delta \rightarrow 1$$

$$T_0 \rightarrow 1, \quad T_{s0} \rightarrow 1, \quad \left. \frac{\partial v_{s0}}{\partial \eta} \right| \rightarrow \left. \frac{\partial v_{se}}{\partial y} \right|_{y=0}$$

Из уравнений (4.2) видно, что влияние частиц на движение несущей фазы будет существенным, если между параметрами α и ε имеется связь $\alpha \sim \varepsilon^{\delta/2}$.

5. Решение уравнений (4.2) в окрестности критической точки. При малых x решение внешней задачи при $\beta > \beta^*$ на поверхности тела имеет вид

$$u_e(x) = u_1 x + \dots, \quad u_{se}(x) = u_{s1} x + \dots$$

$$\left. \frac{\partial v_e}{\partial y} \right|_{y=0} = -2^j u_1 + \dots, \quad \left. \frac{\partial v_{se}}{\partial y} \right|_{y=0} = -v_{s1} + \dots, \quad \rho_{se} \sim \left. \frac{d_1}{y^\delta} \right|_{x=0, y=0}$$

Из уравнений движения частиц находим [14]

$$u_{s1} = \frac{\beta}{2} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4u_1}{\beta}} \right), \quad v_{s1} = \frac{\beta}{2} \left(-1 + \sqrt{1 - \frac{2^j 4u_1}{\beta}} \right)$$

Порядок особенности плотности частиц во внешнем решении в критической точке находится из уравнения неразрывности среды частиц и имеет вид [14] $\delta = 1 - 2^j u_{s1}/v_{s1}$. Константы u_1 и d_1 в изложенном выше локальном решении должны быть найдены из решения задачи во всей области. Отметим, что критическое значение $\beta = 2^j 4u_1$ [8].

Для определения возможных значений величин δ и d_1 был рассмотрен пример обтекания пластинки шириной $2L$, поставленной перпендикулярно потоку газовзвеси. Поле скоростей несущей фазы находилось из решения плоской задачи безотрывного потенциального обтекания пластиинки [15]. Концентрация частиц на оси симметрии находилась численным методом из решения уравнения неразрывности дисперсной фазы в лагранжевых координатах аналогично вычислению концентрации в окрестности критической точки [14]. Значения δ и d_1 (найденные из сравнения численных расчетов и асимптотической формулы $\rho_{se} \sim d_1/y^\delta$) приведены ниже:

β	4.1	4.2	4.6	5	10	50
δ	0.519	0.492	0.425	0.382	0.187	0.039
d_1	0.350	0.411	0.539	0.609	0.852	0.974

Для обтекания пластиинки критическое значение $\beta^* = 4$ [8]. Ищем локальное решение уравнений (4.2) в окрестности оси симметрии в виде

$$u_0 = u_1 x f(z) + \dots, \quad v_0 = -u_1 \eta g(z) + \dots, \quad u_{s0} = u_{s1} x f_s(z) + \dots$$

$$v_{s0} = -v_{s1} \eta g_s(z) + \dots, \quad \rho_{s0} = \psi(z)/\eta^\delta g_s + \dots, \quad T_0 = \theta(z) + \dots$$

$$T_{s0} = \theta_s(z) + \dots, \quad z = \sqrt{u_1} \eta$$

Подставив разложения в (4.2) и оставив главные члены, получим следующую краевую задачу:

$$f' = h, \quad h' = f^2 - zgh - 1 + k\beta_1(f - af_s)\psi/z^\delta g_s$$

$$g' = \frac{2^j f - g}{z}, \quad f_s' = \frac{\beta_1(af_s - f) + a^2 f_s^2}{abzg_s}$$

$$g_s' = \frac{\beta_1(bg_s - g)}{b^2 zg_s} - \frac{g_s}{z}, \quad \psi' = \frac{2^j \psi af_s}{bg_s z} - \frac{(1-\delta)\psi}{z}$$

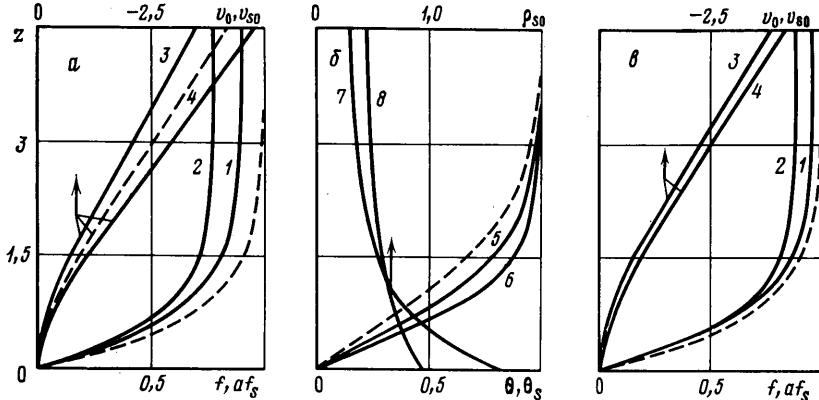
$$\theta' = \kappa, \quad \kappa' = \frac{2}{3} [k\beta_1(\theta - \theta_s)\psi/z^6 g_s - zg\kappa]$$

$$\theta_s' = \frac{c}{c_s} \beta_1 \frac{\theta_s - \theta}{bzg_s}, \quad a = \frac{u_{s1}}{u_1}, \quad b = \frac{v_{s1}}{u_1} \quad (5.1)$$

$$\beta_1 = \frac{\beta}{u_1}, \quad k = \frac{\alpha d_1}{u_1^{1-\delta/2} \epsilon^{\delta/2}}$$

$$z=0: f=g=\theta=0; \quad z \rightarrow \infty: f=f_s=g_s=\psi=\theta=\theta_s=1$$

Уравнения (5.1) интегрировались численно для случая обтекания пластиинки. В этом случае $u_1=1$ [15], что упрощает определяющие параметры в (5.1), в частности $\beta_1=\beta$. Применялся следующий итерационный процесс. Сначала решалась дина-



Фиг. 2

мическая часть задачи, затем тепловая. На первом шаге поле скоростей несущей фазы задавалось таким же, как в чистом газе. По этому полю скоростей находились скорости частиц и функция Φ из решения 4–6 уравнений (5.1). По найденным значениям вычислялись значения членов, учитывающего межфазное взаимодействие, в уравнении 2. С использованием этих значений находилось новое поле скоростей несущей фазы из решения уравнений 1–3, при этом краевая задача сводилась к задаче Коши путем подбора дополнительного условия $h(0)$. Полученная задача Коши, так же как и уравнения 4–6 на предыдущем шаге итерационной процедуры, решалась методом Кутта – Мерсона с помощью стандартной подпрограммы на ЭВМ БЭСМ-6. По новому полю скоростей несущей фазы находилось новое распределение параметров частиц и т. д. Итерационный процесс продолжался до стабилизации поля скоро-

Таблица 2

$\alpha=0,03$			$\alpha=0,05$	
β	C_{f1}	Nu_1	C_{f1}	Nu_1
4,1	0,932	1,294	0,903	1,397
4,2	0,935	1,278	0,906	1,379
4,6	0,947	1,214	0,922	1,303
5,0	0,956	1,172	0,935	1,247
10	0,985	1,046	0,977	1,072
50	0,994	1,015	0,991	1,025

стей несущей фазы. Аналогичный итерационный процесс применялся и для решения тепловой части задачи. Границные условия на бесконечности сносились на значение $z=10$ с использованием трех членов асимптотического разложения решения (5.1) на бесконечности.

Численные расчеты проводились для следующих значений определяющих параметров: $c/c_s=0,5; 0,25; \epsilon=10^{-7}; \alpha=0,03; \alpha=0,05$; параметр β варьировался от 4,1 до

50. Для вычисления значений k использовалась приведенная выше зависимость параметров δ и d_1 от β . Характерные распределения параметров фаз в пограничном слое при $\alpha=0,05$; $c/c_s=0,5$ представлены на фиг. 2. На фиг. 2, a, b цифрами 1–7 отмечены соответственно графики функций $f(z)$, $af_s(z)$, $v_0(z)$, $v_{s0}(z)$, $\theta(z)$, $\theta_s(z)$, $\rho_{s0}(z)$ при $\beta=4,1$. Для сравнения штриховыми линиями приведены соответствующие распределения параметров в чистом газе. На той же фигуре цифрой 8 отмечена график $\rho_{s0}(z)$ при $\beta=10$. На фиг. 2, c цифрами 1–4 отмечены графики функций $f(z)$, $af_s(z)$, $v_0(z)$, $v_{s0}(z)$ при $\beta=10$. С уменьшением размера частиц (увеличением β) параметры несущей фазы стремятся к соответствующим значениям в чистом газе. Распределение температуры несущей фазы при $\beta=10$ уже близко к штриховой линии на фиг. 2, b . В табл. 2 представлены вычисленные отношения $C_{f1}=f'(0)/f'_0(0)$, $Nu_1=-\theta'(0)/\theta'_0(0)$. Индексом ноль здесь отмечены значения величин в отсутствие частиц.

Из табл. 2 видно, что даже при малой массовой концентрации частиц в набегающем потоке их накопление в пограничном слое может привести к заметному увеличению теплового потока в критическую точку. Увеличение теплового потока еще более значительно в случае частиц с большей теплоемкостью: так, при $c/c_s=0,25$; $\alpha=0,05$; $\beta=4,1$ величина $Nu_1=1,66$. Отметим также, что с учетом пограничного слоя несущей фазы концентрация частиц на стенке при $\beta>\beta^*$ является большой, но конечной величиной.

В заключение автор благодарит В. П. Столова за обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Васильков А. П. Окрестность критической точки затупленного тела в гиперзвуковом двухфазном потоке.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 5, с. 121–129.
2. Пейгин С. В. Гиперзвуковой пространственный вязкий ударный слой в двухфазном потоке.— ПММ, 1984, вып. 2, с. 254–263.
3. Горбис З. Р. Теплообмен и гидродинамика дисперсных сквозных потоков. М.: Энергия, 1970, 423 с.
4. Hove D. T., Taylor E. Stagnation Region Heat Transfer in Hypersonic Particle Environments.— AIAA J., 1976, v. 14, p. 1486–1488.
5. Васин А. В., Полежаев Ю. В. Унос массы при совместном эрозионном и тепловом воздействии двухфазного потока.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 1, с. 120–126.
6. Стулов В. П. Об уравнениях ламинарного пограничного слоя в двухфазной среде.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 1, с. 51–60.
7. Желева И. М., Запрянов З. Д., Осипцов А. Н., Стулов В. П. Течения дисперсных смесей в условиях скоростной неравновесности частиц.— Усп. механики, 1982, т. 5, вып. 1/2, с. 183–208.
8. Марбл Ф. Динамика запыленных газов.— В кн.: Механика. Период. сб. перевод. иностр. статей, 1971, № 6, с. 48–89.
9. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. М.: Мир, 1972, 274 с.
10. Волоцук В. М. Введение в гидродинамику грубодисперсных аэрозолей. Л.: Гидрометеоиздат, 1971. 208 с.
11. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
12. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974, с. 711.
13. Циркунов Ю. М. Влияние вязкого пограничного слоя на осаждение частиц при обтекании сферы газовзвесью.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 1, с. 59–66.
14. Осипцов А. Н. Исследование зон неограниченного роста концентрации частиц в дисперсных потоках.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 3, с. 46–52.
15. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидродинамика. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1963. 583 с.

Москва

Поступила в редакцию
6.XI.1984