

УДК 532.529

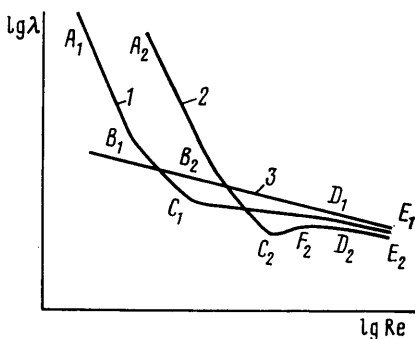
ПЕРЕХОДНОЕ ТЕЧЕНИЕ ВОЛОКНИСТОЙ СУСПЕНЗИИ В ТРУБЕ КАК ТЕЧЕНИЕ АНИЗОТРОПНОЙ ЖИДКОСТИ

БАБКИН В. А.

Рассматривается переходное течение волокнистой суспензии в трубе. Область течения состоит из двух подобластей: в центре потока, как твердое тело, движется стержень, образованный переплетенными волокнами и жидкостью; между твердой стенкой и стержнем — пристеночная область, в которой суспензия представляет собой смесь жидкой фазы и отделившихся от стержня волокон [1–3]. В пристеночной области суспензия моделируется как анизотропная жидкость Эриксона — Лесли [4, 5], удовлетворяющая некоторым дополнительным условиям. Получены формулы для профиля скорости и коэффициента сопротивления трубы, которые как качественно, так и количественно хорошо согласуются с экспериментальными результатами [6–8]. В рамках модели вскрывается механизм снижения сопротивления при течении волокнистой суспензии по сравнению с сопротивлением ее жидкой фазы.

1. При движении в трубах волокнистой суспензии, концентрация которой превышает концентрацию седиментации, различают три режима течения: стержневое, смешанное и турбулентное [2, 3]. Режимы различаются поведением волокон в потоке и, как следствие, видом зависимости сопротивления от средней скорости.

Пусть волокнистая суспензия концентрации c движется в прямой круглой трубе радиуса R . Введем обозначения: v — средняя скорость суспензии; ρ , ν — соответственно плотность и кинематическая вязкость жидкой фазы; $Re = 2vR/\nu$ — число Рейнольдса; τ_w — модуль касательного напряжения на стенке трубы; $\lambda = 8\tau_w/\rho v^2$ — коэффициент сопротивления трубы. Тщательный анализ экспериментальных зависимостей $\lambda - Re$ в установившихся течениях суспензий, применяемых в целлюлозно-бумажном производстве [2, 3, 6–9], показывает, что они в логарифмических координатах имеют вид одной из кривых, 1 или 2, приведенных на фиг. 1. Кривая 1 относится к суспензиям малой концентрации порядка 0,1–0,5%; кривая 2 — к суспензиям более высокой концентрации 0,5–5,0%. Для сравнения приведена также зависимость для воды — кривая 3.



Фиг. 1

Каждому режиму течения на кривых 1, 2 соответствует свой участок. Одинаковые буквы на кривых указывают границы режимов, индексы у букв — номер кривой. AB — стержневое течение; BC — смешанное; CDE — турбулентное. Кривая 2 отличается от кривой 1 тем, что точка C_2 в отличие от точки C_1 является точкой локального минимума (точкой максимального падения сопротивления [3]); кроме того, на участке C_1D_1 коэффициент сопротивления λ медленно, но монотонно падает, тогда как на участке C_2D_2 он вначале растет до точки F_2 , а затем остается практически постоянным до точки D_2 .

Обзор основных экспериментальных результатов по течению суспензии на участке BCD , названному переходным, дан в [1]. Отметим, что в пристеночной области $r_0 < r < R$ профиль продольной скорости u имеет вид [3]

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{K} \ln \left(1 - \frac{r}{R} \right) + C, \quad v_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (1.1)$$

где r — расстояние от оси трубы; r_0 — радиус стержня; v_* — динамическая скорость; K и C — эмпирические константы при фиксированной скорости и концентрации суспензии. Величина K растет с ростом скорости течения и убывает с ростом концентрации суспензии [3, 6, 7].

Для переходного течения суспензии характерно меньшее сопротивление по сравнению с сопротивлением при течении чистой несущей жидкости, которая движется в той же трубе и с той же средней скоростью, причем с ростом концентрации суспензии эффект падения сопротивления увеличивается.

2. При переходном течении волокнистой суспензии в трубе в пристеночной области жидкая фаза оказывает сильное ориентирующее воздействие на взвешенные в ней волокна. В частности, у стенки волокна вытянуты вдоль линии тока [2, 3]. С другой стороны, ориентированные волокна в каждой точке потока задают направление и превращают суспензию в анизотропную жидкость.

Ниже показано, что характерные свойства переходного течения получают адекватное описание, если суспензию в пристеночной области рассматривать как ориентируемую жидкость Эриксена — Лесли [4, 5], на определяющие константы которой наложены некоторые условия. В качестве таковых примем условия, которые приводят к логарифмическому профилю продольной скорости u вблизи твердой стенки.

Чтобы найти эти условия, рассмотрим, как и в [4], установившееся напорное течение ориентируемой жидкости между параллельными плоскими стенками $y = \pm h$. Система координат декартова: ось x направлена по потоку; ось y — перпендикулярно стенкам.

Пусть жидкость несжимаемая и внешними массовыми силами можно пренебречь. Если принять

$$u_x = u(y), \quad u_y = u_z = 0, \quad n_x = \cos \theta(y), \quad n_y = \sin \theta(y), \quad n_z = 0 \quad (2.1)$$

где (u_x, u_y, u_z) — вектор скорости точек жидкости, (n_x, n_y, n_z) — вектор-ориентир и θ — угол, образуемый вектором-ориентиром с осью x , то система уравнений движения имеет вид [4]

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \mu_{xy}}{\partial y} + g_x = 0, \quad \frac{\partial \mu_{yy}}{\partial y} + g_y = 0 \quad (2.3)$$

$$\tau_{xy} = \eta(\theta) u'$$

$$\begin{aligned} \tau_{yy} = & -p - (k_{11} \cos^2 \theta + k_{33} \sin^2 \theta) \theta'^2 + \\ & + [\mu_1 \sin^2 \theta + \frac{1}{2}(\mu_2 + \mu_3 + \mu_5 + \mu_6) u' \sin \theta \cos \theta \\ \mu_{xy} = & \beta_2 \cos \theta - [k_{22} + (k_{33} - k_{22}) \sin^2 \theta] \theta' \sin \theta \\ \mu_{yy} = & \beta_2 \sin \theta + [k_{11} + (k_{33} - k_{22}) \sin^2 \theta] \theta' \cos \theta \\ g_x = & \gamma \cos \theta + \beta_2 \theta' \sin \theta + \frac{1}{2}(\lambda_2 - \lambda_1) u' \sin \theta \\ g_y = & \gamma \sin \theta - \beta_2 \theta' \cos \theta - (k_{33} - k_{22}) (\theta')^2 \sin \theta + \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) u \cos \theta \end{aligned} \quad (2.4)$$

$$2\eta(\theta) = 2\mu_1 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + (\mu_5 - \mu_2) \sin^2 \theta + (\mu_3 + \mu_6) \cos^2 \theta + \mu_4 \quad (2.5)$$

Здесь τ_{xy} , τ_{yy} — напряжения в жидкости, μ_{xy} , μ_{yy} и g_x , g_y — напряжения и компоненты внутренней объемной силы, действующие на вектор-ориентир, u' и θ' — производные по y . Коэффициенты λ_1 , λ_2 , μ_1, \dots, μ_6 , k_{11} , k_{22} , k_{33} — это определяющие, а β_2 , γ — неопределенные константы в модели Эриксона — Лесли, которые связаны следующими соотношениями [5]:

$$\begin{aligned} k_{11} &\geq 0, & k_{22} &\geq 0, & k_{33} &\geq 0 \\ |k_{24}| &\leq k_{22}, & |k_{11} - k_{22} - k_{24}| &\leq k_{11} \\ \mu_1 &\geq 0, & \mu_2 + \mu_3 &= \mu_6 - \mu_5 \\ 2\mu_1 + 3\mu_4 + 2\mu_5 + 2\mu_6 &\geq 0, & 2\mu_4 + \mu_5 + \mu_6 &\geq 0 \\ -4\lambda_1(2\mu_4 + \mu_5 + \mu_6) &\geq (\mu_2 + \mu_3 - \lambda_2)^2 \\ \lambda_1 &= \mu_2 - \mu_3, & \lambda_2 &= \mu_5 - \mu_6 \end{aligned} \quad (2.6)$$

где k_{24} — постоянная, не вошедшая в уравнения (2.4).

Подстановка последних четырех выражений (2.4) в уравнения (2.3) и исключение постоянных β_2 и γ приводят к уравнению, которому удовлетворяет угол θ

$$\frac{d}{d\theta}(\psi(\theta)\theta'') + (\lambda_1 + \lambda_2 \cos 2\theta)u' = 0 \quad (2.7)$$

$$\psi(\theta) = k_{11} \cos^2 \theta + k_{33} \sin^2 \theta$$

Найдем условия, при которых уравнения (2.2)–(2.7) вблизи стенки дают логарифмический профиль

$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{K} \ln \left(1 - \frac{y}{h} \right) + C \quad (2.8)$$

где K и C — постоянные. Ввиду симметрии течения относительно плоскости $y=0$ решение рассматривается при $0 \leq y \leq h$.

Вблизи твердой стенки, как и в теории пути смещения Прандтля, в первом равенстве (2.4) положим $\tau_{xy} = -\tau_w$

$$\eta(\theta)u' = -\tau_w \quad (2.9)$$

С учетом (2.9) уравнение (2.7) принимает вид

$$\frac{d}{d\theta}(\psi(\theta)\theta'') = \frac{\tau_w(\lambda_1 + \lambda_2 \cos 2\theta)}{\eta(\theta)} \quad (2.10)$$

Исключив $u(y)$ из (2.8) и (2.9), получим

$$\eta(\theta) = \rho v_* K (h - y) \quad (2.11)$$

Продифференцируем это равенство с учетом (2.5)

$$\theta' = \frac{2\rho v_* K}{(\mu_2 + \mu_3 - \mu_5 + \mu_6 - 2\mu_1 \cos 2\theta) \sin 2\theta} \quad (2.12)$$

Подстановка производной (2.12) в уравнение (2.10) должна обратить его в тождество, так как выражение (2.11) по своему смыслу является интегралом этого уравнения. При этом левая часть будет нечетной функцией от θ , а правая — четной. Тождество возможно только в том случае, если и левая и правая части обращаются в нуль. Отсюда следует

$$k_{11} = k_{33} = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad (2.13)$$

С учетом (2.13) соотношения (2.6) дают

$$\mu_2 = \mu_3 = 0, \quad \mu_5 = \mu_6, \quad k_{24} = -k_{22} \quad (2.14)$$

Равенства (2.13) и (2.14) — это искомые условия, которым должна удовлетворять модель Эриксона — Лесли, чтобы профиль скорости вблизи стенки имел вид (2.8).

3. Рассмотрим задачу об установившемся переходном течении волокнистой суспензии в прямой круглой трубе радиуса R . Примем цилиндрическую систему координат x, r, φ , в которой ось x направлена по оси трубы по течению. Область течения $0 \leq r \leq R$ состоит из двух подобластей: $0 \leq r \leq r_0$ — стержень течения; $r_0 < r \leq R$ — пристеночная область. Профиль

скорости следует искать, очевидно, только при $r_0 < r \leq R$, так как скорость стержня определится из условия непрерывности скорости на его границе $r=r_0$.

В пренебрежении внешними массовыми силами течение считается одномерным: $p=p(x)$, $dp/dx=\text{const}$; остальные характеристики потока зависят только от координаты r , причем скорости точек направлены параллельно оси трубы.

Скорость (u_x, u_r, u_φ) и вектор-ориентир (n_x, n_r, n_φ) будем искать в виде

$$u_x=u(r), \quad u_r=u_\varphi=0, \quad n_x=\cos \theta(r), \quad n_r=\sin \theta(r), \quad n_\varphi=0 \quad (3.1)$$

Жидкость считается несжимаемой, и тогда скорости (3.1) удовлетворяют уравнению неразрывности тождественно.

В пристеночной области суспензию будем рассматривать как ориентируемую жидкость Эриксона — Лесли с условиями (2.13) и (2.14), реологические свойства которой усложнены присутствием твердой фазы — волокон. Примем, что полные напряжения в точке суспензии являются суммами напряжений τ_{ij} модели Эриксона — Лесли и напряжений σ_{ij} , характеризующих взаимодействие волокон. Таким образом, уравнения движения суспензии и уравнения состояния (2.4) имеют вид

$$\frac{1}{r} \frac{dr(\tau_{xr} + \sigma_{xr})}{dr} = \frac{dp}{dx} \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{d(r\mu_{xr})}{dr} + g_x = 0, \quad \frac{1}{r} \frac{d(r\mu_{rr})}{dr} + g_r = 0 \quad (3.3)$$

$$\tau_{xr} = (\mu_1 \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \mu_0) u', \quad 2\mu_0 = \mu_4 + \mu_5 \quad (3.4)$$

$$\mu_{xr} = \beta_2 \cos \theta - k_{22} \theta' \sin \theta \cos^2 \theta$$

$$\mu_{rr} = \beta_2 \sin \theta - k_{22} \theta' \sin^2 \theta \cos \theta$$

$$g_x = \gamma \cos \theta - \beta_2 \theta' \sin \theta$$

$$g_r = \gamma \sin \theta - \beta_2 \theta' \cos \theta + k_{22} \theta'^2 \sin \theta \quad (3.5)$$

Напряжение σ_{xr} определим формулой $\sigma_{xr} = \sigma_0$, где $|\sigma_0|$ — максимальное касательное напряжение, при котором начинается разрушение сети волокон. В п. 4 показано, что эта гипотеза хорошо оправдывается экспериментами. Постоянная σ_0 , а также определяющие константы в уравнениях (3.4) и (3.5), очевидно, зависят от сорта волокон и концентрации суспензии.

Граничные условия для скорости целесообразно сформулировать ниже. Для угла θ ориентация волокон вдоль линии тока у стенки дает $\theta(R) = 0$. Если выражения (3.5) подставить в уравнения (3.3), то легко видеть, что одно из них является следствием другого при произвольных γ и β_2 . Учитывая, что эти неопределенные постоянные введены с целью обеспечить совместность системы (3.3), (3.5), для простоты положим $\gamma = \beta_2 = 0$.

Подставляя выражения μ_{xr} и g_x из (3.5) в первое уравнение (3.3) и интегрируя его, имеем

$$r \theta' \sin \theta \cos^2 \theta = -A, \quad A = -r_0 \theta_0' \sin \theta_0 \cos^2 \theta_0 \quad (3.6)$$

где θ_0 — угол наклона вектора-ориентира на поверхности стержня $r=r_0$ и θ_0' — соответствующая производная.

Интегрирование уравнения (3.6) с граничным условием $\theta(R) = 0$ дает

$$1 - \cos^3 \theta = -3A \ln \frac{r}{R} \approx 3A \left(1 - \frac{r}{R}\right) \quad \left(\frac{r}{R} \ll 1\right) \quad (3.7)$$

Зная $\theta(r)$, найдем $u=u(r)$. Интегрируя уравнение (3.2) с учетом равенств (3.4) и $\sigma_{xr} = \sigma_0$ при условии, что напряжения τ_{xr} и σ_{xr} конечны на оси трубы, получим

$$(\mu_0 + \mu_1 \sin^2 \theta \cos^2 \theta) \frac{du}{dr} = - \left(\sigma_0 + \tau_w \frac{r}{R} \right) \quad (3.8)$$

При $r/R \ll 1$ в силу (3.7) общее решение уравнения (3.8)

$$\begin{aligned} \frac{3\mu_1 A^2}{\tau_w R} u = & \frac{3A(1 + \sigma_0/\tau_w) - 1}{2q^2 - 1} \left(\sqrt{q^2 - 1} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{q^2 - 1}} + \frac{q}{2} \ln \frac{q-t}{q+t} \right) + \\ & + \frac{1+2\alpha}{4\sqrt{1+4\alpha}} \ln \frac{q^2 - t^2}{q^2 + t^2 - 1} + \frac{1}{4} \ln |t^4 - t^2 - \alpha| + \frac{t^2}{2} + C \\ 2q^2 = & 1 + \sqrt{1+4\alpha}, \quad \alpha = \mu_0/\mu_1, \quad t = \left[1 - 3A \left(1 - \frac{r}{R} \right) \right]^{1/2} \end{aligned} \quad (3.9)$$

где C — постоянная интегрирования.

Опыты [2] показывают, что при движении суспензии волокна не прилипают к стенке трубы, поэтому в качестве граничного условия естественно принять $u(R) = u_0$, где u_0 — некоторая эмпирическая константа, зависящая от сорта волокон, концентрации суспензии и, возможно, от средней скорости течения. Это условие позволяет найти C в формуле (3.9).

Рассмотрим два предельных случая.

Первый случай — неразвитое переходное течение. Пусть суспензия движется в режиме, представляющем самое начало переходного течения. В этом случае пристеночная область тонкая, угол θ мал и можно считать $\mu_1 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \ll \mu_0$. Интегрирование уравнения (3.8) с граничным условием $u(R) = u_0$ дает параболический профиль

$$u = u_0 + \frac{\sigma_0 R}{\mu_0} \left(1 - \frac{r}{R} \right) + \frac{\tau_w R}{2\mu_0} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \quad (3.10)$$

Отсюда при $r = r_0$ получается скорость стержня $u(r_0)$.

Если средняя скорость суспензии уменьшать до величины, при которой начинается переходное течение, то с точностью до очень малой толщины пристеночного слоя в стержневом течении радиус стержня r_0 будет приближаться к радиусу трубы R . Из формулы (3.10) следует, что $u(r_0) \rightarrow u_0$ при $r_0 \rightarrow R$. Таким образом, в начале переходного течения за скорость u_0 можно взять скорость стержня на границе стержневого и переходного режимов. В п. 4 показано, что эксперименты оправдывают это утверждение.

Второй предельный случай — развитое переходное течение. Пусть $\mu_1 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \gg \mu_0$. Положим $\mu_0 = 0$. Тогда $\alpha = 0$, $q = 1$ и решение (3.9) принимает вид

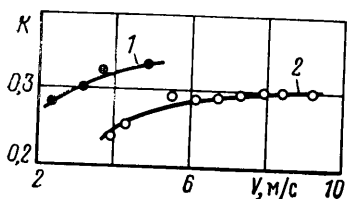
$$\frac{3\mu_1 A^2}{\tau_w R} u = \frac{3A}{2} \left(1 + \frac{\sigma_0}{\tau_w} \right) \ln \frac{1-t}{1+t} + \ln(1+t) + \frac{t^2}{2} + C \quad (3.11)$$

Если $1-t$ мало, то из (3.11) следует формула, совпадающая с экспериментальной формулой (1.1)

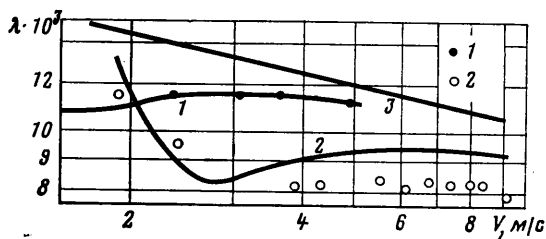
$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{K} \ln \left(1 - \frac{r}{R} \right) + C, \quad \frac{1}{K} = \frac{R\sqrt{\rho}\tau_w}{2\mu_1 A} \left(1 + \frac{\sigma_0}{\tau_w} \right) \quad (3.12)$$

Граничное условие $u(R) = u_0$ не позволяет найти постоянную C в формулах (3.11) и (3.12), так как при $r = R$ правые части этих формул обращаются в бесконечность. Для определения C воспользуемся следующим эмпирическим условием [3]: с точностью, допускаемой экспериментами, профили скоростей всех волокнистых суспензий проходят через точку $u/v_* = 14$; $v_*(R-r)/v = 30$. Тогда формула (3.12) принимает вид

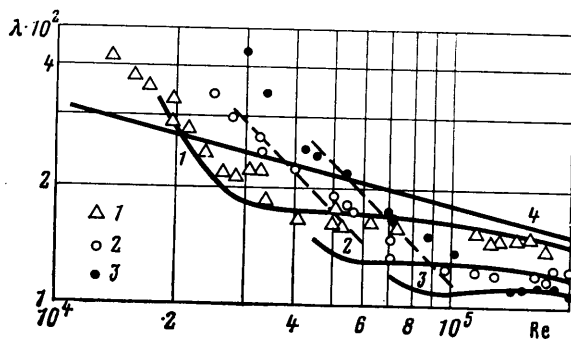
$$\frac{u}{v_*} = \frac{1}{K} \ln \frac{v_*(R-r)}{30v} + 14 \quad (3.13)$$



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

Аналогично определяется C в формуле (3.11).

Чтобы найти коэффициент сопротивления λ , надо проинтегрировать профиль скорости по области $r_0 \leq r \leq R$, найти скорость стержня $u(r_0)$ и затем перейти к средней скорости v .

Радиус стержня r_0 определяет условие равенства полных касательных напряжений на поверхности стержня предельному напряжению $|\sigma_0|$ [1]

$$r_0 = |\sigma_0| R / \tau_w \quad (3.14)$$

В предельных случаях, когда профиль скорости определяется формулами (3.10) или (3.13), соответственно имеем

$$\lambda = \frac{32\mu_0}{\rho v R (1-\xi^4)} \left[1 - \frac{u_0}{v} - \frac{\sigma_0 R (1-\xi^3)}{3\mu_0 v} \right], \quad \xi = \frac{r_0}{R} \quad (3.15)$$

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1 + \sigma_0 / \tau_w}{\kappa} \left[\ln \frac{\text{Re} \sqrt{\lambda} (1-\xi)}{120 \sqrt{2}} + \frac{\xi^2}{2} + \xi - \frac{3}{2} \right] + 14 \quad (3.16)$$

$$\kappa = - \frac{2\mu_1 \xi \theta_0' \sin \theta_0 \cos^2 \theta_0}{\sqrt{\rho \tau_w}} \quad (3.17)$$

4. Проанализируем решение п. 3 и сравним его с некоторыми экспериментальными результатами работ [6–8].

На фиг. 2 и 3 точки 1, 2 обозначают результаты опытов [6, 7] по определению зависимости $K(v)$ и $\lambda(v)$ для водных суспензий сосновой крафт-целлюлозы с концентрациями соответственно $c=0,42; 0,79\%$; диаметр трубы 100 мм. На фиг. 4 точками 1–3 отмечены результаты измерений по определению зависимости $\lambda(\text{Re})$ для водных суспензий хвойной крафт-целлюлозы Long Lac 17 с концентрациями $c=0,25; 0,50; 0,75\%$, диаметр трубы 50,8 мм.

Линии на фиг. 2–4 – это результаты расчетов по формулам п. 3 (подробности ниже). Поскольку в работах [6–8] температура не указана, то в расчетах для определенности принято $t=20$ С.

Из формул (3.6), (3.12) и (3.17)

$$\frac{1}{K} = \frac{1}{\kappa} \left(1 + \frac{\sigma_0}{\tau_w} \right) \quad (4.1)$$

Если $\kappa=0,35$, $\sigma_0=2$ Па при $c=0,42\%$ и $\kappa=0,32$, $\sigma_0=5,25$ Па при $c=0,79\%$, то значения K , вычисленные по формуле (4.1) (кривые на фиг. 2; 1 — $c=0,42\%$, 2 — $c=0,79\%$), близки к экспериментальным значениям. Поэтому примем, что κ не зависит от скорости, а определяется сортом волокон и концентрацией.

Легко видеть, что при $\kappa=\text{const}$ и $\sigma_0>0$ в соответствии с опытами [6, 7] величина K возрастает с ростом τ_w , а следовательно, и скорости v , и убывает с ростом концентрации, вызывающей рост σ_0 .

Для тех же суспензий на фиг. 3 приведены графики зависимости $\lambda(v)$, полученные вычислением по формулам (3.16) при тех же, что и на фиг. 2, значениях κ и σ_0 для суспензии соответствующей концентрации. При $c=0,42\%$ экспериментальные точки точно легли на расчетную кривую 1; при $c=0,79\%$ расчетная кривая 2 отклоняется от экспериментальных точек в пределах 10%. Прямая 3 — график $\lambda-v$ для воды.

На фиг. 4 графики 1-3 — это расчетные кривые зависимости $\lambda(\text{Re})$ для суспензий крафт-целлюлозы Long Lac 17: 2, 3 штрихпунктирные — по формуле (3.15), 1-3 сплошные — по формуле (3.16) (кривые 1-4 соответствуют $c=0,25; 0,50; 0,75; 0\%$). При расчетах в качестве σ_0 и u_0 приняты напряжение τ_w и средняя скорость в первой точке излома графика $\lambda(\text{Re})$ работы [8], соответствующей началу переходного течения. Параметры κ , μ_0 определены путем обработки экспериментальных данных [8]. Таким образом, найдено: $\kappa=0,36$, $\sigma_0=0,50$ Па при $c=0,25\%$; $\kappa=0,29$, $\sigma_0=1,10$ Па, $\mu_0=0,022$ Н·с/м², $u_0=0,55$ м/с при $c=0,50\%$; $\kappa=0,28$, $\sigma_0=2,25$ Па, $\mu_0=0,037$ Н·с/м², $u_0=0,86$ м/с при $c=0,75\%$.

Сопоставление расчетных и экспериментальных результатов показывает, что первый предельный случай — это действительно неразвитое переходное течение (штрихпунктирные кривые 2 и 3), а второй предельный случай — развитое переходное течение (сплошные кривые 2 и 3). Экспериментальные точки значительно отклоняются от расчетных кривых только при скоростях, когда применение предельных формул (3.15) и (3.16) неоправданно.

Кривая 1 целиком получена расчетом по формуле (3.16), причем крайняя левая точка кривой найдена при числе Рейнольдса, близком значению $\text{Re}=16\,000$ в нижней границе переходного течения.

Как важное свидетельство в пользу рассматриваемой модели подчеркнем качественное сходство кривых на фиг. 1 и 3, 4. Кривая 1 на фиг. 1 похожа на кривую 1 на фиг. 4 во всем диапазоне скоростей; обе кривые на фиг. 3 и сплошные кривые 2, 3 на фиг. 4 аналогичны участку кривой $C_2F_2D_2$ на фиг. 1.

Различный характер кривых 1 и 2 на фиг. 1 выявляется при исследовании на экстремум функции $\lambda=\lambda(v)$, определяемой формулой (3.16). С учетом того что при положительном σ_0 имеем $\xi=\sigma_0/\tau_w$, формулу (3.16) перепишем в виде

$$\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{\lambda}} = \frac{y(\xi)}{\kappa} + 14 \quad (4.2)$$

$$y(\xi) = (1+\xi) \left(\ln \frac{R\sqrt{\sigma_0}(1-\xi)}{30\nu\sqrt{\rho\xi}} + \frac{\xi^2}{2} + \xi - \frac{3}{2} \right)$$

Очевидно, максимум функции $y(\xi)$ совпадает с минимумом функции $\lambda(\xi)$. Условие $y'(\xi)=0$ приводит к уравнению

$$H(\xi) = \Phi, \quad \Phi = R\sqrt{\sigma_0}/\nu\sqrt{\rho} \quad (4.3)$$

$$H(\xi) = \exp \left(\ln \frac{30\sqrt{\xi}}{1-\xi} + \frac{1+\xi}{1-\xi} + \frac{1}{2\xi} - \frac{3}{2}\xi^2 - 3\xi + 1 \right)$$

Функция $H(\xi)$ имеет одну точку экстремума — точку минимума $\xi_0=0,363$, $H_0=H(\xi_0)=718$. Если $\Phi > H_0$, то уравнение (4.3) имеет два решения, причем, как показывает численный анализ, одно из них является точкой минимума, а другое — точкой максимума функции $\lambda(\xi)$. Так как $\xi=r_0/R$ монотонно зависит от скорости (убывает [6, 7]), то график $\lambda=\lambda(v)$ или $\lambda=\lambda(\text{Re})$ имеет вид кривой 2 на фиг. 1. При $\Phi < H_0$ уравнение (4.3) не имеет решений, кривая $\lambda(\xi)$ не имеет точек экстремума и график $\lambda=\lambda(\text{Re})$ имеет вид кривой 1.

В случае течения суспензии Long Lac 17 $\Phi(0,25)=564$, $\Phi(0,50)=837$, $\Phi(0,75)=1200$. Сравнение Φ при $c=0,25$; 0,50; 0,75% с H_0 объясняет вид кривых на фиг. 4. То же самое можно сказать о кривых на фиг. 3.

Слабым изменением функции $\lambda(\xi)$ в окрестности точки максимума объясняется наблюдаемое в экспериментах постоянство коэффициента сопротивления λ в некотором диапазоне скоростей переходного режима.

Все сказанное выше убеждает в адекватности принятой модели переходного течения. Кроме того, становится понятным механизм понижения сопротивления при течении суспензии по сравнению с сопротивлением чистой несущей жидкости. Не турбулентность, как в чистой жидкости, а ориентация волокон и их взаимодействие с жидкой фазой в пристеночной области, отсутствие потерь в стержне обеспечивают более низкое сопротивление суспензии.

Отметим, что полуэмпирическая модель [1] дает только одну формулу сопротивления, которая от формулы (3.16) отличается лишь тем, что множитель $1+\sigma_0/\tau_w$ не в первой степени, а в степени $1/2$. Обе формулы дают сходные зависимости $\lambda(\text{Re})$. Расчеты с суспензиями Long Lac 17 показывают, что формула (3.16) физически более точна, так как независимо определяемое предельное напряжение сдвига σ_0 дает зависимость $\lambda(\text{Re})$, более близкую к результатам опытов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бабкин В. А. Сопротивление при переходном течении волокнистой суспензии в трубе.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 3, с. 40–45.
2. Терентьев О. А. Гидродинамика волокнистых суспензий в целлюлозно-бумажном производстве. М.: Лесн. пром-сть, 1980. 248 с.
3. Norman B. G., Moller K., Ek R., Duffy G. G. Hydrodynamics of paper making fibres in water suspension.— In: Fibre-water interactions in paper-making. London: Tech. Sect. Brit. Paper and Board Makers Assn., 1978, v. 1, p. 195–246.
4. Leslie F. M. Some constitutive equations for liquid crystals.— Arch. Rat. Mech. and Analysis, 1968, v. 28, № 4, p. 265–283.
5. Чандрасекар С. Жидкие кристаллы. М.: Мир, 1980. 344 с.
6. Lee P. F. W., Duffy G. G. An analysis of the drag reducing regime of pulp suspension flow.— Tappi, 1976, v. 59, № 8, p. 119–122.
7. Lee P. F. W., Duffy G. G. Velocity profiles in the drag reducing regime of pulp suspension flow.— Appita, 1976, v. 30, № 3, p. 219–226.
8. Daily W. J., Bugliarello G. Basic data for dilute fiber suspensions in uniform flow with shear.— Tappi, 1961, v. 44, № 7, p. 497–512.
9. Durst R. E., Jennes L. C. The flow properties of paper pulp stocks. I. Relationship of shear value to pipe friction for bleached sulphite pulp slurries.— Tappi, 1954, v. 37, № 10, p. 417–422.

Петрозаводск

Поступила в редакцию
23.X.1984