

УДК 532.528

**ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ФОРМЫ ТОНКОЙ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ
КАВЕРНЫ НА ОСНОВЕ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО
УРАВНЕНИЯ**

НЕСТЕРУК И. Г.

На основе предложенного в [1] принципа «независимости расширения» были получены простые дифференциальные уравнения, описывающие форму как стационарной, так и нестационарной кавитационной полости [2–4], и решения некоторых задач ([1, 5]), использующие эмпирические константы и зависимости. Математически замкнутая постановка задачи была предложена в работах [6–8]. В настоящее время известны различные варианты уравнений для формы тонкой осесимметричной стационарной каверны и их решения (например, [8–11]), а также численные решения стационарной задачи в точной постановке (без предположения о тонкости каверны [12–14]). В нестационарном случае известны только интегро-дифференциальные уравнения для формы каверны [3, 15] и решения уравнения первого приближения [15]. Уравнения первого приближения обеспечивают хорошее качественное описание формы стационарных и нестационарных каверн [11, 15]. Для достижения количественного совпадения необходимо решать интегродифференциальные уравнения.

В настоящей работе решение такого уравнения сведено к интегрированию цепочки линейных уравнений с частными производными первого порядка. Если ограничиться двумя первыми членами этой цепочки, то полученные уравнения второго приближения обеспечивают хорошую точность и достаточно просты. В частности, в стационарном случае можно получить аналитические формулы для радиуса каверны при обтекании невесомой и тяжелой жидкостью. В случае нестационарных каверн получено аналитическое выражение для второй производной от радиуса.

1. Асимптотическое разложение решения интегродифференциального уравнения. В [15] в цилиндрической системе координат x, r получено следующее уравнение для радиуса $R(x, t)$ тонкой осесимметричной нестационарной каверны:

$$\varepsilon^2 \ln \varepsilon L(A) + \varepsilon^2 [L(A) \ln F + L(B) + 0,5A^2 F^{-2}] + \\ + O(\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon) = 0,5\sigma \pm x \text{Fr}^{-2} \quad (1.1)$$

$$A(x, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F^2}{\partial x} + \tau \frac{\partial F^2}{\partial t} \right); \quad F(x, t) = \frac{R(x, t)}{\varepsilon} \quad (1.2)$$

$$B(x, t) = -A \ln 2 - \frac{1}{2} \int_{-l_k(t)}^{l(t)} \frac{\partial A}{\partial \xi} \text{sign}(x - \xi) \ln |x - \xi| d\xi \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \tau(t) &= \frac{L'}{V_\infty'(t)t_x'}; \quad L(u) = \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} + Su; \quad \text{Fr}(t) = \frac{V_\infty'(t)}{\sqrt{g'L'}} \\ S(t) &= \frac{L'}{V_\infty'^2(t)} \frac{dV_\infty'}{dt}; \quad \sigma(t) = \frac{2[p_\infty'(0, t) - p_k'(t)]}{\rho' V_\infty'^2(t)} \end{aligned}$$

Здесь ε — малый параметр, отношение характерного поперечного размера системы кавитатор — каверна — замыкатель к продольному L' ; $l_k(t)$, $l(t)$ — длины кавитатора и каверны с замыкателем; $p_\infty'(0, t)$ — давление

в жидкости далеко от тела на уровне точки схода струй ($x=0$); $p_k'(t)$ — давление в каверне; скорости обезразмерены делением на текущее значение скорости набегающего потока $V_\infty'(t)$, длины и времена — на постоянные значения L' , t_x' , штрихами обозначаются размерные величины.

Решение нелинейного интеграло-дифференциального уравнения (1.1) предлагается искать в виде асимптотического ряда. Представим в виде такого ряда функцию

$$F^2(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(\varepsilon) f_i(x, t); \quad 1 \gg \mu_1 \gg \mu_2 \gg \dots \gg \mu_i \gg \dots \quad (1.4)$$

Тогда из формул (1.2)–(1.4) следует

$$R^2(x, t) = \varepsilon^2 \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(\varepsilon) f_i(x, t); \quad A(x, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(\varepsilon) A_i(x, t) \quad (1.5)$$

$$A_i(x, t) = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial f_i}{\partial x} + \tau \frac{\partial f_i}{\partial t} \right]; \quad B(x, t) = B_0 + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i(\varepsilon) B_i \quad (1.6)$$

$$B_i(x, t) = -A_i(x, t) \ln 2 - \frac{1}{2} \int_0^{l(t)} \frac{\partial A_i(\xi, t)}{\partial \xi} \operatorname{sign}(x-\xi) \ln |x-\xi| d\xi \quad (1.7)$$

$$B_0(x, t) = -\frac{1}{4\varepsilon^2} \int_{-l_k(t)}^0 \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\frac{\partial R_k^2(\xi, t)}{\partial \xi} + \tau \frac{\partial R_k^2(\xi, t)}{\partial t} \right] \operatorname{sign}(x-\xi) \ln |x-\xi| d\xi$$

Здесь $R_k(x, t)$ — радиус кавитатора. Поскольку $R_k(x, t)$ — заданная функция, то B_0 известна. В частности, для кавитатора в форме конуса с тангенсом полуугла при вершине R_k функция $B_0(x)$ принимает вид

$$B_0(x) = 0,5 R_k^2 \varepsilon^{-2} [(x+l_k) (\ln(x+l_k)-1) - x (\ln x - 1)]$$

Подставив разложения (1.4)–(1.6) в уравнение (1.1), получим

$$\begin{aligned} & \varepsilon^2 \ln \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i L(A_i) + \varepsilon^2 \left[0,5 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i L(A_i) \right) \ln \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i f_i \right) + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i L(B_i) + L(B_0) + 0,5 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i A_i \right)^2 \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i f_i \right)^{-1} \right] + \\ & + O(\varepsilon^4 \ln^2 \varepsilon) = 0,5 \sigma \pm x \operatorname{Fr}^{-2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Последовательное выделение из соотношения (1.8) членов различного порядка малости позволяет получить уравнения для f_i и определить функции $\mu_i(\varepsilon)$. Подробное описание этого процесса приведено в [16]. Приводя старший член $\varepsilon^2 \ln \varepsilon L(A_1)$ правой части выражения (1.8), получаем уравнение

$$\varepsilon^2 \ln \varepsilon \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \tau \frac{\partial A_1}{\partial t} + A_1 S \right) = \frac{\sigma}{2} \pm \frac{x}{\operatorname{Fr}^2} \quad (1.9)$$

совпадающее с уравнением работы [15]. Назовем это соотношение уравнением первого приближения. Для определения формы каверны в первом приближении необходимо, кроме уравнения (1.9), решать первое из уравнений (1.6) при $i=1$.

Выделение в соотношении (1.8) следующих по порядку членов дает

$$L(A_2) = -0,5L(A_1)\ln f_1 - L(B_0 + B_1) - 0,5A_1^2 f_1^{-1}; \quad \mu_2 = \ln^{-1} \varepsilon \quad (1.10)$$

Функции $A_1(x, t)$, $f_1(x, t)$ могут быть найдены из уравнений (1.9), (1.6). Входящую в уравнение для B_1 неизвестную длину каверны с замыкательем $l(t)$ можно определить [15] как решение уравнения $R(l(t), t) = 0$. Поскольку функция $R(x, t)$ неизвестна, то вместо этого уравнения можно использовать решение уравнения первого приближения, т. е. определять $l(t)$ из уравнения $f_1(l(t), t) = 0$. Очевидно, что возникающая при этом ошибка имеет порядок меньший, чем порядок членов в уравнении (1.10). Для определения радиуса каверны необходимо дополнительное решать первое из уравнений (1.6) при $i=2$.

Выделение следующих по порядку членов дает [16]

$$L(A_3) = \frac{f_2 A_1^2}{2f_1^2} - \frac{1}{2} L(A_2) \ln f_1 - \frac{f_2 L(A_1)}{2f_1} - \frac{A_1 A_2}{f_1} - L(B_2) \quad (1.11)$$

$$\mu_3(\varepsilon) = (\ln \varepsilon)^{-2}; \quad f_1(l(t), t) + \ln^{-1} \varepsilon f_2(l(t), t) = 0 \quad (1.12)$$

Уравнение (1.11) вместе с соотношениями (1.6), (1.7), (1.12) позволяют найти A_3 , f_3 и определить радиус каверны в следующем приближении.

Продолжая действовать подобным образом, можно вычислить любой член разложения (1.5). Нетрудно показать, что $\mu_i = (\ln \varepsilon)^{1-i}$. Получение уравнений для A_i при произвольном i , хотя и не связано с принципиальными трудностями, представляет собой довольно трудоемкую операцию.

Таким образом, задача определения формы кавитационной полости с учетом как членов порядка $\varepsilon^2 \ln \varepsilon$, так и всех членов порядка ε^2 сводится к рекуррентной цепочке уравнений вида

$$L(A_{i+1}) = H_{i+1}(A_1, A_2, \dots, A_i, f_1, f_2, \dots, f_i) - L(B_i) \quad (1.13)$$

Здесь H_{i+1} — нелинейный оператор. Уравнения (1.13) вместе с соотношениями (1.6), (1.7) и условиями для определения $l(t)$ в функциях $B_i(x, t)$

$$\sum_{s=1}^i f_s(l(t), t) (\ln \varepsilon)^{1-s} = 0$$

позволяют вычислять члены рядов (1.4), (1.5).

2. Уравнение второго приближения. Если в разложениях (1.4), (1.5) учесть два первых члена, то уравнение для радиуса каверны запишется в виде

$$L\left(\frac{\partial R^2}{\partial x} + \tau \frac{\partial R^2}{\partial t}\right) = \frac{1}{\ln \varepsilon} \left(\sigma \pm \frac{2x}{Fr^2} \right) - \frac{\varepsilon^2}{\ln \varepsilon} \left\{ \frac{A_1^2}{f_1} + L(A_1) \ln f_1 + 2L(B_0 + B_1) \right\} + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\ln^2 \varepsilon}\right) \quad (2.1)$$

Соотношение (2.1) будем называть уравнением второго приближения. Для определения функций, стоящих в правой части уравнения (2.1), можно использовать полученные в [11, 15] решения стационарного и нестационарного уравнений первого приближения, а для определения функции $l(t)$ — уравнение $f_1(l(t), t) = 0$.

В соотношение (2.1), так же как и в уравнения первого приближения и их решения, входит неизвестная величина $\ln \varepsilon$, для определения которой можно использовать следующий итерационный процесс: задавать некоторое начальное значение этой величины; рассчитывать по уравнению (2.1) форму каверны; определять новое значение параметра ε ; с но-

вым значением величины $\ln \varepsilon$ опять производить расчет по уравнению (2.1); описанную процедуру повторять до сходимости.

Для оценки точности уравнения второго приближения достаточно заметить, что отношение порядка отброшенных членов к порядку старших составляет $(\ln \varepsilon)^{-2}$. Поэтому для величин ε , равных 0,1; 0,05; 0,01, относительная ошибка оценивается соответственно значениями 19, 11, 5%. Приведенные данные свидетельствуют, что уравнение второго приближения обеспечивает значительно более высокую точность, чем уравнение первого приближения, для которого относительная погрешность оценивается величиной $|\ln \varepsilon|^{-1}$. Если использовать следующее приближение (уравнения (1.11), (1.12)), то относительная ошибка составит $|\ln \varepsilon|^{-3}$.

В стационарном случае ($L(u) = du/dx$) уравнение второго приближения принимает вид

$$\frac{d^2R^2}{dx^2} = \frac{\sigma \pm 2x \text{Fr}^{-2}}{\ln \varepsilon} - \frac{\varepsilon^2}{\ln \varepsilon} \left[\frac{dA_1}{dx} \ln f_1 + 2 \frac{d}{dx} (B_0 + B_1) + \frac{A_1^2}{f_1} \right] + O\left(\frac{\varepsilon^2}{\ln^2 \varepsilon}\right) \quad (2.2)$$

Уравнение такой же точности использовалось в [17] для определения формы стационарной каверны в невесомой жидкости, образованной точечным кавитатором. Для расчета каверны за насадком определенной формы и размеров по формуле работы [17] необходимо использовать эмпирические зависимости длины каверны или радиуса ее миделя от радиуса кавитатора.

Если использовать полученное в [11] решение уравнения первого приближения, то соотношение (2.2) для кавитатора конической формы с тангенсом полуугла при вершине R_4 принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d^2R^2}{dx^2} &= \frac{1}{\ln \varepsilon} \left\{ \left(\sigma \pm \frac{2x}{\text{Fr}^2} \right) \left(1 - \frac{1}{\ln \varepsilon} \ln \frac{f_1}{4} \right) + \frac{\varepsilon^2}{4f_1} \left(\frac{df_1}{dx} \right)^2 - \right. \\ &- \left. \left(R_4^2 - \frac{\sigma}{2 \ln \varepsilon} \right) \ln x + R_4^2 \ln(x+l_k) + \frac{\sigma}{2 \ln \varepsilon} \ln(l-x) \pm \frac{l-2x+x \ln(x(l-x))}{\text{Fr}^2 \ln \varepsilon} \right\} \quad (2.3) \\ \varepsilon^2 f_1 &= \frac{\sigma x^2}{2 \ln \varepsilon} \pm \frac{x^3}{3 \text{Fr}^2 \ln \varepsilon} + 2R_3 R_4 x + R_3 \end{aligned}$$

Здесь R_3 , R_4 – радиус кавитатора и производная от него в точке схода струй ($x=0$). Для определения неизвестных величин l_k , l , R_3 можно использовать выписанную в [11] систему уравнений. Для кавитатора, имеющего отличную от конической форму, уравнение (2.3) несколько изменяется. Простота уравнения (2.3) позволяет получать аналитические формулы для радиуса каверны при установившемся обтекании как невесомой, так и тяжелой жидкостью. Например, в случае невесомой жидкости можно получить следующее выражение для квадрата радиуса каверны:

$$\begin{aligned} R^2(x) &= R_3^2 + (\ln \varepsilon)^{-1} \{ 0,5\sigma x^2 + (\alpha x^2 + 2R_3 R_4 x) \ln(2\varepsilon) + \\ &+ 0,25 [R_4^2(x+l_k)^2(2 \ln(x+l_k)-3) - (R_4^2-\alpha)x^2(2 \ln x-3) - \\ &- \alpha l^2(2 \ln l-3) - \alpha x^2 \ln(-\alpha) - R_4^2 l_k^2(2 \ln l_k-3) - 2D_1 + \\ &+ \alpha(l-x)^2(2 \ln(l-x)-3)] - 0,125\alpha [(l-x)^2(2 \ln(l-x)-3) - l^2(2 \ln l-3) + \\ &+ (x-x_2)^2(2 \ln(x-x_2)-3) - x_2^2(2 \ln(-x_2)-3)] + W_1 x \} \quad (2.4) \end{aligned}$$

$$W_1 = -2R_3 R_4 \ln 2 + R_3 R_4 \ln R_3 + 0,5\alpha l (\ln l - 1) + \\ + 0,5\alpha x_2 (1 - \ln(-x_2)) - R_4^2 l_k (\ln l_k - 1)$$

$$\begin{aligned} D_1 &= x(0,5x\alpha + R_3 R_4) \ln(-\alpha) + 0,5\alpha [(l-x)^2 \ln(l-x) - 0,5(l-x)^2 + \\ &+ (x-x_2)^2 \ln(x-x_2) - 0,5(x-x_2)^2 - l^2 \ln l + 0,5l^2 - x_2 \ln(-x_2) + 0,5x_2^2] + \\ &+ \alpha l^2 (\ln l - 1) - \alpha l (l-x) (\ln(l-x) - 1) + \alpha x_2 (x-x_2) (\ln(x-x_2) - 1) + \\ &+ \alpha x_2^2 (\ln(-x_2) - 1) - R_3 R_4 [(l-x) (\ln(l-x) - 1) - \\ &- l (\ln l - 1) - (x-x_2) (\ln(x-x_2) - 1) - x_2 (\ln(-x_2) - 1)] \end{aligned}$$

$$l = -\frac{R_3 R_4}{\alpha} + \sqrt{\frac{R_3^2 R_4^2}{\alpha^2} - \frac{R_3^2}{\alpha}}; \quad \alpha = \frac{0,5\sigma}{\ln \varepsilon}$$

$$x_2 = -\frac{R_3 R_4}{\alpha} - \sqrt{\frac{R_3^2 R_4^2}{\alpha^2} - \frac{R_3^2}{\alpha}}$$

В [16] получены аналогичные (2.4) формулы для течений тяжелой жидкости. Результаты расчетов по уравнению (2.4) приведены на фигуре. Кривые 1, 2 представляют собой зависимости максимального радиуса каверны R_{\max} от числа кавитации для конусов с углами при вершине 45° и $2 \operatorname{arctg} 0,3$. Кривые 3, 4 дают зависимости длины каверны l для тех же конусов (все размеры отнесены к радиусу донного сечения кавитатора). Для сравнения приведены (кривые 5, 6) результаты расчетов длины каверны за конусом с углом при вершине $2 \operatorname{arctg} 0,3$, выполненных в [3, 18]. Близость кривых 4–6 позволяет судить о достаточно хорошей точности уравнений второго приближения. Точками отмечены экспериментальные результаты для конуса с углом при вершине 45° , заимствованные в [19]. Расхождения экспериментальных данных с кривыми 1 и 3 не превышают 20%.

Таким образом, уравнение второго приближения дает возможность получить достаточно точные аналитические формулы для радиуса каверны при установившемся обтекании тонкого кавитатора как невесомой, так и тяжелой жидкостью.

Отметим, что из уравнения (2.3) следует наличие особенности у второй производной от радиуса каверны в точке схода струй. Действительно

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R^2}{dx^2} &= \frac{\ln x}{\ln \varepsilon} \left(\frac{\sigma}{2 \ln \varepsilon} - R_4^2 \right) + \\ &+ \frac{1}{\ln \varepsilon} \left[\sigma - \alpha \ln \frac{R_3^2}{4 \varepsilon^2 l} \pm \frac{l}{Fr^2 \ln \varepsilon} + \right. \\ &\quad \left. + R_4 (1 + \ln l_k) \right] + o(x); \\ o(x) &\rightarrow 0, x \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Из уравнения (2.5) видно, что каверна за тонким конусом имеет в точке схода бесконечную кривизну, что согласуется с результатами работы [20] и экспериментальными наблюдениями.

3. Расчет формы нестационарной каверны. Форму нестационарной каверны удобнее исследовать в абсолютной системе координат x_a, r_a , начало которой находится на поверхности невозмущенной жидкости, а направление оси x_a противоположно вектору скорости кавитатора. Тогда уравнение первого приближения запишется в виде

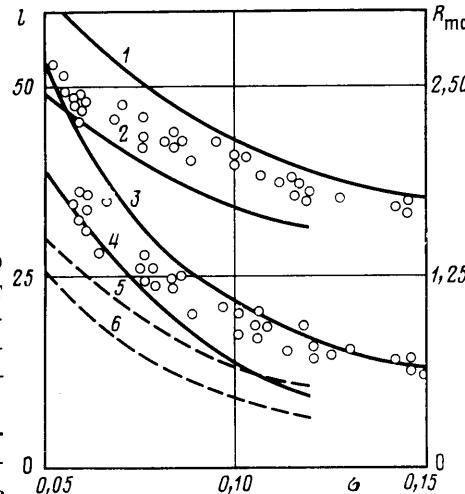
$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial t_a^2} = \frac{1}{\varepsilon^2 \ln \varepsilon} \left[\sigma_0 \pm \frac{2x_a}{Fr_0^2} - p_h(t_a) \right] \quad (3.1)$$

$$\sigma_0 = \frac{2[p_a' - p_h'(t_0)]}{\rho' V_\infty''(t_0)}; \quad Fr_0 = \frac{V_\infty'(t_0)}{\gamma g' L'}; \quad t_a' = \frac{L'}{V_\infty'(t_0)}$$

$$p_h(t_a) = \frac{2[p_h'(t_a) - p_h'(t_0)]}{\rho' V_\infty''(t_0)}; \quad \tau(t_a) = \frac{V_\infty'(t_0)}{V_\infty'(t_a)} = \frac{1}{V(t_a)}$$

Здесь t_0 – некоторый фиксированный момент времени, давление на поверхности невозмущенной жидкости предполагается постоянным. Переход в (2.1) к абсолютной системе координат с учетом (3.1) дает

$$\frac{\partial^2 R^2}{\partial t_a^2} = \frac{\sigma_0 \pm 2x_a Fr_0^{-2} - p_h(t_a)}{\ln \varepsilon} \left[1 - 0,5 \frac{\ln(0,25f_1)}{\ln \varepsilon} \right] \pm$$



$$\begin{aligned}
& \pm \frac{1}{(\ln \epsilon Fr_0)^2} \{ (x_a - x_i) [\ln(x_a - x_i) - 1] - (x_2 - x_a) [\ln(x_2 - x_a) - 1] \} - \\
& - \frac{\epsilon^2}{\ln \epsilon} \left\{ 2V^2(t_a) \frac{\partial B_0}{\partial x_a} + B_0 V^2(t_a) S(t_a) + \frac{1}{4f_1} \left(\frac{\partial f_1}{\partial t_a} \right)^2 + \right. \\
& + \frac{1}{2} \ln(x_2 - x_a) \frac{dx_2}{\partial t_a} \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_a \partial t_a} \Big|_{x_a=x_1(t_a)} - \\
& \left. - \frac{1}{2} V(t_a) \ln(x_a - x_i) \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_a \partial t_a} \Big|_{x_a=x_1(t_a)} \right\} + O\left(\frac{\epsilon^2}{\ln^2 \epsilon}\right) \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Здесь $x_1(t_a)$, $x_2(t_a)$ — абсолютные координаты начала и конца каверны. Подробный вывод уравнения (3.2) представлен в [16].

Правая часть уравнения (3.2) будет определена, как только будет найдено решение уравнения первого приближения (3.1). Это легко сделать, если использовать стандартные начальные и граничные условия

$$\begin{aligned}
R(x_a, t_0) &= R_1(x_a); \quad \frac{\partial R}{\partial t_a}(x_a, t_0) = R_2(x_a) \\
R(x_a, t_n(x_a)) &= R_3; \quad \frac{\partial R}{\partial t_a}(x_a, t_n(x_a)) = R_4 V(t_n(x_a))
\end{aligned}$$

Здесь $R_1(x_a)$, $R_2(x_a)$ — заданные функции; R_3 , R_4 — радиус кавитатора и производная от него по координате в точке схода струй. Момент прохождения фиксированного сечения $t_n(x_a)$ определяется из соотношения

$$x_a = - \int_0^{t_n} V(t_a) dt_a$$

В областях влияния начальных и граничных условий решение уравнения (3.1) записывается в виде

$$\begin{aligned}
\epsilon^2 f_1(x_a, t_a) &= \frac{0,5}{\ln \epsilon} \left(\sigma_0 \pm \frac{2x_a}{Fr_0^2} \right) (t_a - t_0)^2 + R_2^2(x_a) + 2R_1(x_a)R_2(x_a)(t_a - t_0) - \\
& - \frac{1}{\ln \epsilon} \int_{t_0}^{t_a} \left[\int_{t_0}^{t_a} p_h(t) dt \right] dt_a \quad (3.3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon^2 f_1(x_a, t_a) &= \frac{0,5}{\ln \epsilon} \left(\sigma_0 \pm \frac{2x_a}{Fr_0^2} \right) (t_a - t_n)^2 + R_3^2 + \\
& + 2R_3R_4 V(t_n)(t_a - t_n) - \frac{1}{\ln \epsilon} \int_{t_n}^{t_a} \left[\int_{t_n}^{t_a} p_h(t) dt \right] dt_a \quad (3.4)
\end{aligned}$$

Таким образом, задача определения формы каверны в первом приближении при произвольных законах движения насадка и изменения давления внутри кавитационной полости сводится к чисто кинематической задаче нахождения времени прохождения сечений $x_a = \text{const}$ и интегрированию функции $p(t_a)$. Поэтому вычисление правой части уравнения (3.2) не составляет труда.

Функция $x_2(t_a)$ вычисляется как корень уравнения, получаемого приравниванием нулю правой части уравнения (3.3) или (3.4), в зависимости от того, находится конец каверны в области влияния начальных условий или граничных. Для функции dx_2/dt_a после дифференцирования и простых

преобразований в областях влияния начальных и граничных условий получаем соответственно

$$\frac{dx_2}{dt_a} = \left\{ \frac{1}{\ln \varepsilon} \int_{t_0}^{t_a} p_h(t) dt - \frac{\sigma_0 \pm 2x_2(t_a) Fr_0^{-2}}{\ln \varepsilon} (t_a - t_0) - \right.$$

$$- 2R_1(x_2(t_a)) R_2(x_2(t_a)) \left. \right\} \left\{ 2R_2(x_2(t_a)) \frac{dR_2(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=x_2(t_a)} \pm \right.$$

$$\pm \frac{(t_a - t_0)^2}{Fr_0^2 \ln \varepsilon} + 2(t_a - t_0) \left[R_2(x_2(t_a)) \frac{dR_1(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=x_2(t_a)} + \right.$$

$$\left. + R_1(x_2(t_a)) \frac{dR_2(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=x_2(t_a)} \right] \left. \right\}^{-1}$$

$$\frac{dx_2}{dt_a} = \left\{ \frac{1}{\ln \varepsilon} \int_{t_n(x_2(t_a))}^{t_a} p_h(t) dt - 2R_3 R_4 V(t_n(x_2(t_a))) - \right.$$

$$- [t_a - t_n(x_2(t_a))] \frac{\sigma_0 \pm 2x_2(t_a) Fr_0^{-2}}{\ln \varepsilon} \left. \right\} \left\{ 2R_3 R_4 - \right.$$

$$- \frac{p_h(t_n(x_2(t_a))) [t_a - t_n(x_2(t_a))]}{V(t_n(x_2(t_a))) \ln \varepsilon} \pm \frac{[t_a - t_n(x_2(t_a))]^2}{Fr_0^2 \ln \varepsilon} +$$

$$+ [t_a - t_n(x_2(t_a))] \left[\frac{\sigma_0 \pm 2x_2(t_a) Fr_0^{-2}}{V(t_n(x_2(t_a))) \ln \varepsilon} - \frac{2R_3 R_4}{V(t_n(x_2(t_a)))} \frac{dV(\xi)}{d\xi} \Big|_{\xi=t_n} \right] \left. \right\}^{-1}$$

Для определения входящих в правую часть уравнения (3.2) функций $\partial^2 f_1 / \partial x_a \partial t_a$ достаточно продифференцировать (3.3), (3.4). Получим в областях влияния начальных и граничных условий

$$\varepsilon^2 \frac{df_1}{\partial x_a \partial t_a} = \pm \frac{2(t_a - t_0)}{Fr_0^2 \ln \varepsilon} + 2R_2 \frac{\partial R_1(x_a)}{\partial x_a} + 2R_1 \frac{\partial R_2(x_a)}{\partial x_a}$$

$$\varepsilon^2 \frac{\partial^2 f_1}{\partial x_a \partial t_a} = \pm \frac{2(t_a - t_n)}{Fr_0^2 \ln \varepsilon} + \frac{\sigma_0 \pm 2x_a Fr_0^{-2} - p_h(t_n)}{V(t_n) \ln \varepsilon} - \frac{2R_3 R_4}{V(t_n)} \frac{dV(t_n)}{dt_n}$$

Приведенные соотношения позволяют полностью вычислить правую часть $G(x_a, t_a)$ уравнения (3.2). Тогда в областях влияния начальных и граничных условий радиус каверны во втором приближении определяется уравнениями

$$R^2(x_a, t_a) = \int_{t_0}^{t_a} \left[\int_{t_0}^{t_a} G(x_a, t_a) dt_a \right] dt_a + R_1^2(x_a) + 2R_1(x_a) R_2(x_a) (t_a - t_0) \quad (3.5)$$

$$R^2(x_a, t_a) = \int_{t_n(x_a)}^{t_a} \left[\int_{t_n(x_a)}^{t_a} G(x_a, t_a) dt_a \right] dt_a + R_3^2 + 2R_3 R_4 V(t_n(x_a)) (t - t_n(x_a)) \quad (3.6)$$

Соотношения (3.5), (3.6) позволяют найти форму тонкой осесимметричной нестационарной каверны за тонким кавитатором при произвольных законах изменения скорости и давления в каверне.

Таким образом, задача определения формы нестационарной каверны во втором приближении сведена к определению по простым формулам для каждого фиксированного значения x_a функции $G(x_a, t_a)$ и вычислению двойного интеграла по времени от этой функции.

ЛИТЕРАТУРА

1. Логвинович Г. В. Гидродинамика течений со свободными границами. Киев: Наук. думка, 1969. 215 с.
2. Серебряков В. В. Кольцевая модель для расчета осесимметричных течений с развитой кавитацией.— В сб.: Гидромеханика. Вып. 27. Киев: Наук. думка, 1974, с. 25–29.
3. Серебряков В. В. К постановке линеаризованных задач осесимметричного суперкавитационного обтекания в нестационарном потоке.— В кн.: Математические методы исследования гидродинамических течений. Киев: Наук. думка, 1978, с. 58–62.
4. Парышев Э. В. Система нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, описывающих динамику нестационарных осесимметричных каверн.— Тр. ЦАГИ, 1978, вып. 1907, с. 3–16.
5. Журавлев Ю. Ф. Методы теории возмущений в пространственных струйных течениях.— Тр. ЦАГИ, 1973, вып. 1532, с. 3–24.
6. Григорян С. С. Приближенное решение задачи об отрывном обтекании осесимметричного тела.— ПММ, 1959, т. 23, вып. 5, с. 951–953.
7. Якимов Ю. Л. Об осесимметричном срывном обтекании тела вращения при малых числах кавитации.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 3, с. 499–501.
8. Nishiyama T., Kobayashi H. Finite cavity flow of axial symmetry.— Technol. Repts Tohoku Univ., 1969, v. 34, № 1, p. 173–185.
9. Тайц О. Г. Продольное обтекание тонкого тела вращения со свободной границей.— ПММ, 1975, т. 39, № 1, с. 185–188.
10. Choi Y. S. Axisymmetric cavity flows past slender bodies of revolution.— J. Hydronautics, 1974, v. 8, № 1, p. 13–18.
11. Нестерук И. Г. К вопросу о форме тонкой осесимметричной каверны в весомой жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 6, с. 133–136.
12. Кузнецов Б. Г., Шепеленко В. Н., Яненко Н. Н. Расчет формы каверны в полетяготения с учетом поверхностного натяжения.— Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук, 1967, вып. 3, № 13, с. 58–61.
13. Гузевский Л. Г. Численный анализ кавитационных течений. Препринт № 40. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1979.
14. Амромин Э. Л., Бушковский В. А., Дианов Д. И. Развитая кавитация за диском в вертикальной трубе.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 5, с. 181–184.
15. Нестерук И. Г. О форме тонкой осесимметричной нестационарной каверны.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 4, с. 38–47.
16. Нестерук И. Г. К расчету формы тонких осесимметричных каверн. Черновиц. уч.-т. Черновцы, 1984. 32 с. (Рукопись деп. в УкрНИИТИ, 1984, № 2157 Ук – 84 Деп.).
17. Логвинович Г. В., Серебряков В. В. О методах расчета формы тонких осесимметричных каверн.— В сб.: Гидромеханика. Вып. 32. Киев: Наук. думка, 1975, с. 47–54.
18. Шепеленко В. Н. К расчету кавитационных течений.— ПМТФ, 1968, № 5, с. 100–105.
19. Кнэпп Р., Дейли Дж., Хэммит Ф. Кавитация. М.: Мир, 1974. 687 с.
20. Гуревич М. И. Кривизна струи в точке схода ее с конической стенки.— В кн.: Исследования по интеграло-дифференциальным уравнениям в Киргизии. Вып. 4. Фрунзе, 1967, с. 155–157.

Никополь

Поступила в редакцию
13.VI.1984