

УДК 532.51.013.4

**О РАЗВИТИИ КОНЕЧНО-АМПЛИТУДНЫХ ДВУМЕРНЫХ
И ТРЕХМЕРНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ В СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЯХ**

ГЕРЦЕНШТЕЙН С. Я., ОЛАРУ И. И., РУДНИЦКИЙ А. Я., СУХОРУКОВ А. Н.

Исследуется зона перехода от ламинарного режима движения к турбулентному в широком классе струйных потоков. Задача рассматривается в рамках невязкой модели. Решение начально-краевой задачи для трехмерных нестационарных уравнений Эйлера отыскивается методом Бубнова – Галеркина с использованием обобщенного подхода Рэлея [1–4]. Изучаются возникновение, последующая нелинейная эволюция и взаимодействие двумерных волновых возмущений, а также их вторичная неустойчивость по отношению к пространственным возмущениям.

1. Решение начально-краевой задачи для трехмерных нестационарных уравнений Эйлера представляется в виде суммы исходного стационарного вектора скорости $V(y) = \{U(y), 0, 0\}$ и некоторого возмущения $v(x, y, z, t) = \{u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t)\}$

$$v_t + (V \nabla) v + (v \nabla) V + (v \nabla) v = -\nabla p \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} v = 0$$

Следуя [1–4], профиль скорости основного течения $U(y)$, исследуемый на устойчивость, заменяется ломаной $U_m(y)$

$$U_m(y) = \begin{cases} U(y_1), & y_1 \leq y \\ U(y_k) + \frac{y-y_k}{y_{k+1}-y_k} [U(y_{k+1}) - U(y_k)], & y_{k+1} \leq y \leq y_k, \\ k=1, 2, \dots, m-1 \\ U(y_m), & y \leq y_m \end{cases}$$

На каждом из интервалов (y_{j+1}, y_j) искомое решение удается представить в аналитическом виде [3].

Используя известное преобразование Сквайра для каждой из трехмерных волн вида $\exp[i(n\alpha x + k\beta z)]$, распространяющейся под углом $\delta_{nk} = \arctg(n\alpha/k\beta)$ к направлению основного потока, и выписывая на каждом интервале (y_{j+1}, y_j) решение Рэлея $v_{nkj} = \{u_{nkj}, v_{nkj}, w_{nkj}\}$ в системе координат (x_{nk}, y, z_{nk}) , получаемой из первоначальной системы (x, y, z) поворотом относительно оси y на угол δ_{nk} , окончательно в первоначальной системе координат имеем

$$u = \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{k=-N_2}^{N_2} \left[\{u_{nkj}^{(1)} \cos \gamma_{nk} + u_{nkj}^{(2)} \sin \gamma_{nk}\} \frac{n\alpha}{\alpha_{nk}} - \{w_{nkj}^{(1)} \cos \gamma_{nk} + w_{nkj}^{(2)} \sin \gamma_{nk}\} \frac{k\beta}{\alpha_{nk}} \right] + u_j^{(0)} \quad (1.2)$$

$$v = \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{k=-N_2}^{N_2} [v_{nkj}^{(1)} \cos \gamma_{nk} + v_{nkj}^{(2)} \sin \gamma_{nk}]$$

$$\begin{aligned}
w &= \sum_{n=1}^{N_1} \sum_{k=-N_2}^{N_2} \left[\{u_{nkj}^{(1)} \cos \gamma_{nk} + u_{nkj}^{(2)} \sin \gamma_{nk}\} \frac{k\beta}{\alpha_{nk}} + \right. \\
&\quad \left. + \{w_{nkj}^{(1)} \cos \gamma_{nk} + w_{nkj}^{(2)} \sin \gamma_{nk}\} \frac{n\alpha}{\alpha_{nk}} \right] + w_j^{(0)} \\
u_{nkj}^{(1)} &= -\alpha_{nk} \left\{ A_{1nk0}(t) \exp(-\alpha_{nk}y) - \sum_{l=1}^j A_{1nkl}(t) \operatorname{ch} \alpha_{nk}(y-y_l) \right\} \\
u_{nkj}^{(2)} &= -\alpha_{nk} \left\{ A_{2nk0}(t) \exp(-\alpha_{nk}y) - \sum_{l=1}^j A_{2nkl}(t) \operatorname{ch} \alpha_{nk}(y-y_l) \right\} \\
v_{nkj}^{(1)} &= -\alpha_{nk} \left\{ A_{2nk0}(t) \exp(-\alpha_{nk}y) + \sum_{l=1}^j A_{2nkl}(t) \operatorname{sh} \alpha_{nk}(y-y_l) \right\} \\
v_{nkj}^{(2)} &= \alpha_{nk} \left\{ A_{1nk0}(t) \exp(-\alpha_{nk}y) + \sum_{l=1}^j A_{1nkl}(t) \operatorname{sh} \alpha_{nk}(y-y_l) \right\} \\
w_{nkj}^{(1)} &= -\alpha_{nk} A_{3nkj}(t), \quad w_{nkj}^{(2)} = -\alpha_{nk} A_{4nkj}(t)
\end{aligned} \tag{1.3}$$

$$u_j^{(0)} = A_{100j}(t), \quad w_j^{(0)} = A_{300j}(t), \quad \alpha_{nk} = \sqrt{(n\alpha)^2 + (k\beta)^2}, \quad \gamma_{nk} = n\alpha x + k\beta z$$

На границах интервалов (y_{j+1}, y_j) на плоскостях $y=y_j$ ставятся стандартные условия непрерывности нормальной составляющей скорости и непрерывности давления. Условия непрерывности давления заменяются условиями непрерывности градиентов давления вдоль соответствующих направлений [3]. На бесконечности используются условия затухания возмущений.

В результате задача сводится к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений относительно неизвестных $A_{inkj}(t)$. Решение данной системы проводилось методом Кутты – Мерсона с автоматическим выбором шага интегрирования и контролем заданной точности. Заметим, что производные u_y и w_y , входящие в уравнение (1.1), находятся не непосредственным дифференцированием приближенных решений (1.2), (1.3), а с помощью конечно-разностной аппроксимации [4]

$$\begin{aligned}
u_{\langle y \rangle} &= \frac{1}{2} \left[\frac{u(y_{j-1}^*) - u(y_j^*)}{y_{j-1}^* - y_j^*} + \frac{u(y_j^*) - u(y_{j+1}^*)}{y_j^* - y_{j+1}^*} \right] \\
w_{\langle y \rangle} &= \frac{1}{2} \left[\frac{w(y_{j-1}^*) - w(y_j^*)}{y_{j-1}^* - y_j^*} + \frac{w(y_j^*) - w(y_{j+1}^*)}{y_j^* - y_{j+1}^*} \right] \\
y_j^* &= \frac{1}{2} (y_j + y_{j+1})
\end{aligned} \tag{1.4}$$

Существенно, что выражение для поперечного «градиента» давления p_y не содержит производных по y от функций u, w . Тем самым на каждом интервале (y_{j+1}, y_j) выражения для градиентов давления по продольным координатам x_{nk} в повернутой системе координат

$$\frac{\partial p}{\partial x_{nk}} = p^{(1)}(t, y) \cos \alpha_{nk} x_{nk} + p^{(2)}(t, y) \sin \alpha_{nk} x_{nk} \tag{1.5}$$

могут быть уточнены с помощью выражений для поперечных градиентов

$$\frac{\partial p}{\partial y} = p^{(3)}(t, y) \cos \alpha_{nk} x_{nk} + p^{(4)}(t, y) \sin \alpha_{nk} x_{nk} \tag{1.6}$$

$$\begin{aligned}
 p^{(1)}(t, y) &= p^{(1)}(t, y_j^*) + (y - y_j^*) \alpha_{nk} p^{(4)}(t, y_j^*) \\
 p^{(2)}(t, y) &= p^{(2)}(t, y_j^*) + (y_j^* - y) \alpha_{nk} p^{(3)}(t, y_j^*)
 \end{aligned}
 \tag{1.7}$$

При исследовании нелинейного взаимодействия возмущения с сильно различающимися масштабами d_1 и d_2 применялась следующая модификация изложенной выше методики: искомое решение представлялось в виде не одинарного, а двойного ряда Фурье по продольной координате x с двумя базисными несоизмеримыми волновыми числами $\alpha = 2\pi/d_1$ и $\gamma = 2\pi/d_2$. Так, для функции тока ψ искомое решение представлялось в следующем виде:

$$\begin{aligned}
 \psi &= \sum_{n=0}^{N_1} \sum_{k=-N_2}^{N_2} \left\{ A_{1nk0}(t) \exp[-\beta_{nk}y] + \right. \\
 &+ \left. \sum_{l=1}^j A_{1nkl}(t) \operatorname{sh}[\beta_{nk}(y-y_l)] \right\} \cos \beta_{nk}x + \left\{ A_{2nk0}(t) \exp[-\beta_{nk}y] + \right. \\
 &+ \left. \sum_{l=1}^j A_{2nkl}(t) \operatorname{sh}[\beta_{nk}(y-y_l)] \right\} \sin \beta_{nk}x
 \end{aligned}
 \tag{1.8}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_{nk} &\equiv n\alpha + k\gamma, \quad \psi_{(yy)} \equiv \frac{1}{2} [\psi_y(y_{j-1}-0) - \psi_y(y_j-0) + \\
 &+ \psi_y(y_{j-1}+0) - \psi_y(y_j+0)] \frac{1}{y_{j-1}-y_j}
 \end{aligned}$$

Отметим, что наряду с условиями затухания искомых решений на бесконечности в данной задаче можно использовать условия симметрии на оси рассматриваемых симметричных потоков: для четных $(n+k)$ компонента $u(y)$ задается четной функцией, а для нечетных $(n+k)$ — нечетной функцией. (Остальные компоненты скорости рассматриваются аналогично.) В силу уравнений (1.1) соответствующая четность данных функций, заданная в начальный момент времени, сохраняется и в дальнейшем. Аналогичным образом можно также отыскивать и четные решения $u(y)$ исходных уравнений (1.1).

Если же исходный профиль скорости основного течения $U(y)$ — функция нечетная (например, $U(y) = \operatorname{th} y$), то для сохранения четности в силу уравнений (1.1) коэффициенты ряда Фурье в разложении $u(y)$ при $\cos \gamma_{nk}$ (или при $\cos \beta_{nk}$) следует задавать нечетными, а при $\sin \gamma_{nk}$ (или при $\sin \beta_{nk}$) — четными.

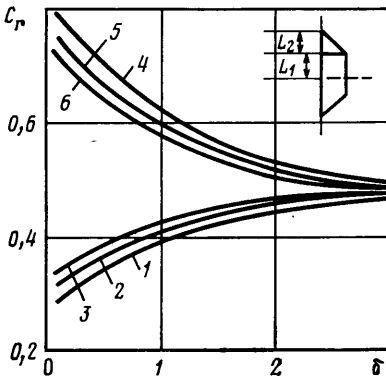
Обоснование изложенной методики содержится в [3]. Эффективность обобщенного метода Рэлея определяется его быстрой сходимостью и, кроме того, созданием относительно компактных и простых численных алгоритмов, сводящих исходную систему уравнений Эйлера к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных. В целом удается в рамках ресурсов БЭСМ-6 исследовать систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка 10^3 , при этом учитывается взаимодействие до 40–50 гармоник.

2. Предварительно в работе было проведено исследование линейной устойчивости¹. Известные в литературе данные [5] недостаточно полно описывают характеристики устойчивости рассматриваемого класса течений. В частности, в [5] отсутствует информация о фазовых скоростях распространения возмущений C_r и их зависимости от волновых чисел α и параметра $\delta = L_1/L_2$ для симметричных и несимметричных возмущений (здесь L_2 — толщина слоя смещения, L_1 — полуширина однородного участка струи (фиг. 1)). На фиг. 1 кривые 1–3 отвечают антисимметричным по u модам соответственно для $\alpha L_2 = 0,7; 0,8; 0,9$; кривые 4–6 — симметричным модам для тех же волновых чисел.

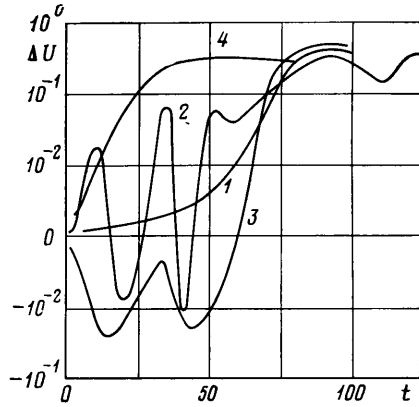
Отсутствие этих данных не позволяет, в частности, определить коэффициенты нарастания возмущений (αC_i). Кроме того, результаты работы [5] недостаточно точны в окрестности малых волновых чисел для симметричных возмущений. Результаты расчетов показывают, что для

¹ Подробные данные приведены в отчете № 2866 Ин-та механики МГУ.

симметричных возмущений фазовая скорость C_r при $\delta \rightarrow 0$ стремится к единице, поэтому отношение коэффициента $\alpha L_2 C_i / C_r$ к αL_2 при $\alpha L_2 \rightarrow 0$ стремится к нулю ($C_i \rightarrow 0$ при $\alpha L_2 \rightarrow 0$ [5]), а в [5] это отношение стремится к единице. Для малых волновых чисел в широком диапазоне параметра δ фазовые скорости симметричных и антисимметричных возмущений качественно различаются: при $\alpha L_2 \rightarrow 0$ для симметричных мод $C_r \rightarrow 1$, а для антисимметричных $C_r \rightarrow 0$. Причем для резких струй с узкими слоями смещения на границах это различие при увеличении αL_2 быстро уменьшается (так, при $\delta=5$ уже при $\alpha L_2=0,3$ различие составляет менее 10%). Для струй с плавным распределением скоростей это различие остается весьма существенным и при относительно больших αL_2 . Так, при $\delta=0,5$ и $\alpha L_2=$



Фиг. 1



Фиг. 2

$=0,8$ различие составляет примерно 50%. Однако при $\alpha L_2 > 1$ качественный характер поведения C_r в обоих случаях близок: $C_r \rightarrow 0,5$.

Коэффициенты нарастания и фазовые скорости для достаточно больших δ (начиная со значения $\delta \approx 2$) изменяются несущественно (как правило, меньше 10%) и хорошо согласуются со случаем $\delta = \infty$. При малых δ полученные зависимости носят в основном линейный характер.

Таблица 1

Вариант	α	N_1	n	$A_{ln 0m}^{(0)}$
1	0,2	15	3	10^{-4}
			5	10^{-4}
			7	10^{-4}
			$n \neq 3,5,7$	10^{-6}
2	0,6	3	1	10^{-4}
			$n \neq 1$	10^{-6}
3	1	3	1	10^{-4}
			$n \neq 1$	10^{-6}
4	1,6	3	1	10^{-4}
			$n \neq 1$	10^{-6}

Примечание. Во всех вариантах $\beta = N_2 = 0$.

Интересно, что для малых δ волновые числа αL_2 , соответствующие возмущениям, максимально нарастающим по линейной теории, для симметричной моды стремятся к нулю, а для антисимметричной — к некоторому постоянному значению. При больших δ их значения сближаются.

3. Основное внимание в данной работе уделялось исследованию механизмов нелинейного взаимодействия возмущений. Рассматривались варианты расчетов, представленные в табл. 1. Профиль скорости основного

течения $U(y) = \text{ch}^{-2} y$ разбивался на 14 отрезков ломаной с узлами в точках

$$y = y_j = 4; 3; 2; 1,4; 1; 0,6; 0,2; -0,2; -0,6; -1; -1,4; -2; -3; -4 \quad (3.1)$$

Для данного профиля скорости наиболее интенсивно в рамках линейной теории нарастает возмущение с волновым числом $\alpha \approx 1$.

Одной из наиболее существенных черт нелинейного взаимодействия является сильное выделение длинноволновых составляющих и взаимное подавление («конкуренция») возмущений из средней части спектра. Так, сопоставление варианта 1 с 2, 3 и 4 показывает заметное уменьшение (примерно в 1,5–2 раза) интенсивности мод, отвечающих волновым числам $\alpha = 0,6; 1$ и 1,4. Длинноволновые составляющие при нелинейном взаимодействии этих мод существенно усиливаются, наиболее интенсивно нарастает разностная составляющая с волновым числом $\alpha = 0,4$ (вари-

Таблица 2

Вариант	γ	N_2	$E_\gamma(0)$	$A_{l01m}(0)$
5	0	0	0	0
6	1,5	1	$7 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-2}$
7	2,5	1	$7 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-2}$
8	2,5	1	$2,8 \cdot 10^{-4}$	10^{-2}

Примечание. Во всех вариантах $\alpha = 0,7$, $N_1 = 2$, $E_\alpha(0) = 2 \cdot 10^{-3}$, $A_{l10m}(0) = 10^{-4}$, $A_{lnkm}(0) = 10^{-6}$.

ант 1), превышающая обычное нарастание по линейной теории в несколько раз.

Профиль скорости осредненного потока в результате нелинейного взаимодействия с возмущениями во всех рассмотренных вариантах «наполняется», т. е. на оси струи скорость уменьшается, а вдали от оси увеличивается. Причем этот процесс происходит немонотонно, наблюдаются осцилляции, период которых примерно соответствует периоду основной моды. Существенно, что наиболее интенсивно «наполнение» профиля происходит при наличии длинных волн. Так, характерное уменьшение скорости на оси потока в варианте 1 в 3–4 раза больше, чем в варианте 4. Отметим, что короткие волны (например, с $\alpha = 1,4$) ведут себя более упорядоченно по сравнению с длинноволновыми. Коротковолновые составляющие, нейтрально устойчивые в рамках линейной теории, в рассматриваемом нелинейном случае несколько увеличиваются и достигают величины порядка 10^{-3} .

Аналогичные исследования в рамках рассматриваемой модели могут быть проведены и для различных спутных потоков. В данных расчетах, следуя [6], рассматривался профиль скорости основного потока вида $U(y) = 1 - 0,7 \exp(-0,9y^2)$; узловые точки задавались при

$$y = y_j = 4; 3,5; 3; 2,2; 1,8; 1,4; 1; 0,6; 0,2; -0,2; -0,6; -1; -1,4; -1,8; -2,2; -3; -3,5; -4. \quad (3.2)$$

С целью выяснения влияния конечно-амплитудных крупно- и мелко-масштабных составляющих спектра на основной тон и на осредненные характеристики течения в рамках разномасштабной модели (1.8) проводились расчеты (табл. 2). Здесь $E_\alpha(0)$ и $E_\gamma(0)$ — энергии соответствующих возмущений в начальный момент времени вблизи точки перегиба $y = 1,2$ при $x = 2\pi$.

Проведенные численные исследования показали, что наличие достаточно интенсивных коротковолновых возмущений заметно сказывается на осредненных характеристиках течения, в основном на начальной стадии нелинейного развития (фиг. 2, кривые 1–3 показывают зависимость от времени изменения скорости ΔU на оси струи при $y = 0$ в вариантах 5–7). (Интересно, что при этом на отдельных временных интервалах может

происходить перекачка энергии от возмущений к основному течению (фиг. 2, кривые 2, 3). Однако на последующей стадии нелинейного развития влияние рассматриваемых коротковолновых возмущений несущественно — характерные времена, за которые профиль средней скорости выходит на режим развитого течения, и характерные величины амплитуд и средней скорости в этом режиме практически одинаковы для всех рассмотренных вариантов (фиг. 2, кривые 1—3).

Наличие рассматриваемых коротковолновых возмущений слабо влияет на развитие основной волны с волновым числом $\alpha=0,7$. В то же время собственная энергия коротких волн несколько уменьшается, что приводит к менее интенсивному «наполнению» профиля средней скорости в вариан-

Таблица 3

Вариант	α	γ	N_2	$E_\gamma (0)$	$A_{1k0m} (0)$	$A_{101m} (0)$
9	0,7	0	0	0	10^{-4} , $k=1$	0
10	0,7	0,1	2	$6 \cdot 10^{-4}$	10^{-4} , $k=1$	$5 \cdot 10^{-2}$
11	0,7	0,01	2	$9 \cdot 10^{-4}$	10^{-4} , $k=1$	$5 \cdot 10^{-1}$
12	0,7	0,001	2	$9 \cdot 10^{-4}$	10^{-4} , $k=1$	5,10
13	0,7	0,01	1	$3,5 \cdot 10^{-5}$	10^{-4} , $k=1$	10^{-1}
14	0,7	0,01	1	$3,5 \cdot 10^{-3}$	10^{-4} , $k=1$	10
15	0,7	0,01	2	$3,5 \cdot 10^{-3}$	10^{-4} , $k=1$	10
16	0,35	0	0	0	10^{-4} , $k=2$	0
17	0,35	0,01	1	$3,5 \cdot 10^{-3}$	10^{-4} , $k=2$	1

Примечание. Во всех вариантах $N_1=4$, $E_\alpha=0,7 (0)=2 \cdot 10^{-8}$, $A_{1nk m} (0)=10^{-8}$.

тах 6 и 7, так как основная волна получает энергию не только от основного течения, но и от конечно-амплитудных коротких волн.

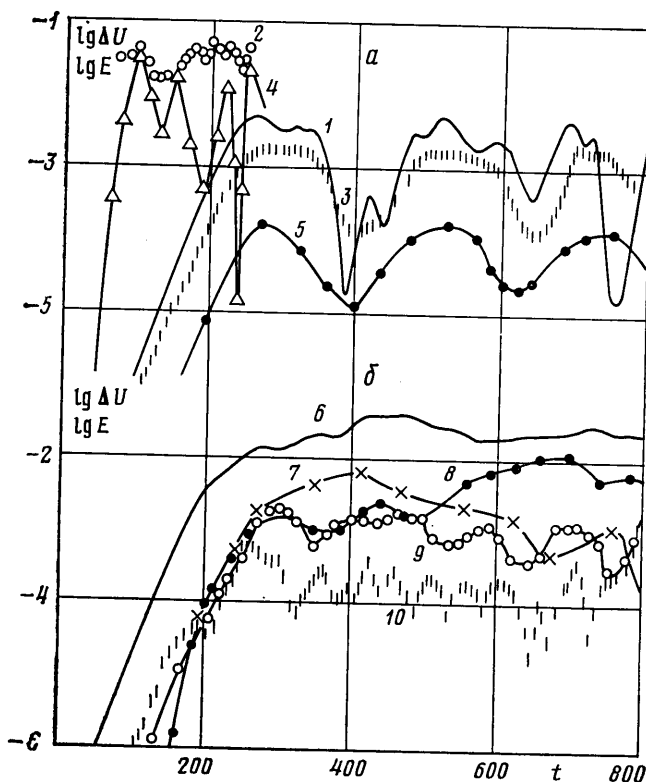
При изучении влияния конечно-амплитудных длинноволновых возмущений на развитие основного тона и осредненного течения профиль средней скорости в начальный момент времени задавался в виде слутной струи (3.2). Результаты расчетов приведены в табл. 3.

Проведенный численный анализ показал значительное ускорение процесса сглаживания профиля средней скорости при наличии достаточно интенсивных длинноволновых возмущений (фиг. 2, кривая 4 — $\Delta U(t)$, $y=0$, вариант 10). Интересно, что существенное изменение масштаба длинных волн (на три порядка!) слабо влияет (менее 5%) на процесс сглаживания профиля средней скорости (варианты 10—12).

Энергия основной волны ($\alpha=0,7$) при наличии конечно-амплитудных длинноволновых возмущений растет медленнее, чем в случае длинных волн с малой амплитудой или при отсутствии их. При этом на начальной стадии развития наличие «умеренно» длинных волн (с волновым числом $\gamma=0,1$) ослабляет основную волну (с $\alpha=0,7$) несколько интенсивнее, чем более крупномасштабные возмущения (с $\gamma=0,01$ и 0,001).

Интенсивное увеличение энергии длинноволновых составляющих может в значительной степени объясняться спецификой начальных данных задачи. Так, для сравнения были проведены методические расчеты для гармоник с волновым числом $\gamma=0,01$ в рамках линейной теории и нелинейный расчет, в котором учитывалось взаимодействие этой гармоники с осредненным течением. Начальные данные задавались при этом так же, как и в варианте 11. Оказалось, что по линейной теории первый максимум достигается при $t=142$ ($E_{\max}=2,9$), второй — при $t=420$ ($E_{\max}=36,6$); коэффициент нарастания при этом сравнительно невелик: $\alpha C_i \approx 0,01$. В нелинейном же случае первый максимум достигается при $t=38$ ($E_{\max}=9,6 \cdot 10^{-2}$). Тем самым линейная теория дает даже завышенные значения $E=0,27$ при $t=38$. Таким образом, усиление длинноволновой составляющей за относительно короткое время может определяться не экспоненциальным нарастанием, а спецификой начальных данных задачи, которые закладывают вблизи локального минимума почти периодического процесса, что и приводит к нарастанию возмущения на начальной стадии развития.

Значительный интерес в нелинейном анализе представляет сопоставление симметричных (s) и антисимметричных (as) возмущений [2, 5]. Формально уравнения Эйлера допускают и симметричные относительно продольной составляющей скорости ($u(-y)=u(y)$) решения и антисимметричные решения (для которых гармонические составляющие продольной компоненты скорости с нечетными номерами антисимметричны, а с четными номерами — симметричны). Из линейной теории [2, 5] известно, что для гладких струйных течений антисимметричные возмущения нарастают значительно сильнее, чем симметричные. Однако для струй с резкими П-об-



Фиг. 3

разными профилями скорости коэффициенты нарастания оказываются примерно равными.

В нелинейном случае сопоставление симметричных и антисимметричных возмущений может осложняться зависимостью процесса развития от начальных данных задачи. Так, при задании в начале процесса симметричной и антисимметричной мод с разными начальными амплитудами с преимущественным выделением симметричной моды на достаточно больших временах нелинейного развития симметричная мода остается преобладающей. Возмущения при этом подавляют друг друга и увеличение одного из них усиливает степень подавления другого [6]. Значительный интерес также представляет выяснение реакции симметричного и антисимметричного возмущения на внешний управляющий сигнал, моделирующий, например, акустическое воздействие, низкочастотный шум и др.

Конкретные расчеты проводились, в частности, при следующих параметрах (табл. 4).

Профиль скорости $U(y)$ задавался формулой (3.2). Для сокращения времени расчета рассматривалась область $y \geq 0$, при $y=0$ ставились соответствующие условия симметрии.

Результаты расчетов частично представлены на фиг. 3. Кривые 1 и 6 соответствуют изменению средней скорости от времени при $y=1,6$ для вариантов 19 и 22.

Заметим, что в случае симметричных возмущений скорость осредненного течения на оси симметрии потока при $y=0$ остается строго постоянной. Кривые 2, 3, 7–10 изображают зависимость от времени локальной огибающей энергии возмущений в районе точки перегиба $y=1,2$ (точнее, точки на этой кривой соответствуют локальным максимумам) для следующих мод: 2 – вариант 18, $\alpha_1=0,7$; 3 – вариант 19, $\alpha_1=0,7$; 7 – вариант 22, $\alpha_1=0,0825$; 8 – вариант 22, $\alpha_2=0,175$; 9 – вариант 22, $\alpha_4=0,35$; 10 – вариант 22, $\alpha_8=0,7$.

Отметим, что для рассматриваемого профиля скорости (3.2) наиболее растущему по линейной теории возмущению в антисимметричном случае соответствует $\alpha \approx 0,7$, а в симметричном $\alpha \approx 0,35$.

Кривые 4 и 5 соответствуют энергии возмущений вдали от оси (при $y=3,75$) для моды с $\alpha=0,7$ – варианты 18 и 19. Сравнение кривых 2 и 3 показывает, что энергия антисимметричной моды при естественном развитии оказывается примерно на порядок больше симметричной. Любо-

Таблица 4

Вариант	α	N_1	Симметрия
18	0,7	4	(а, с)
19	0,7	4	(с)
20	0,35	4	(с)
21	0,175	8	(с)
22	0,0825	8	(с)

Примечание. Во всех вариантах $\beta=N_2=0$, $A_{lnkm}(0)=10^{-4}$.

пытно, что симметричная мода оказывается значительно более регулярной, чем антисимметричная. Сравнение кривых 3 и 5 (а также 2 и 4) показывает, что вдали от оси течения как в симметричном, так и в антисимметричном случаях преобладающими оказываются те же крупномасштабные колебания, что и в районе точки перегиба. Интенсивность высокочастотной части спектра существенно уменьшается.

Сопоставление вариантов 19 и 22 показывает, что в случае симметричных возмущений наличие длинноволновых возмущений, как и ранее, дополнительно сглаживает слой смещения спутного потока (фиг. 3 кривые 1 и 6). Кроме того, длинноволновые возмущения отбирают значительную часть энергии и из основной моды, энергия которой, например в варианте 22, оказывается примерно на порядок меньше, чем в варианте 19. При этом период крупномасштабных колебаний заметно уменьшается.

Интересно, что при развитии симметричных возмущений в длинноволновой части спектра наблюдается преимущественное выделение гармоники с волновым числом $\alpha=0,175$. Тем самым в симметричном случае имеет место выделение субгармонической составляющей.

Значительный интерес представляет моделирование явлений, связанных с известными эффектами стабилизации струйных течений с помощью высокочастотного акустического воздействия. В соответствии с [7] рассматривался П-образный симметричный профиль скорости ($U(-y)=U(y)$) с относительно узкими слоями смещения на границе струйного потока. Профиль аппроксимировался следующей ломаной: точки излома задавались при $y=y_j=3,5; 3; 2,7; 2,3; 2; 0$, соответственно $U(y_j)=0; 0; 0,2; 0,81; 1,1$.

Проведены следующие варианты расчетов (табл. 5). Сравнение вариантов 24 и 25 показывает практически полное совпадение результатов, полученных по двух- и одномасштабной методикам, примененным к одному и тому же случаю. Узость слоев смещения (относительно центральной части струи) приводит к примерно одинаковому нарастанию основного тона $\alpha=1,5$ при свободном развитии как для симметричного, так и для антисимметричного случая.

Обнаружено также существенное ускорение процесса сглаживания осредненного профиля скорости и значительно менее интенсивное развитие основного тона при введении определенных коротковолновых возмущений (сопоставление вариантов 23 и 24). Вместе с тем введение более мелкомасштабных (нейтрально устойчивых по линейной теории) возмущений оказывается значительно менее эффективным (варианты 26, 27).

Интересно, что симметричная четвертая гармоника подавляет основную антисимметричную моду в гораздо большей степени по сравнению с основной симметричной модой (варианты 24 и 32). Тем самым при нали-

Таблица 5

Вариант	α	γ	N_1	N_2	n	k	$A_{lnkm}^{(0)}$	Симметрия
23	0,5	0	8	0	1-8	0	10^{-6}	с
24	0,5	0	8	0	4	0	10^{-2}	с
					$n \neq 4$	$k \neq 0$	10^{-6}	
25	0,5	0	2	2	0	1	10^{-2}	с
					$n \neq 0$	$k \neq 1$	10^{-6}	
26	0,5	0	8	0	8	0	10^{-2}	с
					$n \neq 8$	$k \neq 0$	10^{-6}	
27	0,5	0	8	0	6	0	10^{-2}	с
					$n \neq 8$	$k \neq 0$	10^{-6}	
28	0,5	0	8	0	4	0	10^{-1}	с
					$n \neq 4$	$k \neq 0$	10^{-6}	
29	0,5	0	8	0	5	0	10^{-2}	ас
					$n \neq 5$	$k \neq 0$	10^{-6}	
30	0,33	2,5	3	1	0	1	10^{-2}	ас
					$n \neq 0$	$k \neq 1$	10^{-6}	
31	0,5	0	8	0	1-8	0	10^{-6}	ас
32	0,5	0	8	0	4	0	10^{-2}	ас
					$n \neq 0$	$k \neq 1$	10^{-6}	

ции внешнего акустического воздействия преимущественной может оказаться симметричная мода [7].

Обнаруженный эффект подавления основного тона коротковолновыми возмущениями заметно усиливается с увеличением начальной амплитуды короткой волны (варианты 24, 28). В эксперименте, однако, существует некоторое «пороговое» значение этой амплитуды, при котором эффект подавления максимален.

Эффект подавления основного тона коротковолновыми возмущениями определенного диапазона вкратце может быть объяснен следующим образом. Задание коротковолнового возмущения в соответствии с толщиной узкого слоя смещения на границе струи приводит к резкому нарастанию этого возмущения, к интенсивному сглаживанию профиля скорости осредненного течения и, как следствие, к существенному подавлению основного тона на начальной стадии его развития.

Существование корреляции длины волны высокочастотного возмущения и толщины слоя смещения в струе подтверждается, с одной стороны, экспериментами, из которых следует отсутствие эффекта подавления турбулентности на основном участке струи, а с другой — результатами расчетов, приведенных выше (табл. 2, фиг. 2). Отметим, что в полном соответствии с экспериментом [7] влияние коротковолнового воздействия существенно сказывается лишь на начальной стадии нелинейного развития: характерное время выхода на развитой режим увеличивается примерно вдвое, но сами конечные амплитуды основного тона меняются незначительно.

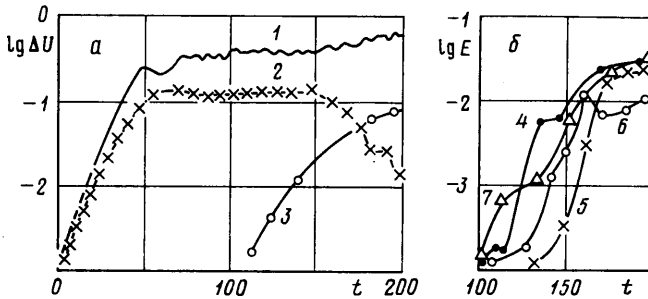
4. Значительный интерес представляет исследование вторичной неустойчивости рассмотренных выше конечно-амплитудных двумерных режимов по отношению к поперечным трехмерным возмущениям и исследование последующей эволюции соответствующих трехмерных структур.

Конкретные расчеты проводились при следующих параметрах (табл. 6). Варианты расчетов 33-37, 47-48 проводились для профиля, задаваемого формулой (3.1) и со стандартными условиями симметрии для четных и антисимметрии для нечетных гармоник на оси струи (ас). Варианты 38-46 проводились с тем же про-

Вариант	α	β	N_1	N_2	n	k	$A_{lnkm} (0)$	Симметрия
33	0,5	0,1	4	1	2 $n \neq 2$	0 $k \neq 0$	10^{-4} 10^{-6}	ас
34	0,5	0,5	4	1	2 $n \neq 2$	0 $k \neq 0$	10^{-4} 10^{-6}	ас
35	0,333	0,1	6	1	3 $n \neq 3$	0 $k \neq 0$	10^{-4} 10^{-6}	ас
36	0,333	0,5	6	1	3 $n \neq 3$	0 $k \neq 0$	10^{-4} 10^{-6}	ас
37	0,333	1	6	1	3 $n \neq 3$	0 $k \neq 0$	10^{-4} 10^{-6}	ас
38	0,5	0,1	4	2	2 $n \neq 2$	0 $k \neq 0$	10^{-3} 10^{-4}	
39	0,5	0,5	4	2	2 $n \neq 2$	0 $k \neq 0$	10^{-3} 10^{-4}	
40	0,5	0,85	4	2	2 $n \neq 2$	0 $k \neq 0$	10^{-3} 10^{-4}	
41	0,5	1	4	2	2 $n \neq 2$	0 $k \neq 0$	10^{-3} 10^{-4}	
42	0,5	2	4	2	2 $n \neq 2$	0 $k \neq 0$	10^{-3} 10^{-4}	
43	0,5	0,1	4	2	2 $n \neq 2$	0 $k \neq 0$	10^{-2} 10^{-4}	
44	0,5	0,5	4	2	2 $n \neq 2$	0 $k \neq 0$	10^{-2} 10^{-4}	
45	0,5	0,85	4	2	2 $n \neq 2$	0 $k \neq 0$	10^{-2} 10^{-4}	
46	0,5	1	4	2	2 $n \neq 2$	0 $k \neq 0$	10^{-2} 10^{-4}	
47	0,333	0,1	6	2	3 $n \neq 3$	0 $k \neq 0$	10^{-4} 10^{-6}	ас
48	0,333	0,5	6	2	3 $n \neq 3$	0 $k \neq 0$	10^{-4} 10^{-6}	ас

филем осредненной скорости $U(y) = ch^{-2}y$, но узловые точки задавались следующие: $y = y_j = 4; 3; 2; 1,4; 0,8; 0,3; -0,3; -0,8; -1,4; -2; -3; -4$; условия симметрии и антисимметрии на оси струи при этом не использовались.

Проведенные расчеты установили неустойчивость конечно-амплитудных двумерных волновых режимов по отношению к поперечным трехмерным возмущениям в широком диапазоне волновых чисел β (фиг. 4-5). На фиг. 4 кривая 1 - изменение профиля средней скорости на оси струи; кривые 2-5 - локальные огибающие энер-



Фиг. 4

гии (соединяющие точки локальных максимумов) соответствующих гармоник ($\alpha=1, \beta=0$), ($\alpha=1/2, \beta=0$), ($\alpha=1/2, \beta=0,1$), ($\alpha=1, \beta=0,1$) - вариант 33.

Кривые 6-7 - локальные огибающие энергии гармоник ($\alpha=0, \beta=0,1$), ($\alpha=0, \beta=0,2$) - вариант 47. На фиг. 5 изображены локальные огибающие зависимости от времени суммарной энергии трехмерных возмущений, соответствующих различным волновым числам β : 0,1; 0,5; 0,85; 1; 2; 0,5; 0,85; 1 (кривые 1-8, варианты 38-46).

Существенно, что резко выделения какой-либо трехмерной моды в данных расчетах не наблюдается (фиг. 4-5). Выделение той или иной моды и степень ее нарастания существенно зависят от начальных дан-

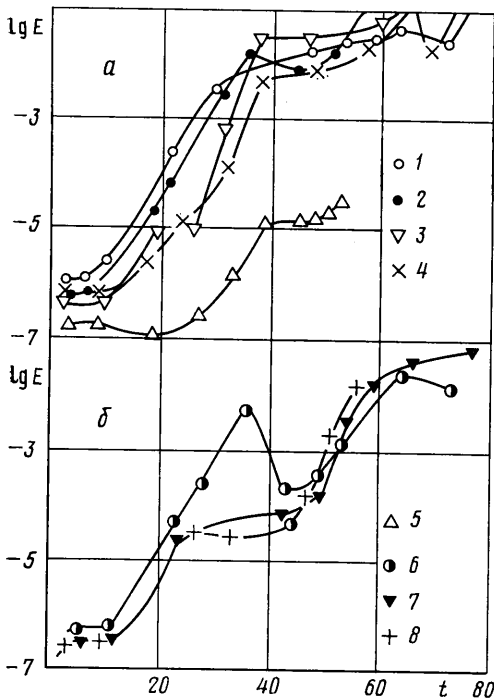
ных, от амплитуды развивающихся двумерных волн (с увеличением амплитуды двумерной волны рост трехмерных возмущений уменьшается (фиг. 5, сопоставление кривых 2–4 и 6–8)). Тем самым в процессе нелинейного развития зона волновых чисел β , соответствующая наиболее растущим трехмерным волнам, может заметно смещаться (фиг. 4–5). Вместе с тем на отдельных этапах нелинейного развития могут проявляться так называемые субгармонические резонансы с волновыми векторами $(\alpha/2, \pm\beta)$ и $(\alpha, 0)$ (для $\alpha=1, \beta=0,85$ на фиг. 5 при t от 20 до 40), «первичные» резонансы с векторами $(\alpha, \pm\beta)$, $(2\alpha, 0)$ и др.

При выделении первичного резонанса все двумерные вихри в поперечном направлении изгибаются абсолютно одинаково и соответствуют

известной схеме [8, 9] «пик – долина»; за подъемом (или опусканием) предыдущего вихря следует подъем (или опускание) последующего. При выделении субгармонического резонанса картина в плане (в плоскости xz) напоминает шахматное расположение [8, 9]: подъему (или опусканию) вихря соответствует опускание (или подъем) предшествующего вихря. Интересно, что в проведенных расчетах, так же как и в эксперименте [8], на начальной стадии нелинейного развития наблюдается преимущественное выделение субгармонического резонанса (фиг. 4, кривая 4, $120 < t < 150$), а на больших временах нелинейного развития начинает играть важную роль и первичный резонанс (фиг. 4, кривая 5).

Одним из наиболее интересных резонансов является резонанс пары наклонных волн с волновыми векторами $(\alpha, \pm\beta)$ со стоячей поперечной волной $(0, 2\beta)$. Этот резонанс особенно сильно проявляется на дальних стадиях нелинейного развития (фиг. 4, кривые 6, 7 – энергия моды с $\beta=0,2$ больше энергии моды с $\beta=0,1$ при $t > 160$) и замечателен тем, что резонансное соотношение для частот при этом выполняется для любого β . Тем самым в этом резонансе выбор β полностью определяется начальными данными задачи. Следует, однако, подчеркнуть, что в рассматриваемых нелинейных процессах происходит сильное изменение частотных характеристик волновых движений и, как следствие, «перерождение» резонансных соотношений. В результате происходит сильное «размазывание» резонансов; резонансные тройки волн могут иметь приоритет лишь на определенных стадиях нелинейного развития.

Отметим, что развитие интенсивных трехмерных возмущений сопровождается дополнительным увеличением «наполнения» профиля средней скорости. Так, при $t > 160$ (фиг. 4) трехмерные возмущения достигают величин порядка 10^{-2} (кривые 4–7) и при этом увеличивается характерное изменение осредненной скорости (кривая 1). Вместе с тем в рассматриваемых свободных потоках эти дополнительные изменения в отличие от пристенных течений [8–11] относительно невелики. Напомним, что степень нарастания вторичных трехмерных возмущений в пристенных течениях [9, 10] в отличие от свободных течений [12] также существенно превышает степень нарастания плоских двумерных возмущений; в рассматриваемых свободных потоках вторичная трехмерная неустойчивость оказывается того же по-



Фиг. 5

является на дальних стадиях нелинейного развития (фиг. 4, кривые 6, 7 – энергия моды с $\beta=0,2$ больше энергии моды с $\beta=0,1$ при $t > 160$) и замечателен тем, что резонансное соотношение для частот при этом выполняется для любого β . Тем самым в этом резонансе выбор β полностью определяется начальными данными задачи. Следует, однако, подчеркнуть, что в рассматриваемых нелинейных процессах происходит сильное изменение частотных характеристик волновых движений и, как следствие, «перерождение» резонансных соотношений. В результате происходит сильное «размазывание» резонансов; резонансные тройки волн могут иметь приоритет лишь на определенных стадиях нелинейного развития.

Отметим, что развитие интенсивных трехмерных возмущений сопровождается дополнительным увеличением «наполнения» профиля средней скорости. Так, при $t > 160$ (фиг. 4) трехмерные возмущения достигают величин порядка 10^{-2} (кривые 4–7) и при этом увеличивается характерное изменение осредненной скорости (кривая 1). Вместе с тем в рассматриваемых свободных потоках эти дополнительные изменения в отличие от пристенных течений [8–11] относительно невелики. Напомним, что степень нарастания вторичных трехмерных возмущений в пристенных течениях [9, 10] в отличие от свободных течений [12] также существенно превышает степень нарастания плоских двумерных возмущений; в рассматриваемых свободных потоках вторичная трехмерная неустойчивость оказывается того же по-

рядка, что и первичная линейная неустойчивость. Указанные отличия свободных и пристенных течений могут быть объяснены тем, что первичная линейная неустойчивость в пристенных течениях носит вязкостный характер [5]. При этом коэффициенты нарастания примерно на порядок меньше, чем при невязкой неустойчивости в свободных потоках. Трехмерная же вторичная неустойчивость и в тех и в других течениях имеет невязкую природу [9–12].

В заключение выделим основные результаты работы.

В рамках линейной теории получены обобщающие данные о характеристиках устойчивости широкого класса струйных течений с произвольным отношением толщины слоев смещения на границе струи к ее толщине. В дополнение к данным работы [5] рассчитаны фазовые скорости распространения возмущений, что позволяет определить коэффициенты нарастания в широком диапазоне параметров рассматриваемой задачи.

Обнаружено сильное выделение длинноволновых составляющих, масштаб которых может превышать масштаб основного тона на несколько порядков.

Установлено, что характерные нелинейные амплитуды симметричных возмущений оказываются примерно на порядок меньшими, чем в антисимметричном случае.

Описан механизм стабилизации струйных течений с помощью высокочастотного акустического воздействия, основанный на усилении мелко-масштабных возмущений в узких слоях смещения на границе рассматриваемых струйных течений.

Показана вторичная неустойчивость конечно-амплитудных двумерных волновых режимов по отношению к поперечным трехмерным возмущениям различного типа в широком диапазоне трехмерных волновых чисел.

Продемонстрирована роль начальных данных при выделении различных двумерных или трехмерных структур [8]. Получены характерные времена развития двумерных и трехмерных структур, которые в рассматриваемых свободных потоках в отличие от ранее исследованных пристенных течений [9–11] оказываются одного порядка, что объясняет плавную картину перехода в рассматриваемых струйных течениях.

ЛИТЕРАТУРА

1. Рэлей Д. Теория звука. Т. 1. Гостехиздат, 1955. 503 с.
2. Петров Г. И. Об устойчивости вихревых слоев.— Тр. ЦАГИ, 1937, вып. 304, 24 с.
3. Герценштейн С. Я. О применении метода Рэрея к нелинейным и трехмерным задачам.— Докл. АН СССР, 1976, т. 231, № 6, с. 1319–1322.
4. Герценштейн С. Я., Сухоруков А. Н., Шкадов В. Я. О нелинейных колебаниях в плоском следе.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 3, с. 10–16.
5. Бетчов Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971. 350 с.
6. Sato H., Saito H. Artificial control of the laminar-turbulent transition of a two-dimensional wake by external sound.— J. Fluid Mech., 1978, v. 84, № 4, p. 657–672.
7. Гиневский А. С., Власов Е. В., Колесников А. В. Аэроакустические взаимодействия. М.: Машиностроение, 1978. 177 с.
8. Kouhanov Yu. S., Koslov V., Levchenko V. Ya., Ramasanov M. P. On nature of k-breakdown of a laminar boundary layer. New experimental data.— The second IUTAM-SIMPOSIUM on Laminar-Turbulent transition. Abstracts. Novosibirsk, 1984, p. 13.
9. Orszag S. A., Patera A. T. Secondary instability of wallbounded shear flows.— J. Fluid Mech., 1983, v. 128, p. 347–385.
10. Herbert T. Secondary instability of plane channel flow to subharmonic three-dimensional disturbances.— Phys. Fluids, 1983, v. 26, № 4, p. 871–874.
11. Приймак В. Г., Рождественский Б. Л. Численное моделирование двумерной турбулентности в плоском канале.— В кн.: Аннот. докл. 5-го Всесоюз. съезда по теорет. и прикл. механики, Алма-Ата, 1981. Алма-Ата: Наука, 1981, с. 295–296.
12. Герценштейн С. Я., Сухоруков А. Н. О нелинейной эволюции двумерных и трехмерных волн в слоях смещения.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1985, № 1, с. 10–18.

Москва

Поступила в редакцию
12.XI.1984