

УДК 532.516.5.013.4

## **ВОЗНИКНОВЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ В РЕЗУЛЬТАТЕ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ**

**ГОЛЬДШТИК М. А., ЖДАНОВА Е. М., ШТЕРН В. Н.**

Простые решения уравнений Навье – Стокса, отвечающие наиболее распространенным типам течений, как правило, обладают высокой степенью симметрии. В результате неустойчивости, возникающей с ростом числа Рейнольдса, структура течения меняется, причем вторичные режимы либо в меньшей степени, либо совсем не симметричны. При мягком характере потери устойчивости иногда может быть прослежен целый каскад бифуркаций, сопровождающихся последовательным уменьшением симметрии (как это имеет, например, место в течении Куэтта – Тэйлора). Угадать заранее, без анализа устойчивости, форму вторичного течения практически невозможно. Наиболее неожиданные и интересные физические эффекты проявляются, когда спектр линейной задачи устойчивости оказывается кратным. В данной работе таким эффектом является возникновение спонтанного вращения в первоначально осесимметричной затопленной струе с определенным распределением осевой скорости.

Теоретический анализ линейной устойчивости круглых струй вслед за оригинальной работой [1] был проведен в ряде статей [2–5], подробное исследование устойчивости струйных течений с профилями скорости, присущими струям вблизи и вдали от сопла, было выполнено в [6]. Основной, существенный для дальнейшего результата состоит в том, что наиболее опасными возмущениями для круглых струй являются спиральные волны, бегущие вниз по потоку и имеющие азимутальное волновое число  $m = \pm 1$ .

Когда линейный анализ выделяет одно наиболее растущее возмущение, то последующий учет нелинейности позволяет определить стационарную амплитуду этой моды и ее зависимость от надкритичности. Именно такую информацию в первую очередь получают, используя метод Ляпунова – Шмидта [7–9]. Но если в линейном приближении существуют два равноправных возмущения, то на нелинейном этапе выявляется, какие комбинации этих мод формируют вторичные режимы (их может быть несколько) и каков характер устойчивости каждого из этих режимов.

Переходные нестационарные процессы можно проанализировать в рамках амплитудных уравнений типа Ландау. Как и в невырожденном случае, их получают, вводя медленное время и добавляя эволюционный член в уравнение разветвления. При двукратном вырождении так формируется система уравнений для двух независимых амплитуд. Эта система допускает каноническую запись, являющуюся универсальной для круга различных гидродинамических задач, таких, как конвекция в кубической полости, подогреваемой снизу [10], течение между вращающимися цилиндрами [11] и рассматриваемая здесь устойчивость струйных течений [12]. Во всех этих случаях устойчивым оказывается вторичный режим, обладающий максимальной энергией пульсаций.

Ниже будет показано, что устойчивый вторичный режим параллельного течения, моделирующего начальный участок струи, включает в себя стационарное дифференциальное вращение. Обсуждается механизм возникновения ненулевого момента импульса и проводится сопоставление с имеющимися опытными данными.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим осесимметричное затопленное струйное течение вязкой несжимаемой жидкости. Предположим, что течение параллельно, т. е. поле скорости в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$  имеет вид  $\mathbf{u}_0 = (0, 0, U(r))$  и является приближенным решением уравнений Навье – Стокса. Параллельность течения, которая для реальных струй является лишь приближением, можно считать обеспеченной наличием соответствующих массовых сил. Интересуясь периодическими по времени режимами течения, отвечающими от решения  $\mathbf{u}_0$ ,

положим в уравнениях Навье — Стокса

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}(r, \varphi, z')/R; \quad p' = p(r, \varphi, z')/R$$

где  $R$  — число Рейнольдса,  $z' = z - Ct$ ,  $C$  — неизвестная скорость продольных волн. Заменяя  $\partial/\partial t \rightarrow -C\partial/\partial z$ ,  $\partial/\partial z \rightarrow \partial/\partial z'$  (штрих в дальнейшем опускаем), приходим к нелинейной задаче на собственные значения

$$R(C-U)\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - R(\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}_0 - R\nabla p + \Delta \mathbf{u} = (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} \quad (1.1)$$

$$(\nabla \mathbf{u}) = 0$$

Требуется найти ненулевое решение, аналитическое при  $r=0$  и затухающее на бесконечности с заданными периодами  $2\pi/m$  по  $\varphi$  ( $m=1$ ) и  $2\pi/\alpha$  по  $z$ , где  $m$  и  $\alpha$  — азимутальное и продольное волновые числа.

В качестве профиля скорости исходного параллельного течения здесь выбраны четыре варианта:

$$U(r) = (1+r^2)^{-2} \quad (1.2)$$

$$U(r) = 1 \quad (0 \leq r < 1-\delta); \quad U(r) = \frac{1}{2} \left( 1 + \text{th} \frac{1-r}{\theta} \right) \quad (1-\delta < r < \infty); \quad \theta \ll 1 \quad (1.3)$$

$$U(r) = \frac{1}{2} \left( 1 + \text{th} \frac{1/r-r}{\theta} \right) \quad (1.4)$$

$$U(r) = 1-r^2 \quad (r \leq 1); \quad U(r) = 0 \quad (r > 1) \quad (1.5)$$

Соотношение (1.2) задает автомодельное решение Шлихтинга, линейная устойчивость которого исследовалась многими авторами, начиная с невязкого анализа в [1].

Сглаженный ступенчатый профиль (1.3) используется для аппроксимации начального участка струи, а профиль (1.4) — в области конца потенциального ядра. Линейный анализ устойчивости для последних двух случаев проведен в [6]. Наконец, струйное течение с профилем (1.5) исследовалось на устойчивость в [2]. Профили даны в безразмерном виде. Выбор характерных масштабов скорости и длины ясен из формул.

Принимаемая параллельность исходного течения, конечно, является существенной идеализацией для реальных струй, но это необходимый этап для последующего более полного анализа.

**2. Метод Ляпунова — Шмидта.** Для расчета вторичных автоколебательных режимов воспользуемся методом Ляпунова — Шмидта, развитым применительно к задачам гидродинамической устойчивости в [7]. Решение разлагается в ряд по малому параметру (надкритичности)

$$R = R_0 + k\varepsilon^2, \quad k = \pm 1; \quad RC = R_0(C_0 + \varepsilon C_1 + \varepsilon^2 C_2 + \dots) \quad (2.1)$$

$$\{\mathbf{u}, p\} = \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^i \{\mathbf{u}_i, p_i\}$$

где  $R_0, C_0$  — значения параметров на нейтральной кривой линейной теории. Подставляя представления (2.1) в (1.1) и приравнивая члены с одинаковыми степенями  $\varepsilon$  в правой и левой частях, получаем серию линейных систем вида

$$R_0(C_0 - U)\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial z} - R_0(\mathbf{u}_i \nabla)\mathbf{u}_0 - R_0 \nabla p_i + \nabla \mathbf{u}_i = \mathbf{f}_i; \quad \nabla \mathbf{u}_i = 0 \quad (2.2)$$

$$\mathbf{f}_1 = (0, 0, 0), \quad \mathbf{f}_2 = -R_0 C_1 \frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial z} + (\mathbf{u}_1 \nabla)\mathbf{u}_1$$

$$f_3 = -R_0 C_2 \frac{\partial u_1}{\partial z} - R_0 C_1 \frac{\partial u_2}{\partial z} + (u_1 \nabla) u_2 + \\ + (u_2 \nabla) u_1 + k \left[ U \frac{\partial u_i}{\partial z} + (u_1 \nabla) u_0 \right]$$

При  $i=1$  получаем линейную однородную систему для вычисления критических параметров  $R_0$ ,  $C_0$  и собственных функций. Ее решение имеет следующую структуру:

$$\{u_i, p_i\} = \gamma_1 U_{11} e_{11} + \gamma_2 U_{1, -1} e_{1, -1} + \text{к.с.} \\ U_{nm} = \{V_{nm}(r), q_{nm}(r)\}, \quad e_{nm} = \exp(i\alpha n z + im\varphi)$$

Здесь к.с. — комплексно-сопряженные члены, черта означает операцию комплексного сопряжения,  $\gamma_1, \gamma_2$  — комплекснозначные амплитуды автоколебаний, подлежащие определению. Существенно, что спектр линеаризованной задачи вырожден по азимутальному числу. Каждой точке нейтральной кривой отвечают две спиральные волны, различающиеся направлением вращения ( $m = \pm 1$ ). Поэтому в соответствии с видом правой части решение (2.2) при  $i=2$  ищем в виде

$$\{u_2, p_2\} = |\gamma_1|^2 U_{00} + |\gamma_2|^2 U_{0, -0} + \gamma_1^2 U_{22} e_{22} + \\ + \gamma_2^2 U_{2, -2} e_{2, -2} + \gamma_1 \gamma_2 U_{20} e_{20} + \gamma_1 \bar{\gamma}_2 U_{02} e_{02} + \text{к.с.}$$

Первые два члена в правой части вещественны, к.с. — комплексно-сопряженная добавка к остальным членам. Компоненты  $v, w, u$  и  $q$  векторов  $U_{nm}$  имеют следующую симметрию по второму индексу:

$$\{v_{nm}, w_{nm}, u_{nm}, q_{nm}\} = \{v_{n, -m}, -w_{n, -m}, u_{n, -m}, q_{n, -m}\}$$

Это позволяет ограничиться нахождением пяти вектор-функций:  $U_{00}$ ,  $U_{11}$ ,  $U_{22}$ ,  $U_{20}$ ,  $U_{02}$ , компоненты которых удовлетворяют следующим системам дифференциальных уравнений и граничных условий, получающихся после отделения переменных:

$$L_{nm} v_{nm} - \frac{2im}{r^2} w_{nm} - R_0 q_{nm} = F_{nm}^{(1)} \\ L_{nm} w_{nm} + \frac{2im}{r^2} v_{nm} - \frac{im}{r} R_0 q_{nm} = F_{nm}^{(2)} \\ L_{nm} u_{nm} + \frac{1}{r^2} u_{nm} - R_0 \frac{dU}{dr} v_{nm} - in\alpha R_0 q_{nm} = F_{nm}^{(3)} \\ \frac{d}{dr} (r v_{nm}) + im w_{nm} + in\alpha u_{nm} = 0 \\ L_{nm} = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \right) - \frac{m^2}{r^2} - n^2 \alpha^2 - in\alpha R_0 (U - C)$$

$$F_{11} = (F_{11}^{(1)}, F_{11}^{(2)}, F_{11}^{(3)}) = (0, 0, 0)$$

$$F_{00} = V_{11} * \bar{V}_{11} + \bar{V}_{11} * V_{11}, \quad F_{22} = V_{11} * V_{11}$$

$$F_{20} = V_{11} * V_{1, -1} + V_{1, -1} * V_{11}, \quad F_{02} = V_{11} * \bar{V}_{1, -1} + \bar{V}_{1, -1} * V_{1, 1}$$

$$V_{nm} * V_{kl} = [(V_{nm} e_{nm} \nabla) V_{kl} e_{kl}] / e_{n+k, m+l}$$

$$u_{nm}(r) \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty), \quad u_{nm}(0) = q_{nm}(0) = 0, \quad m \neq 0$$

$$v_{nm}(0) = w_{nm}(0) = 0, \quad m \neq 1, \quad v_{nm}(0) + iw_{nm}(0) = 0, \quad m = 1$$

Собственные векторы  $V_{nm}$  определенным образом нормируются, а коэффициенты  $\gamma_1, \gamma_2$  определяются из условий разрешимости неоднородных

задач (2.2). Поскольку оператор правой части (2.2) вырожден и имеет два независимых нетривиальных решения, то необходимо потребовать ортогональности правых частей  $f_i$  двум решениям сопряженной однородной задачи  $\theta_1 = \theta_{11} e_{11}$  и  $\theta_2 = \theta_{1, -1} e_{1, -1}$

$$\int_0^{2\pi/\alpha} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} (f_i, \theta_j) r dr d\varphi dz = 0, \quad i=2, 3, \dots; \quad j=1, 2,$$

$$(f_i, \theta_j) = f_i^{(1)} \bar{\theta}_j^{(1)} + f_i^{(2)} \bar{\theta}_j^{(2)} + f_i^{(3)} \bar{\theta}_j^{(3)}$$

При  $i=2$  можно заключить, что  $C_1=0$ , если

$$I_1 = \int_0^{\infty} (V_{11}, \theta_{11}) r dr \neq 0$$

При  $i=3$  приходим к следующим уравнениям разветвления:

$$\begin{aligned} \gamma_1 (kI_3 + |\gamma_1|^2 I_2 + |\gamma_2|^2 I_4 - i\alpha R_0 C_2 I_1) &= 0 \\ \gamma_2 (kJ_3 + |\gamma_2|^2 J_2 + |\gamma_1|^2 J_4 - i\alpha R_0 C_2 J_1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} (V_{11} * V_{00} + V_{00} * V_{11} + \bar{V}_{11} * V_{22} + V_{22} * \bar{V}_{11}, \theta_{11}) r dr$$

$$I_3 = \int_0^{\infty} (i\alpha UV_{11} + (V_{11} \nabla) u_0 + \nabla_1 q_{11}, \theta_{11}) r dr$$

$$\nabla_1 = \left( \frac{d}{dr}, \frac{i}{r}, i\alpha \right)$$

$$I_4 = \int_0^{\infty} (V_{1,-1} * V_{02} + V_{02} * V_{1,-1} + \bar{V}_{1,-1} * V_{20} + V_{20} * \bar{V}_{1,-1} + \\ + V_{11} * V_{0,-0} + V_{0,-0} * V_{11}, \theta_{11}) r dr$$

$$J_4 = \int_0^{\infty} (V_{11} * \bar{V}_{02} + \bar{V}_{02} * V_{11} + \bar{V}_{11} * V_{20} + V_{20} * \bar{V}_{11} + \\ + V_{1,-1} * V_{00} + V_{00} * V_{1,-1}, \theta_{1,-1}) r dr$$

где  $J_j, j=1, 2, 3$ , имеют тот же вид, что и  $I$ , но противоположные по знаку вторые индексы в каждом члене подынтегральных выражений. Легко проверить, что  $I_j = J_j, j=1, \dots, 4$ . Действительно, учитывая, что  $w_{20} = 0$ , величины  $v_{02}, w_{02}$  вещественные, а  $u_{02}$  — чисто мнимая, а также симметрию по второму индексу, имеем следующие равенства:

$$(\bar{V}_{11} * V_{22}, \theta_{11}) = (\bar{V}_{1, -1} * V_{2, -2}, \theta_{1, -1}), \quad (V_{11} * V_{00}, \theta_{11}) = (V_{1, -1} * V_{0, -0}, \theta_{1, -1})$$

$$(V_{1, -1} * V_{0, 2}, \theta_{11}) = (V_{11} * \bar{V}_{02}, \theta_{1, -1}), \quad (\bar{V}_{1, -1} * V_{20}, \theta_{11}) = (\bar{V}_{11} * V_{20}, \theta_{1, -1})$$

Тогда система (2.3) кроме тривиального имеет следующие решения:

$$\gamma_1 (\gamma_2) = 0; \quad |\gamma_2|^2 (|\gamma_1|^2) = \gamma^2 = - \frac{k \operatorname{Re} \{I_3 \bar{I}_1\}}{\operatorname{Re} \{I_2 \bar{I}_1\}} \quad (2.4)$$

$$C_2 = \frac{k \operatorname{Im} \{I_3 \bar{I}_2\}}{\alpha R_0 \operatorname{Re} \{I_1 \bar{I}_2\}}$$

$$|\gamma_1|^2 = |\gamma_2|^2 = \beta^2 = -\frac{k \operatorname{Re}\{I_3 I_1\}}{\operatorname{Re}\{(I_2 + I_1) \bar{I}_1\}} \quad (2.5)$$

$$C_2 = \frac{k \operatorname{Im}\{I_3 (\bar{I}_2 + \bar{I}_4)\}}{\alpha R_0 \operatorname{Re}\{(\bar{I}_2 + \bar{I}_4) \bar{I}_1\}}$$

Здесь  $\operatorname{Re}$  и  $\operatorname{Im}$  означают соответственно вещественную и мнимую части,  $k$  выбирается так, чтобы квадраты модулей амплитуд были положительными. Если  $k=1$ , то автоколебания ответвляются при  $R > R_0$  (сверхкритические автоколебания), если  $k=-1$ , автоколебания докритичны.

Каждое из решений (2.4) физически означает спиральную волну, закрученную в определенную сторону. Во втором порядке малости по  $\epsilon$  такая волна посредством своих «рейнольдсовых напряжений» порождает вторичное стационарное, зависящее только от  $r$  движение  $\gamma^2 V_{00}$ . Это движение, как следует из уравнения неразрывности и граничных условий, имеет нулевую радиальную компоненту  $v_{00}$ . Но появляются отличные от нуля осевая  $u_{00}(r)$  (добавка к исходному профилю) и азимутальная  $w_{00}(r)$  компоненты. Следовательно, помимо колебательного движения может возникнуть стационарное вращение вокруг оси струи.

Решение (2.5), будучи суперпозицией двух противоположных спиральных волн равной амплитуды, т. е. бегущей в продольном направлении и стоячей по  $\phi$  волной, вращения не дает

$$(w_{00} + w_{0,-0} = 0)$$

Какое из двух решений — с круткой (2.4) или без нее (2.5) — реализуется, можно определить из анализа эволюционных амплитудных уравнений, которые выводятся аналогично (2.3), но при условии, что амплитуды зависят от медленного времени  $\epsilon^2 t$ .

**3. Эволюционные уравнения для амплитуд.** Переходные процессы и устойчивость полученных автоколебаний вблизи точек ветвления анализируются также с помощью теории возмущений. Полагая, что спектр малых возмущений исходного течения есть аналитическая функция  $\epsilon$ , можно заключить, что все возмущения, затухающие при  $\epsilon=0$  и обладающие достаточным запасом устойчивости, будут затухать и при малом  $\epsilon \neq 0$ . Аналогичное заключение можно сделать и для нарастающих при  $\epsilon=0$  возмущений. В этом смысле все автоколебания, ответвляющиеся от нейтральной кривой далеко от ее носика, неустойчивы.

Рассмотрим устойчивость автоколебаний, ответвляющихся непосредственно от носика нейтральной кривой ( $\alpha_*$ ,  $R_*$ ).

Зависимость амплитуд от времени вблизи критической точки будет слабой, так как инкременты пропорциональны  $R - R_* = k\epsilon^2$ . Поэтому можно ввести медленное время  $\tau = \epsilon^2 t$  и из условия разрешимости при  $i=3$  получить эволюционные уравнения для амплитуд. Отделяя вещественную и мнимую части в этих уравнениях, приходим к следующим уравнениям для квадратов модулей амплитуд:

$$\frac{d|\gamma_1|^2}{d\tau} = \frac{2|\gamma_1|^2}{R_*} \left[ k \operatorname{Re} \frac{I_3}{I_1} + |\gamma_1|^2 \operatorname{Re} \frac{I_2}{I_1} + |\gamma_2|^2 \operatorname{Re} \frac{I_4}{I_1} \right]$$

$$\frac{d|\gamma_2|^2}{d\tau} = \frac{2|\gamma_2|^2}{R_*} \left[ k \operatorname{Re} \frac{I_3}{I_1} + |\gamma_1|^2 \operatorname{Re} \frac{I_4}{I_1} + |\gamma_2|^2 \operatorname{Re} \frac{I_2}{I_1} \right]$$

Коэффициенты в этих уравнениях можно выразить через стационарные решения  $\beta$ ,  $\gamma$  и  $\sigma$ , где  $\sigma/k$  — производная от инкремента на нейтральной кривой ( $\sigma_0 = \sigma \epsilon^2 + o(\epsilon^4)$ ). Учитывая следующие равенства:

$$\sigma = \frac{k}{R_*} \operatorname{Re} \frac{I_3}{I_1}; \quad \frac{\sigma}{\gamma^2} = -\frac{1}{R_*} \operatorname{Re} \frac{I_2}{I_1}$$

$$\sigma \left( \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\beta^2} \right) = \frac{1}{R_*} \operatorname{Re} \frac{I_4}{I_1}$$

получим уравнения

$$\begin{aligned} \frac{d\gamma_1^2}{d\tau} &= 2\sigma |\gamma_1|^2 \left[ 1 - \frac{|\gamma_1|^2}{\gamma^2} + |\gamma_2|^2 \left( \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\beta^2} \right) \right] \\ \frac{d\gamma_2^2}{d\tau} &= 2\sigma |\gamma_2|^2 \left[ 1 + |\gamma_1|^2 \left( \frac{1}{\gamma^2} - \frac{1}{\beta^2} \right) - \frac{|\gamma_2|^2}{\gamma^2} \right] \end{aligned} \quad (3.1)$$

Система (3.1) имеет рассмотренные выше стационарные решения. Спектр линеаризованной системы (3.1) в окрестности любого из решений (2.4) и (2.5) равен соответственно

$$\left\{ -2\sigma, 2\sigma \left[ 2 - \left( \frac{\gamma}{\beta} \right)^2 \right] \right\}, \quad \left\{ -2\sigma, 2\sigma \left[ 1 - 2 \left( \frac{\beta}{\gamma} \right)^2 \right] \right\}$$

Таким образом, в закритической области, где  $\sigma > 0$ , устойчивость определяется знаком величины  $2\beta^2 - \gamma^2$ . Поскольку энергия спиральных автоколебаний пропорциональна  $\gamma^2$ , а продольных —  $2\beta^2$ , то отсюда следует, что из закритических режимов устойчив режим с большей энергией. Если хотя бы для одного решения имеет место обратная бифуркация, оба вторичных режима неустойчивы и переход имеет катастрофический характер. В этом смысле полученные результаты аналогичны выводам работы [11], в которой бифуркация при двукратном собственном значении ( $\pm\alpha$ ) исследована в течении Куэтта между вращающимися цилиндрами.

Эволюционное уравнение для амплитуд, эквивалентное (3.1), было получено в [10] для задачи о режимах конвекции в кубической полости, подогреваемой снизу. Там решению типа (2.4) соответствует подъем прогретой жидкости вблизи одной из боковых граней, а решению типа (2.5) — вспышки в боковом двугранном угле. Хотя там развиваются вторичные стационарные режимы, а не автоколебания, как в данном случае, это отличие не сказывается на форме уравнения (3.1).

По-видимому, система (3.1) является универсальной формой амплитудных уравнений типа Ландау в случае, когда спектр нейтральных малых возмущений исходного решения двукратно вырожден и существует отображение (симметрии), переводящее собственные векторы друг в друга. Это утверждение, конечно, требует доказательства. Но то, что три различные гидродинамические задачи приводят к одной и той же системе (3.1), является сильным эвристическим аргументом в пользу этого предположения. Для всего круга задач нелинейной устойчивости, описываемых системой (3.1), справедлив следующий принцип выбора: устойчивым является решение с максимальной энергией пульсаций.

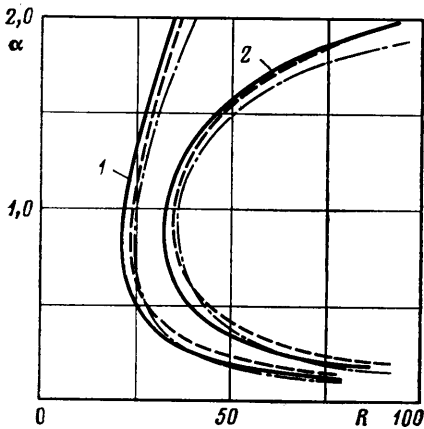
Чтобы ответить на вопрос, какое именно решение удовлетворяет этому критерию, необходим численный расчет.

**4. Метод решения и результаты расчетов.** Задача численно решалась методом дифференциальной прогонки [9]. В процессе прямой прогонки находятся не отдельные решения, а уравнение подпространства решений, определяемого граничными условиями на одном из концов интервала. Дополнив его граничными условиями на другом конце интервала, можно получить решение в этой точке (или, в случае задачи на собственные значения, определитель системы как характеристическую функцию). Решение на всем интервале находится в процессе обратной прогонки (после нормировки в задаче на собственные значения). Системы обыкновенных дифференциальных уравнений для прогоночных коэффициентов с соответствующими начальными условиями интегрировались стандартным методом Рунге — Кутты с заданной точностью и автоматическим выбором шага.

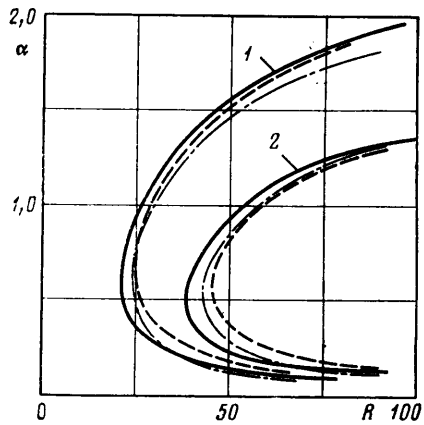
Начальные условия вблизи оси находились с помощью аналитических решений уравнений для возмущений при малых  $g$ . Условие затухания возмущений на бесконечности, требующее знания асимптотических решений неоднородных задач, за-

менялось условием прилипания, которое ставилось на достаточно большом радиусе  $r_*$ . Собственные функции и собственные значения линейной задачи, вычисленные с использованием асимптотических решений на бесконечности, совпали с ранее опубликованными результатами. Расчеты также показали, что замена условия затухания на условие прилипания не влияет на результаты в случае быстро исчезающих на бесконечности ступенчатого и параболического профилей и требует увеличения радиуса внешней границы примерно вдвое для автомодельного профиля.

Интегралы  $I_j$ ,  $j=1, \dots, 4$ , вычислялись также на конечном интервале в силу их быстрой сходимости. Нейтральные кривые для профилей (1.3) ( $\theta=0,04$ ) (1.5) и (1.2), (1.4) ( $\theta=0,64$ ) и положение ответвляющихся автоколебаний с фиксированным значением пульсационной энергии ( $|\gamma_i|^2(R-R_*)=0,1$ ) изображены на фиг. 1, 2. Штриховые линии соответствуют спиральным автоколебаниям, а штрихпунктирные — автоколебаниям типа стоячих по  $\varphi$  волн. Устойчивым является закритический



Фиг. 1



Фиг. 2

режим, отвечающий здесь меньшим числам Рейнольдса. На нижней ветви нейтральной кривой ответвляются докритические неустойчивые автоколебания. В окрестности критической точки, при переходе через которую происходит первая потеря устойчивости для всех исследуемых профилей скорости, имеет место закритическая бифуркация. Характеристики ветвления на носиках нейтральных кривых для профилей (1.2)–(1.5) приведены в таблице.

Профиль	$\alpha_*$	$R_*$	$C_0$	$\gamma^2$	$C_2$	$\beta^2$	$C_2'$
(1.2)	0,440	38,55	0,227	0,126	0,003	0,112	0,003
(1.3)	0,745	22,25	0,469	0,465	0,008	0,196	0,015
(1.4)	0,550	24,93	0,374	0,220	0,007	0,177	0,009
(1.5)	0,830	32,85	0,350	0,401	0,004	0,183	0,008

Для сглаженного ступенчатого и параболического профилей устойчив вторичный режим с круткой.

Установление режима со спонтанным вращением показалось авторам настолько необычным, что для контроля расчетов был использован дополнительный алгоритм. Для ступенчатого профиля (формула (1.3) при  $\theta \rightarrow 0$ ) большая часть расчетов была проведена аналитически с помощью представления решения в виде модифицированных функций Бесселя  $I$  и  $K$ . Полученные двумя способами результаты совпали.

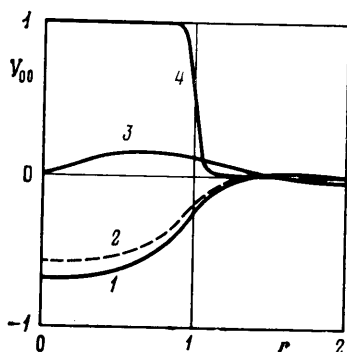
Структура осредненного вторичного течения для профиля (1.3) отражена на фиг. 3. Скорость вращения  $\gamma^2 w_{00}$  (кривая 3) и добавка к осевой скорости  $\gamma^2 u_{00}$  (кривые 1, 2) порождены реинольдсовыми напряжениями. Пунктирные линии для сравнения представляют неустойчивый режим. Кривая 4 — исходный профиль  $U$ . Все данные соответствуют критическим параметрам, приведенным во второй строке таблицы.

С уменьшением заполненности профиля происходит смена устойчивости вторичных режимов. Так, для более развитых профилей (1.3), (1.4) устойчив режим без вращения. Если ввести формпараметр  $\Phi = U_{\max} r_0 / U_{\max}$ , где  $U_{\max}$  — максимум модуля производной,  $U_{\max}$  — максимальная скорость,  $r_0$  — выбранный масштаб длины,

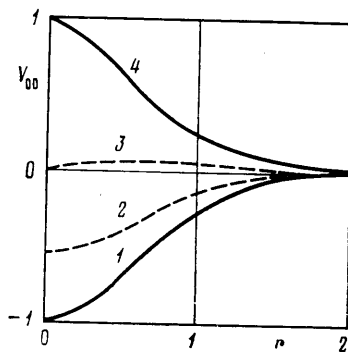
то режим с круткой устойчив, если  $\Phi > \Phi_* \approx 1,6$ . Для параболического профиля  $\Phi = 2 > \Phi_*$ , для автомодельного  $\Phi = 0,52 < \Phi_*$ . Характер искажения осевой скорости среднего течения для автомодельного профиля (фиг. 4) аналогичен рассмотренному выше для профиля (1.3).

**5. Обсуждение.** Проведенный анализ ветвления вторичных режимов струйных течений показал, что неустойчивость неосесимметричной моды ( $m = \pm 1$ ) может при определенных условиях приводить к развитию стационарного вращения.

Представляет интерес вопрос: откуда же берется ненулевой момент импульса? Чтобы ответить на него, необходимо рассмотреть переход от исходного режима к новому. В процессе роста возмущений из-за действия рейнольдсовых напряжений появляются вращения противополож-



Фиг. 3



Фиг. 4

ных знаков, разделенные пространственно. При этом суммарный момент импульса возмущенного движения равен нулю в каждый момент времени. Часть завихренности определенного знака уносится на бесконечность, а в струе остается компенсирующий момент импульса. Близкий к описанному процесс происходит при обтекании крылового профиля, когда, согласно механизму Жуковского — Чаплыгина, на бесконечность уносится начальный вихрь, а вокруг крыла возникает компенсирующая циркуляция. При наличии достаточно удаленной стенки она будет «поглощать» момент инерции, причем в течение всего переходного процесса. Отметим, что обсуждаемый эффект не связан принципиально с бесконечностью области течения.

Качественная перестройка из-за неустойчивости может происходить и в других течениях, для которых имеет место вырождение собственного спектра. Так, кратность собственного значения приводит к множественности вторичных режимов и в течениях Куэтта между вращающимися цилиндрами. При определенных зазорах и скоростях вращения цилиндров устойчивыми оказываются тоже спиральные автоколебания [11]. Там они должны приводить к появлению спонтанного осевого потока. В реальных условиях глухие торцы могут препятствовать осевому движению, однако, если торцы свободны или цилиндры закольцованы в виде тора, препятствия осевому движению нет. В случае струи также нет причин, запрещающих возникновение вращения.

Второй важный вопрос связан с экспериментальным обнаружением описанного эффекта. Вращательная неустойчивость волнового типа отмечалась во всех экспериментальных работах по устойчивости [13—17]. Закрутка струи как таковой не упоминалась прямо в работах, при наблюдении она могла быть отнесена за счет отклонения условий эксперимента от осевой симметрии. Наиболее близки к ожидаемой картине наблюдения в работе [18], касающиеся поведения спиральных мод и случайного механизма смены направления вращения. Необходимо также учитывать, что переход от профиля скорости на входном сечении к более



развитому происходит на небольшом числе калибров (эксперименты [19]), поэтому вращение может не успеть развиться. Видно, решение следует искать на пути увеличения дальности струи и консервативности ее профиля. Возникновение вращения в результате азимутальной неустойчивости наблюдалось в [20] в устойчиво стратифицированной воздушной цилиндрической полости, в центре дна которой помещался источник тепла. Вращение восходящей струи возникало при определенном соотношении горизонтальных и вертикальных перепадов температуры, когда число Грасгофа превышало некоторое критическое значение. Решающим фактором в [20] было наличие тепловой стратификации, в то время как в настоящей работе продемонстрировано чисто гидродинамическое возникновение вращения.

Возникновение самовращения является особым примером потери симметрии. Вращательные движения, как известно, играют немаловажную роль в природе и, в частности, в атмосфере. Восходящие струи прогретого воздуха имеют тенденцию закручиваться, порождая смерчи. Причиной образования последних, возможно, является возникновение вращения в результате потери устойчивости. В этой связи обнаруженный здесь эффект представляет определенный интерес.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. *Batchelor G. K., Gill A. E.* Analysis of the stability of axisymmetric jets.— *J. Fluid Mech.*, 1962, v. 14, Pt 4, p. 529–551.
2. *Kamber T.* The stability of an axisymmetric jet with a parabolic profile.— *J. Phys. Soc. Japan*, 1969, v. 26, № 2, p. 566–575.
3. *Mattingly G. E., Chang C. C.* Unstable waves on an axisymmetric jet column.— *J. Fluid Mech.*, 1974, v. 65, Pt 3, p. 541–560.
4. *Lessen M., Singh P. J.* The stability of axisymmetric free shear layers.— *J. Fluid Mech.*, 1973, v. 60, № 3, p. 343–457.
5. *Strange P. J. R., Crighton D. G.* Spinning modes on axisymmetric jets. Pt 1.— *J. Fluid Mech.*, 1983, v. 134, p. 231–245.
6. *Morris P. J.* The spatial viscous instability of axisymmetric jets.— *J. Fluid Mech.*, 1976, v. 77, Pt 3, p. 511–529.
7. *Юдович В. И.* Возникновение автоколебаний в жидкости.— *ПММ*, 1971, т. 35, № 4, с. 638–655.
8. *Joseph D. D.* Stability of fluid motions. 1. (Springer Tracts in Natur. Phylosophy. V. 27). Berlin s.a.: Springer, 1976, 282 p.
9. *Гольдштик М. А., Штерн В. Н.* Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.
10. *Любимов Д. В., Пугин Г. Ф.* Надкритические движения в кубической плоскости.— В сб.: Гидродинамика. Вып. 10. Пермь; Изд. Перм. пед. ин-та, 1977, с. 15–26.
11. *Бабенко К. И., Афендинов А. Л., Юрьев С. П.* О бифуркации течения Куэтта между вращающимися цилиндрами в случае двукратного собственного значения.— *Докл. АН СССР*, 1982, т. 266, № 1 с. 73–78.
12. *Гольдштик М. А., Жданова Е. М., Штерн В. Н.* Спонтанная закрутка затопленной струи.— *Докл. АН СССР*, 1984, т. 277, № 4, с. 815–818.
13. *Andrade E. N., Tsien L. C.* The velocity distribution in a liquid into liquid jet.— *Proc. Phys. Soc. London*, 1937, v. 49, p. 381–391.
14. *Viilu A.* An experimental determination of the minimum Reynolds number for instability in a free jet.— *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, 1962, v. 29, № 3, p. 506–508.
15. *Reynolds A. J.* Observations of a liquid-into-liquid jet.— *J. Fluid Mech.*, 1962, v. 14, Pt 4, p. 552–556.
16. *Abramovich S., Solan A.* The initial development of a submerged laminar round jet.— *J. Fluid Mech.*, 1973, v. 59, Pt 4, p. 791–801.
17. *Mollendorf J. S., Gebhart B.* An experimental and numerical study of the viscous stability of a round laminar vertical jet with and without thermal buoyancy for symmetric and asymmetric disturbances.— *J. Fluid Mech.*, 1973, v. 61, № 2, p. 367–400.
18. *Crow S. C., Champagne F. M.* Orderly structure in jet turbulence.— *J. Fluid Mech.*, 1971, v. 48, Pt 3, p. 547–591.
19. *Rankin G. W., Sridhar K., Arulraja M., Kumar K. R.* An experimental investigation of laminar axisymmetric submerged jets.— *J. Fluid Mech.*, 1983, v. 133, p. 217–231.
20. *Torrance K. E.* Natural convection in thermally stratified enclosures with localized heating from below.— *J. Fluid Mech.*, 1979, v. 95, Pt 3, p. 477–495.

Новосибирск

Поступила в редакцию  
14.IX.1984