

УДК 532.516

**ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫЙ МЕХАНИЗМ КОНВЕКЦИИ В ЖИДКОСТЯХ,  
ОБУСЛОВЛЕННЫЙ ПОГЛОЩЕНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННО-  
ПЕРИОДИЧЕСКОГО ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ**

АКОПЯН Р. С., ЗЕЛЬДОВИЧ Б. Я.

Рассматривается задача о возникновении регулярной конвекции в слое жидкости с одной свободной поверхностью при поглощении световой волны с пространственно-периодическим в плоскости слоя распределением интенсивности, обусловленной температурной зависимостью коэффициента поверхностного натяжения. Определены профили скорости и температуры в объеме среды. Показано, что отклик системы на воздействие световой волны максимален при прочих равных условиях, когда период интерференционной картины интенсивности порядка удвоенной толщины слоя.

**1. Линеаризованные уравнения, описывающие термокапиллярный эффект в присутствии света.** Рассмотрим плоский слой светопоглощающей жидкости, например краситель в изотропном растворителе. Ось  $z$  декартовой системы координат направим перпендикулярно слою. Пусть поверхность  $z=0$  жидкости жесткая, а поверхность  $z=L$  свободная. При падении на слой двух плоских световых волн с одинаковыми частотами и линейными поляризациями образуется интерференционная картина интенсивности

$$E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} [E(\mathbf{r}) \exp(-i\omega t) + \bar{E}(\mathbf{r}) \exp(i\omega t)]$$

$$|E(x, y)|^2 = |E_1|^2 + |E_2|^2 + E_1 \bar{E}_2 \exp(ik_x x + ik_y y) + \bar{E}_1 E_2 \exp(-ik_x x - ik_y y)$$

где  $k$  — разность волновых векторов,  $E$  — комплексная амплитуда световой волны.

В дальнейшем будем подразумевать, что поворотом осей координат в плоскости  $x, y$  можно добиться того, чтобы  $k_y=0, k_x=k$ .

Пусть на жесткой границе  $z=0$  поддерживается постоянная температура  $T_0$  и скорость потока жидкости обращается в нуль:  $\mathbf{v}(z=0)=0$ .

Рассмотрим граничные условия на свободной поверхности  $z=L$ . Связанная с неоднородностью коэффициента поверхностного натяжения  $\sigma$  тангенциальная сила на единицу площади плоской поверхности равна  $\mathbf{f} = \nabla \sigma$ . Поэтому граничное условие на свободной поверхности с учетом термокапиллярной силы запишется в виде (см., например, [1–3]).

$$v_z=0, \quad \sigma_{zi} = \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}, \quad \sigma_{zi} = \eta \left( \frac{\partial v_z}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial z} \right) \quad (1.1)$$

где  $\sigma_{zi}$  — тензор вязких напряжений на границе,  $\eta$  — коэффициент вязкости. Дифференцируем первое уравнение, полученное из (1.1) при  $x_i \equiv x$  с учетом  $v_z(z=L)=0$ , по  $x$ , а второе (при  $x_i \equiv y$ ) — по  $y$  и складываем. Считая для простоты, что коэффициент поверхностного натяжения линейно зависит от температуры ( $\sigma = \sigma_0 - \sigma' T$ ), получаем второе граничное

условие для  $v_z$  при  $z=L$  [3]

$$\eta \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} = \sigma' \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

Еще одно граничное условие вытекает из закона теплоотдачи на свободной поверхности. Предполагается, что плотность теплового потока со свободной поверхности пропорциональна возмущению температуры, т. е.

$$-\chi \rho c_p \frac{\partial T}{\partial z} = bT$$

где  $b$  — коэффициент теплоотдачи,  $\chi$  — температуропроводность,  $\rho$  — плотность,  $c_p$  — теплоемкость.

В отсутствие светового поля равновесное состояние есть  $T_0 = \text{const}$ ,  $\rho = \text{const}$ ,  $p_0 = p(z=0) - \rho g z$ , где  $\mathbf{g} = -e_z g$  — ускорение силы тяжести,  $p$  — давление. При включении света система возмущается и стационарные уравнения для возмущенных величин  $\theta = T - T_0$ ,  $\delta p = p - p_0$  и для  $\mathbf{v}$  в линейном приближении имеют вид (см., например, [3, 4])

$$\nabla^2 \theta = -\frac{N(x)}{\rho c_p \chi}, \quad N(x) = \frac{cn\kappa |E|^2}{8\pi} \quad (1.2)$$

$$\nabla^2 \mathbf{v} - \frac{1}{\eta} \text{grad}(\delta p) = 0 \quad (1.3)$$

$$\text{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1.4)$$

Здесь  $n$  — показатель преломления среды,  $N(x)$  — мощность, выделяемая в единице объема при поглощении света,  $\kappa$  (размерности обратной длины) — коэффициент поглощения света,  $c$  — скорость света в пустоте.

Имея в виду рассмотреть только термокапиллярный механизм возникновения конвекции, выше пренебрегли объемной конвективной силой. Как известно (см. [3]), такое допущение справедливо в случае достаточно тонких слоев ( $L \ll \sqrt{\sigma' / (\rho g \alpha)}$ , где  $\alpha$  — коэффициент объемного теплового расширения). Бенаровский механизм в случае жестких границ был рассмотрен в работе [4] для аналогичных условий нагрева излучением.

Действуя операторами  $e_z \text{rot}$  и  $e_z \text{rot rot}$  на уравнение (1.3) и применяя (1.4), получаем

$$\nabla^2 \xi = 0, \quad \xi = e_z \text{rot} \mathbf{v} \quad (1.5)$$

$$\nabla^4 v_z = 0 \quad (1.6)$$

Из граничных условий при  $z=0, L$  и из уравнений (1.4), (1.5) получаем  $\xi(\mathbf{r})=0$ . Решение системы уравнений (1.2), (1.4), (1.6) и  $\xi(\mathbf{r})=0$  будем искать в виде

$$\theta(\mathbf{r}) = \frac{z}{2L} \left( \frac{2+B}{1+B} - \frac{z}{L} \right) \frac{\kappa L^2}{\rho c_p \chi} N_0 + \Theta(z) \exp(ikx) + \bar{\Theta} \exp(-ikx)$$

$$v_{x,z}(\mathbf{r}) = V_{x,z}(z) \exp(ikx) + \bar{V}_{x,z}(z) \exp(-ikx) \quad (1.7)$$

$$B = bL / \chi \rho c_p, \quad N_0 = cn\kappa (|E_1|^2 + |E_2|^2) / 8\pi$$

где  $B$  — безразмерный коэффициент теплоотдачи (число Био).

Для  $\Theta(z)$  и  $V_z$  получаем систему уравнений

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} - a^2 \right)^2 V_z = 0 \quad (1.8)$$

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} - a^2 \right) \Theta = -I \quad (1.9)$$

$$a = kL, \quad Z = \frac{z}{L}, \quad I = \frac{\kappa L^2 cn E_1 \bar{E}_2}{8\pi \rho c_p \chi}$$

а граничные условия, указанные выше, принимают вид

$$V_z = \frac{dV_z}{dZ} = \Theta = 0 \quad (Z=0) \quad (1.10)$$

$$V_z = 0, \quad \frac{d^2 V_z}{dZ^2} = -\frac{\sigma'}{\eta} a^2 \Theta, \quad \frac{d\Theta}{dZ} = -B\Theta \quad (Z=1)$$

Общее решение уравнения (1.9) можно представить в виде

$$\Theta(Z) = d_1 e^{az} + d_2 e^{-az} + I a^{-2}$$

Из граничных условий (1.10) для коэффициентов  $d_1$  и  $d_2$  получаем

$$d_{1,2} = -I \frac{ae^{\mp a} \pm B(1 - e^{\mp a})}{2a^2(B \operatorname{sh} a + a \operatorname{ch} a)}$$

Решение уравнения (1.8) с граничными условиями (1.10) имеет вид

$$V_z = (c_1 + b_1 Z) e^{az} + (c_2 + b_2 Z) e^{-az} \quad (1.11)$$

$$c_1 = -c_2 = F(a) \operatorname{sh} a, \quad b_{1,2} = \pm F(a) [a \exp(\mp a) - \operatorname{sh} a]$$

$$F(a) = \frac{\sigma' I}{4\eta} (1 - \operatorname{ch} a) (a - \operatorname{sh} a \operatorname{ch} a)^{-1} (B \operatorname{sh} a + a \operatorname{ch} a)^{-1}$$

Как и в работе [4], из условий несжимаемости (1.4) и из уравнения  $\xi(r) = 0$  получаем

$$V_x(Z) = ia^{-1} \frac{dV_z(Z)}{dZ}, \quad V_v = 0 \quad (1.12)$$

Теперь рассмотрим некоторые особенности поведения полученных выше функций. При значениях параметра  $a \ll 1$ , т. е. при наиболее плавной картине интерференции, когда  $\Lambda \gg L$ , профиль функции  $V_z(Z, a, B)$  по  $Z$  имеет вид

$$V_z(Z, a, B) = \frac{\sigma' I}{8\eta B + 1} a^2 Z^2 (1 - Z) \quad (1.13)$$

Функция достигает своего максимального значения при  $Z = Z_1 = 2/3$ . Этот максимум как функция от  $L$  и  $k$  ведет себя как  $k^2 L^4 \kappa$ .

При  $a \gg 1$  функция  $V_z(Z, a, B)$  достигает своего максимума при  $Z_1 = 1 - a^{-1}$   $V_z(Z_1, a, B) = \sigma' I [2\eta e a (B + a)]^{-1}$ .

На фигуре штриховой линией показан график зависимости аргумента  $Z_1$ , при котором  $z$ -компонента скорости достигает максимального значения по  $Z$ , от параметра  $a$  при промежуточных значениях  $a$ . Из (1.11) видно, что  $Z_1$  не зависит от числа Био  $B$ . Функция  $V_z(Z_1, a, B)$  достигает своего максимума при фиксированных  $L$  и  $\kappa L$  при  $a = kL \approx 2$  (см. кривую 1)  $V_z(Z_1, 2, B) \approx 0,037 \sigma' I [(B + 2)\eta]^{-1}$ .

При  $B = 0$ ,  $\eta = 10^{-2}$  Пз,  $\sigma' = 10^{-2}$  эрг·град $^{-1}$ ·см $^{-2}$ ,  $\chi = 10^{-3}$  см $^2$ /с,  $\rho c_p = 4$  Дж/см $^3$ ·град,  $L = 0,1$  см,  $\kappa L = 0,5$ ,  $N = (cn/8\pi) |E|^2 = 1$  Вт/см $^2$  развивается довольно сильная конвекция:  $v_z \approx 0,12$  см/с. Функция  $V_z(Z_1, a, B)$  достигает своего максимального значения ( $V_z \approx 0,015 \sigma' I / \eta$ ) при фиксированных  $k$  и  $\kappa L$  при  $kL \approx 3$  (см. кривую 2).

Амплитуда  $x$ -компоненты скорости есть  $-iV_x(Z, a, B)$ . Она отстает по фазе на  $\pi/2$  от  $z$ -компоненты скорости. Из (1.12) и (1.13) видно, что  $-iV_x(Z, a, B)$  принимает максимальное значение по  $Z$  при  $Z_2 = 1/3$ :

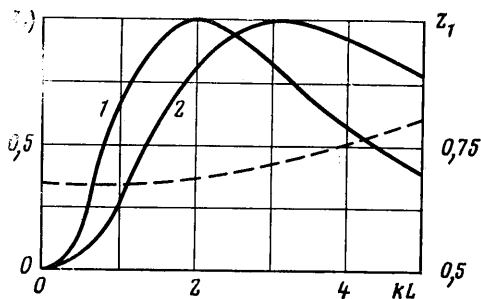
$$-iV_x(Z_2, a, B) = \sigma' I a [24\eta(B + 1)]^{-1}$$

Функция  $-iV_x$  обращается в нуль при  $Z_1 = 2/3$ , когда  $V_z$  достигает максимума. При  $a \gg 1$  функция  $-iV_x$  имеет максимум при  $Z_2 = 1 - 2/a$

$$-iV_x(Z_2, a, B) = \sigma' I [2\eta e^2 a (B + a)]^{-1}$$

Профиль возмущения температуры  $\Theta(Z)$  для  $a \ll 1$  — парабола с максимумом при  $Z_3 = (0,5B+1)/(B+1)$ , равным  $\Theta(Z_3) = 0,5IZ_3^2$ .

**2. Обсуждение результатов.** Результаты настоящей работы показывают, что уже при весьма умеренных плотностях мощности интерферирующих световых волн порядка  $1 \text{ Вт/см}^2$  при толщине слоя  $L \sim 0,1 \text{ см}$



создается чрезвычайно сильная конвекция ( $v_z \sim 0,1 \text{ см/с}$ ). Примечательно то, что можно системе навязать желаемую структуру начальных возмущений. Подчеркнем, что, как и в случае конвекции на основе бенаровского механизма [4], с помощью световых полей легко создавать начальные возмущения с самой разнообразной структурой — в виде равномерных роликов, роликов с дислокациями [5], кольцевых роликов, ячеек с квадратной или гексагональной упаковкой — как с идеальной, так и с различными дислокациями. Важно, что с помощью лазеров можно плавно изменять периоды картины конвекции, например изменением угла между интерферирующими пучками.

Как видно из (1.7), однородная по пространству часть тепловыделения в пренебрежении конвекцией приводит к параболическому распределению температуры. Для него градиент температуры при  $z=0$  принимает максимальное значение

$$\frac{dT}{dz} = \frac{2+B}{1+B} \frac{\kappa L c n}{16\pi r c_p \chi} (|E_1|^2 + |E_2|^2)$$

Если ввести число Марангони, используя указанное значение градиента температуры

$$M = \frac{\sigma' L^2}{\eta \chi} \frac{dT}{dz} = \frac{2+B}{1+B} \frac{\sigma' L^3 \kappa c n}{16\pi r c_p \eta \chi^2} (|E_1|^2 + |E_2|^2)$$

то с его помощью можно сформулировать критерий применимости проведенного рассмотрения. Линеаризация справедлива при выполнении условия  $M \leq 84(B+2)^2/(B+1)$  и при  $B=0$ ,  $M \leq 340$ .

Авторы выражают благодарность Н. Т. Пашенко, Н. В. Табиряну и Ю. С. Чилингаряну за ценные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Pearson J. R. A. On convection cells induced by surface tension.— J. Fluid Mech., 1958, v. 4, № 5, p. 489–500.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М.: Гостехиздат, 1953.
3. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
4. Акопян Р. С., Зельдович Б. Я. Естественная конвекция в жидкостях, обусловленная поглощением лазерного излучения.— ПММ, 1985, вып. 4, с. 685–688.
5. Баранова Н. Б., Зельдович Б. Я., Мамаев А. В., Пилипецкий Н. Ф., Шкунов В. В. Исследование плотности дислокаций волнового фронта световых полей со спеклструктурой.— ЖЭТФ, 1982, т. 83, вып. 5, с. 1702–1710.

Москва

Поступила в редакцию  
15.VI.1984