

УДК 532.516

НАЧАЛЬНЫЙ УЧАСТОК В КВАДРАТНОМ КАНАЛЕ,
ВРАЩАЮЩЕМСЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПОПЕРЕЧНОЙ ОСИ

ОВЧИННИКОВ О. Н., РУКОЛАЙНЕ А. В.

Ламинарное течение жидкости в канале, равномерно вращающемся относительно поперечной оси, рассматривалось в ряде работ. Обзор приведен, например, в [1]. Однако во всех этих работах теоретическому исследованию подвергся только случай стабилизированного течения. Ниже на основе результатов численного интегрирования параболизированной системы уравнений Навье — Стокса проанализировано развитие ламинарного течения в призматическом канале, который равномерно вращается вокруг оси, перпендикулярной одной из стенок канала.

1. Рассмотрим задачу о развитии течения несжимаемой вязкой жидкости в полубесконечном канале с квадратным поперечным сечением, который вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно оси, перпендикулярной одной из стенок канала. Введем декартову систему координат, жестко связанную с каналом. Начало координат совместим с левой нижней вершиной поперечного сечения во входной плоскости канала. Оси x и y в этой плоскости направим вдоль стенок канала, ось z — вдоль канала. Будем считать, что вращение канала происходит вокруг оси y , т. е. $\omega = -\omega j$.

Ламинарное и стационарное движения жидкости в канале описываются системой уравнений Навье — Стокса и неразрывности, которые во введенной системе координат имеют вид

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 u + 2Rw \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 v \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} &= -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \nabla^2 w - 2Ru \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

В (1.1), (1.2) все линейные размеры отнесены к H — длине стороны поперечного сечения канала, а составляющие вектора относительной скорости u , v и w — к расходной скорости w_0 ; $\Pi = p/\rho w_0^2 - (x^2 + z^2) \omega^2 H^2 / 2w_0^2$ — модифицированное давление; $\text{Re} = w_0 H / \nu$ — число Рейнольдса; $R = \omega H / w_0$ — величина, обратная числу Россби; p — давление; ρ — плотность; ν — кинематическая вязкость жидкости; $\nabla^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 + \partial^2 / \partial z^2$ — оператор Лапласа.

В предположении, что на входе в канал распределение продольной составляющей скорости жидкости w равномерно, а вторичное течение от-

существует, граничные условия для системы (1.1), (1.2) запишутся в виде

$$\begin{aligned} w=1, \quad u=v=0, \quad \Pi=\Pi_0+2Rx, \quad (z=0, 0 \leq x, y \leq 1) \\ u=v=w=0 \quad (z>0; x=0, 1, 0 \leq y \leq 1; y=0, 1, 0 \leq x \leq 1) \end{aligned} \quad (1.3)$$

где Π_0 — некоторая постоянная.

Нормировка решения обеспечивается заданием объемного расхода жидкости через канал

$$\int_0^1 \int_0^1 w \, dx \, dy = 1 \quad (1.4)$$

2. Система (1.1), (1.2) — нелинейная система дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа. Поскольку в случае больших значений Re не представляется возможным получить ее аналитическое или численное решение, то упростим ее.

Следуя [2], заменим в (1.1) трехмерный оператор Лапласа двумерным

$$\nabla_1^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2 \quad (2.1)$$

и продольный градиент модифицированного давления $\partial \Pi / \partial z$ — его осредненным по поперечному сечению значением

$$\frac{\partial \Pi^*}{\partial z} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial \Pi}{\partial z} \, dx \, dy \quad (2.2)$$

Физическая сущность упрощений (2.1) и (2.2) очевидна и согласуется с экспериментом [1] всюду, за исключением лишь небольшой области вблизи входа.

Полученная система уравнений (1.1), (2.1), (2.2) параболическая по переменной z , допускает расщепление и при краевых условиях (1.3) может быть проинтегрирована численно маршевым методом. Учитывая затруднения, возникающие при интегрировании даже упрощенного (без кориолисовых членов) варианта этой системы и связанные с определением модифицированного давления Π [3, 4], несколько преобразуем эту систему.

Исключая из первых двух уравнений системы (1.1) модифицированное давление Π , с учетом (2.1) будем иметь

$$\frac{\partial(u\xi)}{\partial x} + \frac{\partial(v\xi)}{\partial y} + w \frac{\partial \xi}{\partial z} = \frac{1}{Re} \nabla_1^2 \xi + \frac{\partial w}{\partial y} \left(2R - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.3)$$

$$\xi = \partial u / \partial y - \partial v / \partial x \quad (2.4)$$

Введем две функции φ и ψ , положив

$$u = \partial \varphi / \partial x + \partial \psi / \partial y; \quad v = \partial \varphi / \partial y - \partial \psi / \partial x \quad (2.5)$$

Подставляя (2.5) в (1.2) и (2.4), получим два уравнения Пуассона

$$\nabla_1^2 \varphi = -\partial w / \partial z \quad (2.6)$$

$$\nabla_1^2 \psi = \xi \quad (2.7)$$

Граничные условия к уравнениям (2.6) и (2.7) определим из условия непроницаемости стенок канала. С учетом соотношений (2.5) и линейности уравнений (2.6), (2.7) эти условия могут быть записаны в следующем виде: на стенках канала l функция ψ и нормальная производная функции φ обращаются в нуль

$$\psi|_l = 0, \quad \partial \varphi / \partial n|_l = 0 \quad (2.8)$$

Завихренность потока ξ на стенках канала зададим так, чтобы для u , v выполнялись условия прилипания. Для этого $\psi(x, y)$ в окрестности, на-

пример, стенки $y=y_i$ разложим по степеням Δy . Ограничиваясь первыми тремя членами, будем иметь

$$\psi(x, y_i + \Delta y) \simeq \psi(x, y_i) + \psi_v'(x, y_i) \Delta y + \frac{1}{2} \psi_{vv}''(x, y_i) \Delta y^2 \quad (2.9)$$

Принимая во внимание, что на стенке y_i

$$\psi(x, y_i) = 0; \quad \psi_v'(x, y_i) = -\varphi_x'(x, y_i); \quad \psi_{vv}''(x, y_i) = \xi(x, y_i)$$

и используя (2.9), получим

$$\xi(x, y_i) = \frac{2}{\Delta y^2} \psi(x, y_i + \Delta y) - \frac{2}{\Delta y} \varphi_x'(x, y_i) \quad (2.10)$$

Соотношение (2.10) можно рассматривать как обобщение условия Тома [5] на квазипространственный случай. Условия для завихренности на стенке $x=x_i$ получаются аналогично.

3. Решение полученной системы уравнений, записанной в дискретной форме, на каждом шаге по z может быть разбито на три этапа. Предполагая сначала, что вторичное течение в данном сечении известно, из последнего уравнения системы (1.1) с учетом (2.1), (2.2), условия постоянства расхода (1.4) и граничных условий (1.3) определяем осредненный по сечению продольный градиент давления $\partial \Pi^* / \partial z$ и поле осевой скорости w [2]. Затем по известному полю w путем решения задачи Неймана для уравнения (2.6) находим функцию φ . Наконец, путем совместного интегрирования уравнения переноса завихренности (2.3) при граничном условии (2.10) и уравнения (2.7) при условии (2.8) определяем поле скоростей вторичного течения. Результаты счета на каждом шаге могут быть уточнены путем повторения всей процедуры.

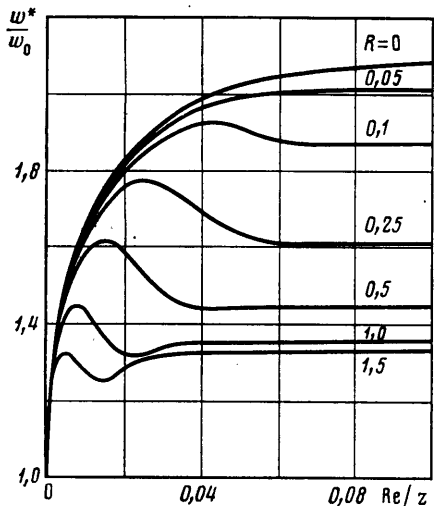
4. В настоящей работе разностная аппроксимация уравнения (2.3) и последнего уравнения системы (1.1), (2.1) осуществлялась аналогично [2]. Уравнения Пуассона (2.6) и (2.7) и все производные в (2.5), (2.8) и (2.10) аппроксимировались центральными разностями второго порядка. Для решения разностной системы алгебраических уравнений, отвечающей пятиточечному шаблону, был использован метод неполной факторизации [6, 7]. В силу симметрии течения относительно центральной плоскости $y=0,5$ расчет течения в канале производился только для его нижней половины ($0 \leq y \leq 0,5$) на квадратной сетке 11×21 с шагом по z , равным $0,05-0,2$. Расчеты выполнены для различных комбинаций чисел Re и R при $Re \leq 250$, $0 \leq R \leq 1,5$.

Результаты счета на первом шаге зависят от выбора расчетной схемы, шага и т. п. Например, результаты расчета поля w на первом шаге при $R=0$ и шаге $\Delta z=0,1$ при условии запаздывания поля u и v на один шаг и без запаздывания различаются на 4,5%. На последующих шагах это различие менее 0,5%. Учитывая это, на первом шаге по z был использован итерационный процесс по всем переменным. На последующих шагах по z с целью сокращения времени счета значения u и v при расчете w брались с предыдущего шага.

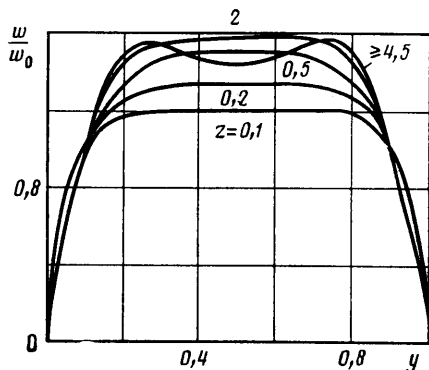
5. Некоторые результаты расчета развития течения в квадратном канале для $Re=100$ и различных значений параметра вращения R приведены на фиг. 1-5. На фиг. 1 приведены значения осевой скорости на центральной линии канала w^* для различных R . Сопоставление полученной зависимости w^* от z для $R=0$ с [3] (расчет без учета вторичных токов на первом шаге) и экспериментом [8] показывает, что учет вторичных токов несколько убыстряет процесс развития течения в канале вблизи входа. При $z/Re > 0,02$ результаты расчета w^* для $R=0$ хорошо согласуются с экспериментом [8].

При $R \neq 0$ нарушается монотонный характер изменения w^* . При этом с возрастанием R асимптотические значения w^* уменьшаются.

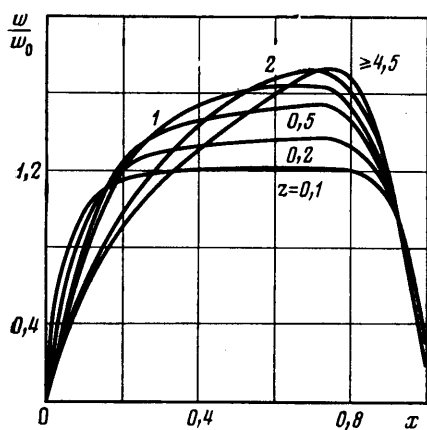
На фиг. 2-3 приведены профили осевой составляющей скорости w/w_0 соответственно в плоскостях симметрии канала $x=0,5$ и $y=0,5$, рассчитанные для $Re=100$, $R=0,5$ и различных z .



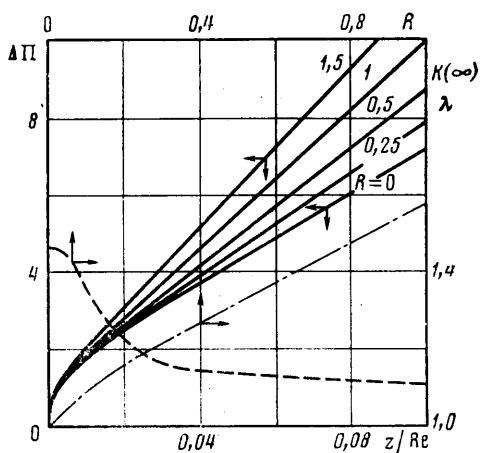
Фиг. 1



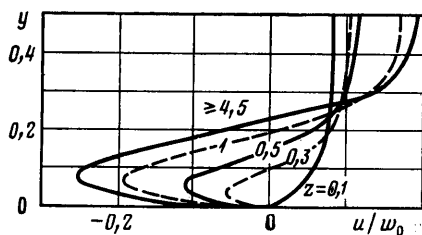
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Анализ фиг. 1–3 показывает, что участок стабилизации во вращающемся канале условно может быть разделен на две характерные области: область вблизи входа, где развитие профиля w близко к неподвижному каналу, но за счет действия кориолисовых сил с удалением от входа несколько нарушается симметрия течения относительно плоскости $x=0,5$, и вторую область, где происходит перестройка профиля w в асимптотический профиль для вращающегося канала. Для данного R за начало второй области может быть принята точка максимума соответствующей кривой на фиг. 1.

Во второй области при $R < a$ ($a \approx 0,4$) в плоскостях, параллельных оси вращения, с увеличением R происходит уплощение профиля w в центре сечения; в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, максимум профиля w смещается к стороне повышенного давления, причем наклон w к оси x в центре сечения возрастает. При дальнейшем увеличении R ($R > a$) в плоскостях, параллельных оси вращения, происходит дальнейшее уплощение профиля w в центре сечения с образованием вблизи стенок канала максимумов скорости, характерных для слоев Экмана; в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, наклон профиля w к оси x в центре сечения и его максимум уменьшаются.

Длину начального участка определим как значение осевой координаты z , при которой скорость на центральной линии канала достигает 99% значения, соответствующего полностью развитому состоянию. При $R=0$, согласно фиг. 1, длина начального участка $z/Re=0,076$, что близко к экспериментальному значению 0,074 [9] и расчетному значению 0,0752 [10]. С увеличением R (при фиксированном Re) длина начального участка уменьшается (фиг. 1).

На фиг. 4 приведено изменение продольного перепада давления $\Delta\Pi = -2(\Pi_0^* - \Pi^*)$ в начальном участке канала для различных значений параметра вращения R (непрерывные кривые). При всех R расчетные кривые имеют точку перегиба и наклонную асимптоту, к которой подходят сверху. С увеличением R угол наклона асимптот возрастает, следовательно, возрастает и коэффициент сопротивления канала.

Если падение давления в канале вдоль оси z определить соотношением

$$\Delta\Pi = 2|\partial\Pi^*/\partial z|z + K(z) \quad (5.1)$$

то при $R=0$ расчетное значение $K(\infty)=1,47$. Для $Re > 600$ экспериментальное значение $K(\infty)=1,31$ [11]. Согласно расчету [12], $K(\infty)=1,43$, а по теории [10] — 2,02. Зависимость $K(\infty)$ от R , рассчитанная по формуле (4.1) для $Re=100$, приведена на фиг. 4 (штриховая кривая). На этой же фигуре нанесена зависимость от R отношения коэффициента сопротивления вращающегося канала к коэффициенту сопротивления неподвижного $\lambda = \lambda_w/\lambda_0$ для $Re=100$ при стабилизированном режиме течения (штрихпунктирная кривая). Расчетные значения λ_0 хорошо согласуются с [13].

Картина развития вторичного течения во вращающемся канале приближенно выглядит так. За счет вытесняющего действия пристенных слоев образуется поперечное течение, направленное к центру сечения, скорость которого пропорциональна $(Re z)^{-1/2}$. На него накладывается циркуляционное течение, которое образуется за счет неоднородности поля кориолисовых сил. Характер вторичных токов в конкретном сечении зависит от вклада соответствующей части течения.

При малых R вблизи от входа вторичное течение близко к радиальному, направленному к центру сечения (сток с нулевым расходом). С удалением от входа радиальный характер вторичного течения постепенно разрушается: в пристенных слоях верхней и нижней половин канала возникает циркуляционное течение, направленное от стороны повышенного давления к стороне разрежения. Две струи, образовавшиеся в пристенных слоях верхней и нижней половин канала, разворачиваются у стороны разрежения и создают в центральной части сечения дополнительное течение, направленное к стороне давления. С удалением от входа критическая точка, оставаясь в плоскости $y=0,5$, смещается от центра сечения к стороне давления. В сечении, где она подходит к набегающей стенке, происходит замыкание вторичного течения и образуется парный вихрь с плоскостью симметрии $y=0,5$. При дальнейшем удалении от входа оси вихря смещаются от плоскости симметрии $y=0,5$ и стороны давления. При $R \rightarrow \infty$ предельное положение центров вихря $x=0,5$; $y=0,5 \pm 0,2236$ [14, 15].

С увеличением R влияние циркуляционной части течения возрастает —

ее проявление наблюдается уже непосредственно вблизи входа. Длина участка стабилизации сокращается.

В соответствии с изменением поля w изменение параметров вторичного течения по длине вращающегося канала также становится немонотонным. Вдали от входа и боковых стенок изменение профиля u/w_0 с увеличением R аналогично изменению асимптотического ($|\text{Re } R| < \infty$; $R \rightarrow \infty$) профиля u/w_0 для квадратного канала [14, 15]. При $R > 1$ профили u/w_0 вблизи стенок, перпендикулярных оси вращения, близки к теоретическому профилю Экмана. Профили u/w_0 , рассчитанные для $\text{Re}=100$, $R=0,5$ и различных z в сечении $x=0,5$ приведены на фиг. 5.

Расчеты при $\text{Re}=135, 188,2$ и 250 показали, во-первых, хорошую согласованность по асимптотике с известными результатами [13, 16] и, во-вторых, что с увеличением числа Рейнольдса Re описанный выше характер изменения всех параметров течения во вращающемся канале сохраняется. Однако с количественной точки зрения увеличение Re при фиксированном R приводит к утоньшению пристенных слоев (причем более существенному на стенках канала, параллельных оси вращения), уменьшению скоростей вторичного течения вблизи входа и некоторому увеличению длины начального участка.

ЛИТЕРАТУРА

1. Смирнов Е. М., Юркин С. В. О течении жидкости по вращающемуся каналу квадратного поперечного сечения.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 6, с. 24–30.
2. Patancar S. V., Spalding D. B. A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1972, v. 15, № 10, p. 1787–1806.
3. Briley W. R. Numerical method for predicting three-dimensional steady viscous flow in ducts.— J. Comput. Phys., 1974, v. 4, № 1, p. 8–28.
4. Fuchs L., Zhao H. Numerical simulation of three-dimensional flows in duct.— In: Numer. Meth. Laminar and Turbulent Flow. Proc. 2nd Int. Cont., Venice, 1981. Swansea, 1981, p. 164–177.
5. Том А., Эйлер К. Числовые расчеты полей в технике и физике. М.— Л.: Энергия, 1964. 208 с.
6. Марчук Г. И. Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 455 с.
7. Булеев Н. И., Замирайлова Л. Г. О решении двумерной задачи Неймана.— В сб.: Вопросы атомной науки и техники. Сер. Физика и техника ядерных реакторов, 1980, № 4(13), с. 102–110.
8. Goldstein R. J., Kreid D. K. Measurement of laminar flow development in square duct using a laser-doppler flowmeter.— Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1967, v. 34, № 4, p. 813–818.
9. Филиппов В. М. Экспериментальное исследование развития ламинарного течения в каналах квадратного сечения.— В кн.: Аэромеханика. М.: Наука, 1976, с. 217–229.
10. Han L. S. Hydrodynamic entrance lengths for incompressible laminar flow in rectangular ducts.— Trans. ASME, J. Appl. Mech., 1960, v. 27, № 3, p. 403–409.
11. Beavers G. S., Sparrow E. M., Magnuson R. A. Experiments on hydrodynamically developing flow in rectangular ducts of arbitrary aspect ratio.— Int. J. Heat Mass Transfer, 1970, v. 13, № 4, p. 689–702.
12. Карлсон, Хорнбек. Численный расчет ламинарного течения на начальном участке канала квадратного сечения.— Тр. амер. о-ва инж.-мех., Прикл. механика, 1973, т. 40, № 1, с. 26–32.
13. Никольская С. Б. Ламинарное движение жидкости во вращающихся каналах.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 6, с. 175–178.
14. Овчинников О. Н. Об установившемся течении вязкой жидкости через вращающийся радиальный канал при малых значениях числа Россби.— ПМТФ, 1980, № 1, с. 76–83.
15. Овчинников О. Н. О стабилизированном течении вязкой жидкости через вращающийся цилиндрический канал при малых значениях числа Россби.— ПМТФ, 1981, № 6, с. 55–62.
16. Васильев В. Н., Рус В. В., Хоружников С. Э. Течение и теплообмен вязкой жидкости в радиально вращающемся канале круглого сечения.— В кн.: Процессы тепло- и массообмена в элементах термооптических устройств. Минск, 1979, с. 136–148.