

УДК 532.516

## ТЕЧЕНИЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ ПРИ ВРАЩЕНИИ ДИСКА

БЕРДНИКОВ В. С., ПОЛЕЖАЕВ В. И., ПРОСТОМОЛОТОВ А. И.

Течение вязкой жидкости в цилиндрическом сосуде при вращении диска, соосного с сосудом и закрывающего полностью или частично поверхность жидкости, имеет важное прикладное значение, например, для задач турбостроения и выращивания кристаллов [1, 2].

Наиболее полно изучено течение при вращении бесконечного диска в неограниченной вязкой жидкости, поле скорости которого описывается автомодельным решением [1]. Это течение в диапазоне существования ламинарного движения представляет собой одновихревую циркуляцию, при которой жидкость перемещается от оси в радиальном направлении за счет действия центробежных сил вблизи поверхности диска и одновременно поступает в осевую область к диску из глубинных слоев.

Усложнение такого течения возникает при осевом ограничении области в вертикальном направлении за счет введения еще одного соосного диска, а также при радиальном ограничении потока за счет вертикальной поверхностной пленки или твердого кожуха (фиг. 1).

Структура течения вращающейся жидкости и его интенсивность определяются числом Рейнольдса  $Re = \Omega_k R_k^2 / \nu$  (здесь  $\Omega_k$  — угловая скорость,  $R_k$  — радиус диска,  $\nu$  — кинематическая вязкость жидкости), а также геометрическими параметрами — глубиной жидкости  $H$  и радиусом сосуда  $R_T$ .

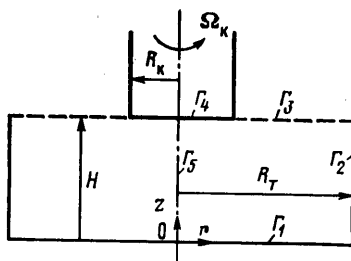
В случае, когда диск полностью закрывает поверхность жидкости (вращающаяся крышка), некоторые численные решения получены методом конечных разностей для малых чисел Рейнольдса  $Re \leq 225$  [1],  $Re \leq 400$  [3] и методом конечных элементов для несколько больших значений  $Re \leq 4,5 \cdot 10^3$  [4].

Вращение диска, не полностью закрывающего поверхность жидкости в цилиндрическом сосуде, соответствует широко распространенной изотермической модели выращивания кристаллов методом Чохральского [5–13]. Применительно к этой модели в случае  $R_k/R_T < 1$  при  $Re < 10^3$  отдельные решения получены численно в работах [5, 6] и экспериментальное изучение начато в работах [7, 8].

До настоящего времени остаются открытыми вопросы, связанные с адекватностью математической модели и влиянием на структуру течения геометрических параметров ( $H/R_T$ ,  $R_k/R_T$ ) и изменения числа Рейнольдса. В упомянутых выше работах отсутствует количественное сопоставление теоретических и экспериментальных данных в достаточно широком диапазоне чисел Рейнольдса и классификация течений, вызванных вращением диска, является не полной. Эта классификация впервые дана в работе [6] и ограничена появлением и развитием одновихревого течения.

Ранее в работах авторов статьи разработаны методы численного и лабораторного моделирования [2, 9–11] и установлена адекватность математической модели данным эксперимента в качественном [12], а затем в количественном отношении в случае стационарного одновихревого течения жидкости при параметрах:  $Re = 688$ ,  $H/R_T = 0,7$ ,  $R_k/R_T = 0,36$  [13].

В данной работе проведено более полное теоретическое и экспериментальное исследование, которое охватывает широкий диапазон чисел  $Re$ ,  $H/R_T$  и  $R_k/R_T$ , что позволяет выявить особенности течения, являющегося функцией времени, глубины жидкости, числа Рейнольдса, радиусов диска и сосуда, а также их геометрических форм (плоский, выпуклый или вогнутый диск). Приводятся результаты сопоставления данных численного и лабораторного моделирования. Обнаружено появление



Фиг. 1

вторичных вихрей в приосевой области при больших числах Рейнольдса и построена диаграмма течений различной пространственной конфигурации.

**1. Математическая модель.** Изучается течение вязкой изотермической жидкости в цилиндрическом сосуде, на части или всей поверхности которой соосно расположен вращающийся диск. Расчетная схема показана на фиг. 1:  $\Gamma_1$  — дно;  $\Gamma_2$  — боковая стенка сосуда (тигля);  $\Gamma_3$  — свободная поверхность жидкости;  $\Gamma_4$  — поверхность диска (кристалла),  $\Gamma_5$  — ось симметрии.

Математическое моделирование основано на численном решении системы нестационарных уравнений Навье — Стокса для несжимаемой вращающейся жидкости в цилиндрической системе координат. Предполагается осевая симметрия течения и плоская форма свободной поверхности жидкости. На поверхности диска и сосуда задаются условия прилипания. Поверхность жидкости предполагается недеформируемой и свободной от касательных напряжений. В качестве характерных масштабов для приведения задачи к безразмерному виду выбраны скорость вращения  $\Omega_k$  и радиус диска  $R_k$ .

В зависимости от применяемого метода математическая модель формулируется либо в естественных переменных ( $u, v, w, p$ ), либо в переменных вихрь — функция тока  $\omega, \psi, w$ , что достигается заменой переменных по формулам

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial r}, \quad u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Исходная система безразмерных уравнений в переменных  $u, v, w, p$  записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{w^2}{r} &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{1}{\text{Re}} \left( \Delta u - \frac{u}{r^2} \right) \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial r} + v \frac{\partial v}{\partial z} &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\text{Re}} \Delta v \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + v \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{uw}{r} &= \frac{1}{\text{Re}} \left( \Delta w - \frac{w}{r^2} \right) \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Соответственно в переменных  $\omega, \psi, w$  исходная система уравнений имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial r} + v \frac{\partial \omega}{\partial z} - \frac{u\omega}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial (w^2)}{\partial z} &= \frac{1}{\text{Re}} \left( \Delta \omega - \frac{\omega}{r^2} \right) \\ \Delta \psi - \frac{2}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} &= r\omega \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + v \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{uw}{r} = \frac{1}{\text{Re}} \left( \Delta w - \frac{w}{r^2} \right)$$

Здесь  $u, v, w$  — компоненты вектора скорости  $\mathbf{V}$ ;  $p$  — давление;  $\Delta \equiv \partial^2/\partial r^2 + r^{-1}\partial^2/\partial z + \partial^2/\partial z^2$  — лапласиан скалярной функции.

Граничные условия в соответствии со схемой, приведенной на фиг. 1, формулируются следующим образом:

$$\Gamma_1: w=0; \quad u=v=0 \quad \text{или} \quad \psi=0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z}=0 \quad (1.3)$$

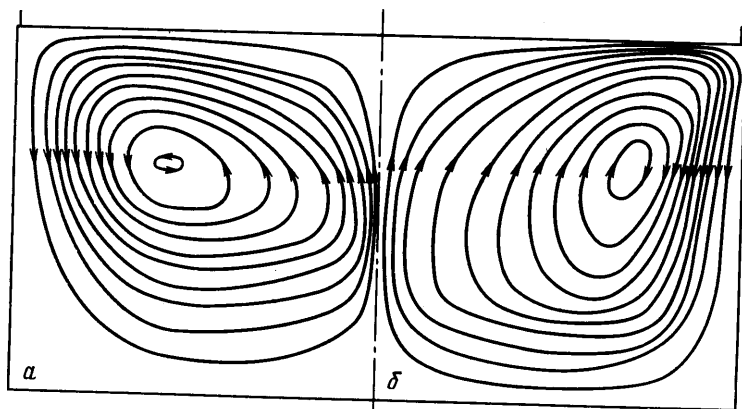
$$\Gamma_2: w=0; \quad u=v=0 \quad \text{или} \quad \psi=0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$$

$$\Gamma_3: \frac{\partial w}{\partial z} = 0; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad v=0 \quad \text{или} \quad \psi=0, \quad \omega=0$$

$$\Gamma_4: w=r; \quad u=v=0 \quad \text{или} \quad \psi=0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$$

$$\Gamma_5: w=0; \quad u=0, \quad \frac{\partial v}{\partial r} = 0 \quad \text{или} \quad \psi=0, \quad \omega=0$$

Следствием системы уравнений (1.1) или (1.2) и граничных условий



Фиг. 2

(1.3) является критериальная зависимость скорости жидкости

$$V=f(t, r, z, H/R_T, R_h/R_T, Re, \gamma) \quad (1.4)$$

Здесь  $\gamma$  является параметром, характеризующим кривизну диска [11].

В данной работе рассмотрен следующий диапазон изменения параметров:  $Re \leq 2 \cdot 10^4$ ;  $R_h/R_T = 0,36; 1; 0,2 \leq H/R_T \leq 1,4$ .

Для численного решения использованы два подхода, один из которых основан на использовании метода конечных разностей (в переменных  $\omega, \psi, w$ ), а другой — на использовании метода конечных элементов (в переменных  $u, v, w, p$ ). Подробно методические вопросы, относящиеся к обоим подходам, рассмотрены в [9, 10].

**2. Лабораторный эксперимент.** Экспериментальная установка представляет собой неподвижный цилиндрический сосуд, в который соосно могут помещаться вращающиеся диски. Сосуд (тигель) изготовлен из кварцевой трубы, вставленной в оргстеклянный кожух квадратного сечения. Пространство между стенками трубы и кожуха заполнено водой. Диски — набор медных цилиндров разного диаметра. Сменные диски устанавливались на вал, приводимый во вращение с равномерной угловой скоростью  $\Omega_h = 1-300$  об/мин. Точность регулирования не хуже  $\pm 1\%$ . Цилиндрический сосуд заполнялся этиловым спиртом (96%), визуализированным почти монодисперсной фракцией алюминиевых частиц — чешуек размером  $\sim 10$  мкм.

При наблюдениях и фотографировании пространственного течения использовался непрерывный плоский пучок света — световой нож толщиной  $\leq 2$  мм. Ориентацию светового ножа можно было менять: он рассекал объект или по оси, и тогда наблюдалось течение в плоскости  $(r, \varphi)$ , или параллельно дну тигля, и тогда наблюдалось течение в плоскости  $(r, z)$ .

Для измерений скорости использовались прерывистые во времени плоские пучки света. Интервалы между отдельными вспышками задавались и контролировались. Определение скорости сводилось к измерению расстояния между соседними изображениями частицы-трассера на фотопленке. Обработка пленки проводилась с

известным увеличением. Траектории частиц наблюдались и фотографировались в отраженном свете. Более полное описание установки и методов измерения скорости и визуализации течения дано в [2, 11].

**3. Результаты теоретических и экспериментальных исследований.** Вращение диска, расположенного на поверхности жидкости и соосного с сосудом, создает центробежное силовое поле, которое является причиной течения жидкости в меридиональной плоскости. В зависимости от значения параметров в (1.4) в сосуде реализуются следующие основные режимы, которым соответствуют характерные структуры течения: основное стационарное одновихревое течение; стационарное течение с вторичными вихрями; переходный колебательный режим осесимметричных и трехмерных течений, последние из которых упорядочены по  $\varphi$  и соответствуют



Фиг. 3

колебательным картинам течения в плоскости  $(r, z)$ ; турбулентный режим течения.

Рассмотрим каждый из этих режимов и затем все результаты суммируем на диаграмме течений в плоскости  $(H/R_T, Re)$  при фиксированных значениях параметра  $R_k/R_T$ . Следуя принятой схеме при изучении устойчивости течения (см., напри-

мер, [2]), различают прежде всего основное течение, которое является единственным стационарным течением, существующим обычно при малом  $Re$ . Ввиду того что основное течение сложное и для него отсутствуют аналитические решения, устойчивость его в этой работе изучена экспериментально. Структуры основного течения, реализующиеся при изменении геометрических параметров и числа Рейнольдса, подробно исследованы путем численных расчетов.

1. Вначале рассмотрим основное течение и его зависимость от определяющих параметров.

В диапазоне малых чисел Рейнольдса ( $Re \leq 100$ ) интенсивность течения жидкости слабая, в циркуляции участвуют слои, сосредоточенные вблизи поверхности диска. При этом жидкость, вытекающая из-под диска, обладает небольшим импульсом и линии тока направлены параллельно его поверхности.

Для численного исследования структуры течения были зафиксированы параметры ( $H/R_T=1, R_k/R_T=1$ ) и изучалось влияние изменения числа  $Re$ . При  $Re=100$  структура меридионального течения показана на фиг. 2, а. Этот вариант был в основном использован для сопоставления с известными

в литературе численными решениями [3, 4], с которыми в результате получено хорошее соответствие.

С увеличением числа Рейнольдса до  $Re=688$  интенсивность течения возрастает и весь объем жидкости вовлекается в общую циркуляцию. Течение по-прежнему одновихревое, но его интенсивность возрастает до  $\psi_{max}=7,4 \cdot 10^{-2}$  (фиг. 2, б). При этом происходят и пространственные изменения структуры течения. Ускоряясь под вращающимся диском, поток жидкости достигает боковой стенки сосуда. Последняя ограничивает его радиальное движение, в связи с чем возникает резкое торможение и поворот потока ко дну. Это в свою очередь приводит к переориентации главной оси вихря, в результате которой она оказывается повернутой на некоторый угол к поверхности жидкости (диску). Дальнейшее движение к оси симметрии обусловлено необходимостью существования замкнутой циркуляции и восполнения вытекающих из-под диска масс жидкости.

Модель метода Чохрального отличается от предыдущих случаев наличием свободной поверхности жидкости, так как диск (выращиваемый кристалл) закрывает эту поверхность только частично. Дополнительным параметром, влияющим на структуру течения, является отношение  $R_n/R_T \leq 1$ , которое в пределе  $R_n/R_T=1$  соответствует уже рассмотренному случаю вращающейся крышки.

Как показали расчеты, уменьшение радиального размера диска и появление свободной поверхности жидкости качественно не изменяет структуру течения, но приводит при параметрах  $R_n/R_T=0,36$ ,  $Re=688$ ,  $H/R_T=1$  к увеличению интенсивности до  $\psi_{max}=7,9 \cdot 10^{-2}$  (фиг. 3, а).

При одновременном увеличении числа Рейнольдса до  $Re=1240$  и уменьшении высоты слоя жидкости до  $H/R_T=0,26$  характер одновихревого течения сохраняется, но несколько видоизменяется: сплющивается основной вихрь и за счет этого исчезает наклонная ориентация его главной оси к поверхности жидкости (диску). При этом интенсивность течения увеличивается:  $\psi_{max}=5,36 \cdot 10^{-2}$  (фиг. 3, б). Заметим, что в рамках принятого выбора масштабов для сопоставления интенсивностей потока при разных числах Рейнольдса следует рассматривать произведение  $\psi_{max}Re$ .

В работе [13] дано сопоставление профилей радиальной, осевой и окружной компонент скорости при параметрах  $Re=688$ ,  $H/R_T=0,7$ ,  $R_n/R_T=0,36$ , подтвердившее адекватность основного течения, реализуемого в расчетах и эксперименте. Ниже приводятся соответствующие данные при больших числах  $Re$ .

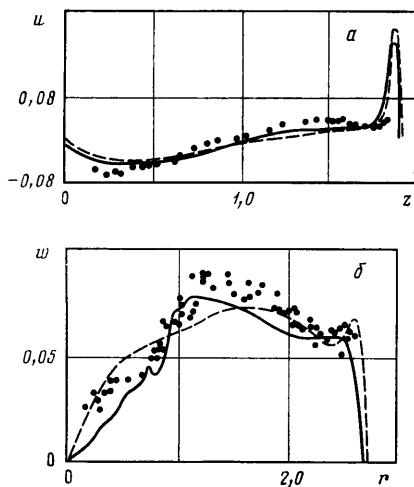
2. Рассмотрим стационарное течение с вторичными вихрями. Увеличение числа Рейнольдса до значений  $Re=1240$  при определенной глубине заполнения сосуда, например  $H/R_T \geq 0,7$ , приводит к некоторым качественным изменениям структуры течения — появлению двух областей течения в тигле (фиг. 3, в). Это связано с тем, что диапазон существования одновихревого течения ограничен и при увеличении числа Рейнольдса до  $Re=1240$  и повышении уровня жидкости в сосуде ( $H/R_T \geq 0,7$ ) наряду с основным потоком возникает вторичный вихрь, локализованный в приосевой области. Этот эффект особенно важен в технологических приложениях, так как проявляется в подкристалльной области, от однородности которой зависит совершенство монокристаллической структуры.

Образование подкристалльного вихря связано в основном с ориентацией основного потока. Здесь существенна особенность течения в вращающейся жидкости, обусловленная наличием боковых границ, представляющих преграду для радиального движения жидкости.

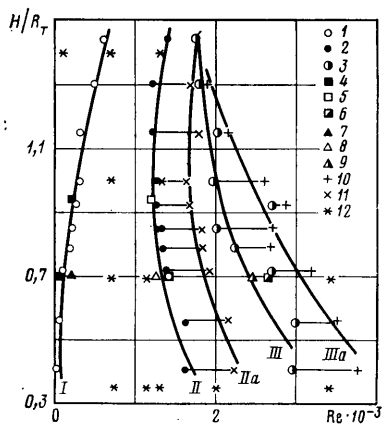
Отметим, что при вращении бесконечного диска в неограниченном объеме жидкости радиальное движение вызвано лишь действием центробежных сил вдоль всей поверхности диска и не ограничено стенками, поэтому ориентация основного вихря не изменяется при увеличении числа Рейнольдса; увеличение количества движения как бы «растекается» в радиальном направлении и не оказывает обратного влияния на течение

вблизи оси. Особенности течения в виде вторичных вихрей грушеобразной формы являются обратным эффектом движения жидкости в ограниченном объеме.

В сосуде (тигле) выделяются две характерные области течения (фиг. 3, в). Первая область связана с действием центробежных сил и находится непосредственно под вращающимся диском (кристаллом), причем линии тока в подкристалльной области параллельны поверхности диска.



Фиг. 4



Фиг. 5

Другая — основная область течения — находится под свободной поверхностью и при больших числах Рейнольдса ( $Re=1240$ ,  $H/R_T \geq 0,7$ ) отличается наклонной ориентацией потока по отношению к поверхности жидкости и диска.

Обратное влияние на поведение линий тока в подкристалльной области проявляется в том, что эти линии в слоях жидкости, участвующих в подъемном движении, направлены под углом к оси в соответствии с ориентацией внешнего потока. Однако в поверхностном слое под действием центробежных сил эти линии тока изменяют направление и становятся параллельными поверхности кристалла. Такое изменение направления движения жидкости происходит на границе этих двух характерных областей течения вблизи оси, что и приводит к появлению слабого приосевого вторичного вихря. Экспериментальная картина тонкой структуры течения в подкристалльной области в увеличенном масштабе приведена на фиг. 3, г.

Для этого режима течения на фиг. 4 сопоставлены профили радиальной и окружной компонент скорости по данным расчетов и эксперимента для  $Re=1240$ ,  $H/R_T=0,7$ ,  $R_k/R_T=0,36$ : профиль радиальной скорости  $u$  в сечении  $r=1,0$ , распределение окружной скорости  $w$  в сечении  $z=1,53$ ; штриховая линия соответствует данным, полученным методом конечных разностей, сплошная кривая — методом конечных элементов, точки — экспериментальные данные. Несколько лучшее соответствие наблюдается между результатами, полученными методом конечных элементов и в эксперименте. Соответствующие данному режиму размерные величины:  $R_k=1,45$  см,  $R_T=4$  см,  $H=2,4$  см,  $\Omega_k R_k=12,6$  см/с,  $\nu=1,47 \cdot 10^{-2}$  см<sup>2</sup>/с.

Отметим, что появление приосевого вторичного вихря является довольно тонким эффектом, в частности в предшествующих экспериментальных и численных исследованиях [5–8] оно не было обнаружено.

3. Рассмотрим колебательные режимы течения. В лабораторном эксперименте потеря устойчивости течения существенно зависит от глубины жидкости и, например, при  $H/R_T=0,7$  наблюдается для  $Re \geq 2,7 \cdot 10^3$ . Это

несколько расширяет общее представление о пороге возникновения неустойчивости, соответствующем замкнутым объемам вращающейся жидкости, который заметно понижается по сравнению с известным критическим значением числа Рейнольдса  $Re \sim 3 \cdot 10^3$ , определенным экспериментально для изотермических течений жидкости при вращении диска в неограниченном пространстве. Если в последнем случае появление колебаний связано только с потерей устойчивости течения в пограничном слое, то при моделировании метода Чохральского наблюдается несколько различных по своей структуре механизмов колебаний. Отметим, что качественный характер автоколебательных процессов зависит как от числа Рейнольдса, так и от геометрических параметров  $H/R_T$ ,  $R_k/R_T$ . Например, по данным лабораторного эксперимента при числах Рейнольдса, близких к критическим  $(2,7-3,3) \cdot 10^3$ , и при фиксированном отношении  $R_k/R_T = 0,36$  уменьшение глубины жидкости сопровождается переходом от автоколебаний, связанных с прецессией подкристалльной струи, к колебаниям вторичного вихря в приосевой области вверх-вниз, которые при дальнейшем уменьшении глубины жидкости сменяются радиальными колебаниями положения приосевой линии тока, разделяющей области основного и вторичного течений.

В эксперименте наблюдается более ранняя потеря устойчивости, чем по результатам расчетов, что может быть объяснено наличием некоторого уровня биений при вращении диска, а также влиянием азимутальных возмущений, которые отсутствуют в осесимметричной математической модели. Отметим, что два из упомянутых механизмов колебаний наблюдаются также при численном моделировании, но не в автоколебательном режиме, как в эксперименте, а на стадии разгона жидкости после мгновенного ускорения вращения диска, например от  $Re = 3,3 \cdot 10^3$  до  $Re = 9,9 \cdot 10^3$  при  $H/R_T = 1,4, 0,7$ ;  $R_k/R_T = 0,36$ .

4. Все результаты при фиксированном отношении  $R_k/R_T = 0,36$  обобщены на фиг. 5, где приведена диаграмма в плоскости  $(H/R_T, Re)$ , разделяющая различные типы течения (кривые I, II, III и Ia, IIa, IIIa), которые соответствуют появлению и развитию основного течения, возникновению вторичного вихря, колебательным режимам.

Точки 1-3 соответствуют плоскому диску (кристаллу), точки 4-6 — выпуклому, 7-9 — вогнутому дискам. Точки 10, 11 соответствуют плоскому диску при наличии капиллярного поднятия жидкости на максимальную высоту  $h/R_T = 0,11$ . В последнем случае наличие подкристалльного столбика жидкости приводит к затягиванию развития течения и границы IIa и IIIa соответствуют такой же пространственной организации течения, что и границы II и III, но без капиллярного столбика жидкости. Кроме этого, как видно из фиг. 5, кривизна диска не оказывает существенного влияния на границу развития течения по числу  $Re$  и не искажает существенно линий тока.

Эта диаграмма впервые построена на основе экспериментальных данных и в диапазоне существования стационарных течений удовлетворительно согласуется с результатами численных расчетов, проведенных для случая плоского диска без учета капиллярного поднятия жидкости. Точки 12 соответствуют проведенной серии численных параметрических расчетов.

Слева от кривой I течение имеет двухъярусную структуру. Вблизи оси жидкость поднимается к диску, затем отбрасывается к боковой стенке тигля, опускается и вновь подтягивается вблизи оси в виде восходящей струи. При  $Re < Re_1$  в описанном течении участвует только часть жидкости, находящейся вблизи поверхности диска. При этом в эксперименте в придонной области наблюдается вторичное очень слабое движение жидкости в обратном по компонентам скорости  $u, v$  направлении. Однако с ростом  $Re$  основное течение занимает все больший объем и при  $Re = Re_1$  нижняя область с обратным течением исчезает.

В области от кривой I до кривой II структура течения остается одновихревой, но пространственная ориентация основного вихря изменяется (см. п. 3.1). С ростом  $Re$  растет интенсивность циркуляции жидкости. На границе II в подкристалльной области появляется приосевая особенность, которая с ростом числа  $Re$  развивается в грушеобразное вторичное течение, форма которого зависит от геометрического параметра  $H/R_T$  (см. п. 3.2).

На границе III в эксперименте течение приобретает колебательный характер. Слева от границы III течение стационарное и осесимметричное. Вид колебаний при  $Re > Re_{III}$  зависит от параметра  $H/R_T$ . Поиски аналогичной границы расчетным способом осуществлялись на основе метода конечных разностей до значительно больших, чем в эксперименте, значений числа Рейнольдса  $Re = 2,0 \cdot 10^4$  при максимальном заполнении сосуда (согласно диаграмме  $H/R_T = 1,4$ ). Эти расчеты были проведены на подробной неравномерной сетке с количеством узлов  $61 \times 81$ , сгущенных в областях наибольших градиентов искомых функций. Однако колебательные процессы, которые возникали за счет изменения начальных данных при переходе к большему числу Рейнольдса, со временем затухали и решение выходило на стационарный режим. Возможные причины этого явления рассмотрены выше в п. 3.3.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дорфман Л. А., Романенко Ю. Б. Течение вязкой жидкости в цилиндрическом сосуде с вращающейся крышкой. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 5, с. 63–69.
2. Бердников В. С., Борисов В. Л. Экспериментальное моделирование гидродинамики расплава при выращивании монокристаллов методом Чохральского. — В кн.: Теплообмен при кристаллизации и конденсации металлов. Новосибирск, 1981, с. 96–106.
3. Pao H.-P. Numerical solution of the Navier – Stokes equations for flows in the disk-cylinder system. — Phys. Fluids, 1972, v. 15, p. 4–11.
4. Bar-Yoseph P., Blech J. J., Solan A. Finite element solution of the Navier – Stokes equations in rotating flows. — Int. J. Numer. Meth. Eng., 1981, v. 17, № 8, p. 1123–1146.
5. Crochet M. J., Wonters P. J. Finite-element simulation of Czochralski bulk flow. — J. Crystal Growth, 1983, v. 65, № 1–3, p. 153–165.
6. Kobayashi N., Arizumi T. Computational studies on the convection caused by crystal rotation in a crucible. — J. Crystal Growth, 1980, v. 49, № 3, p. 419–425.
7. Shiroki K. Simulations of Czochralski growth on crystal rotation rate influence in fixed crucibles. — J. Crystal Growth., 1977, v. 40, № 1, p. 129.
8. Jones A. D. W. An experimental model of the flow in Czochralski growth. — J. Crystal Growth., 1983, v. 61, № 2, p. 235–244.
9. Полежаев В. И., Простомолотов А. И. Исследование процессов гидродинамики и теплообмена при выращивании кристаллов методом Чохральского. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 1, с. 55–65.
10. Простомолотов А. И., Простомологова И. И. Численное исследование течений вязкой вращающейся жидкости методом конечных элементов. — Ин-т пробл. мех. АН СССР. М., 1984, 61 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 3.05.84, № 2884–84 Деп.
11. Бердников В. С., Борисов В. Л., Панченко В. И. Экспериментальное моделирование гидродинамики и теплообмена при выращивании монокристаллов методом Чохральского. — В кн.: Теплофизические явления при кристаллизации металлов. Новосибирск, 1982, с. 77–92.
12. Автономов К. В., Простомолотов А. И., Пунтус А. А. Численное исследование нестационарных нелинейных процессов гидродинамики и теплообмена при выращивании кристаллов методом Чохральского. — Моск. авиац. ин-т. М., 1982, 32 с. Рукопись деп. в ВИНТИ 7.08.82, № 4583–82 Деп.
13. Бердников В. С., Простомолотов А. И. Исследование влияния вращения кристалла на гидродинамику расплава для задачи выращивания кристаллов методом Чохральского. — В сб.: Численные методы динамики вязкой жидкости. Новосибирск, 1983, с. 42–48.
14. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.

Москва

Поступила в редакцию  
15.XI.1984