**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1985**

УДК 532.5.013.4:536.25

ВИБРАЦИОННО-КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО СЛОЯ ЖИДКОСТИ С ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛА

ГЕРШУНИ Г. З., ЖУХОВИЦКИЙ Е. М., КОЛЕСНИКОВ А. К.

Конвективное движение неизотермической жидкости, находящейся в поле тяжести в полости, совершающей вибрации, вызывается двумя механизмами: обычным статическим и вибрационным. Этими же механизмами обусловлен и кризис механического равновесия в тех условиях, когда такое равновесие возможно. Обзор работ по этим вопросам содержится в [1]. Рассмотренные до сих пор задачи вибрационно-конвективной устойчивости относились к случаям, когда неизотермичность создавалась заданием температуры на границах области. В данной работе исследуется вибрационно-конвективная устойчивость равновесия жидкости, в которой неоднородность температуры вызвана внутренним тепловыделением.

Плоский бесконечный горизонтальный слой жидкости с однородно распределенными по объему внутренними источниками тепла (мощность тепловыделения Q) заключен между параллельными твердыми плоскостями $z=0$ и $z=h$ (начало координат выбрано на нижней плоскости; ось z направлена вертикально вверх). Слой жидкости совершает гармонические высокочастотные вибрации с угловой частотой Ω и амплитудой смещения b вдоль фиксированного направления $\mathbf{n}$, составляющего с горизонтальной осью x угол α.

Безразмерные уравнения для осредненных полей скорости $\mathbf{v}$, температуры T, конвективного давления p и вектора $\mathbf{w}$ (соленоидальной части векторного поля $T\mathbf{n}$) имеют вид

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\frac{1}{P}(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v}+R_v[(\mathbf{w}\nabla)\mathbf{w}-(\mathbf{w}\nabla T)\mathbf{n}]=-\nabla p+\Delta\mathbf{v}+R_qT\boldsymbol{\gamma}$$

$$P\frac{\partial T}{\partial t}+\mathbf{v}\nabla T=\Delta T+1 \qquad (1)$$

$$T\mathbf{n}=\mathbf{w}+\nabla\varphi,\quad \operatorname{div}\mathbf{v}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{w}=0$$

$$R_q=\frac{g\beta Qh^5}{\nu\chi^2},\quad R_v=\frac{(\beta b\Omega Qh^3)^2}{2\nu\chi^3},\quad P=\frac{\nu}{\chi}$$

Здесь R_q — число Рэлея, характеризующее конвекцию, обусловленную внутренним тепловыделением, в статическом поле тяжести; R_v — его вибрационный аналог; P — число Прандтля; остальные обозначения общепринятые. При записи системы уравнений выбраны следующие единицы: h — расстояние, h^2/ν — время, χ/h — скорость, Qh^2/χ — температура, $\rho\nu\chi/h^2$ — давление.

На границах слоя выполняются условия прилипания и обращения в нуль нормальной компоненты вектора $\mathbf{w}$, а замкнутость пульсационной компоненты потока дает условия для его горизонтальных компонент

$$z=0,\ z=1:\ \mathbf{v}=0,\ w_z=0 \tag{2}$$

$$\int_0^1 w_x\,dz=\int_0^1 w_y\,dz=0 \tag{3}$$

Далее будут рассмотрены два варианта граничных условий для температуры: либо обе границы поддерживаются при одинаковых постоянных температурах, принимаемых за начало отсчета, либо верхняя граница поддерживается при постоянной температуре, а нижняя граница теплоизолирована

$$z=0,\ z=1:\ T=0 \tag{4}$$

$$z=0:\ \frac{\partial T}{\partial z}=0;\quad z=1:\quad T=0 \tag{5}$$

Необходимые условия механического равновесия вытекают из системы (1) и имеют вид

$$R_q(\nabla T_0\times\boldsymbol{\gamma})+R_v[\nabla(\mathbf{w}_0\mathbf{n})\times\nabla T_0]=0,\ \Delta T_0=-1$$

$$\operatorname{div}\mathbf{w}_0=0,\ \operatorname{rot}\mathbf{w}_0=\nabla T_0\times\mathbf{n}$$

Здесь T_0, $\mathbf{w}_0$ — равновесные поля.

При указанных выше условиях возможно механическое равновесие; равновесные поля для двух названных вариантов условий подогрева таковы

$$\begin{gathered} T_0={}^1/_2 z(1-z),\ \ w_{0y}=w_{0z}=0\\ w_{0x}\equiv w_0={}^1/_{12}(-1+6z-6z^2)\cos\alpha \end{gathered} \tag{6}$$

$$\begin{gathered} T_0={}^1/_2(1-z^2),\ w_{0y}=w_{0z}=0\\ w_{0x}\equiv w_0={}^1/_6(1-3z^2)\cos\alpha \end{gathered} \tag{7}$$

Для исследования устойчивости равновесий (6) и (7) рассмотрим малые возмущения. По аналогии с задачей устойчивости в слое с разными температурами на границах [2] можно думать, что наиболее опасными являются плоские возмущения $\mathbf{v}(v_x,\ 0,\ v_z)$, $\mathbf{w}(w_x,\ 0,\ w_z)$, T и p, не зависящие от координаты y. Линеаризуя систему (1) около состояния механического равновесия (6) или (7), вводя нормальные возмущения вида $\exp(-\lambda t+ikx)$ и исключая давление и горизонтальные компоненты v_x и w_x, получим спектральную задачу для амплитуд v, w, θ возмущений v_z, w_z, T

$$\begin{gathered} -\lambda\Delta v+R_vT_0'(ik\cos\alpha w'+k^2\sin\alpha w-k^2\cos^2\alpha\theta)=\Delta^2 v-k^2R_q\theta\\ -\lambda P\theta+T_0'v=\Delta\theta \end{gathered} \tag{8}$$

$$ik\cos\alpha\theta'+k^2\sin\alpha\theta=-\Delta w\quad (\Delta=d^2/dz^2-k^2)$$

$$z=0,\ z=1:\ v=v'=0,\ w=0$$

$$z=0,\ z=1:\ \theta=0 \tag{9}$$

$$z=0:\ \theta'=0;\ z=1:\ \theta=0 \tag{10}$$

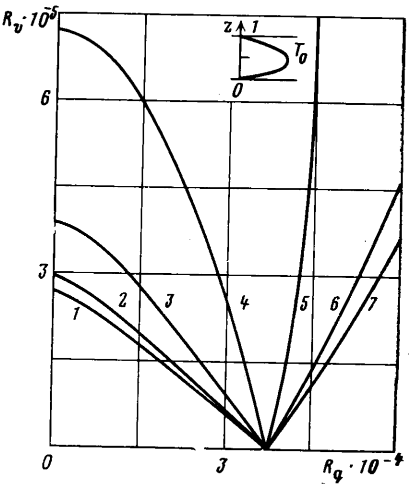
Для каждого из двух вариантов система (8) содержит свой невозмущенный профиль температуры T_0 — соответственно (6) либо (7). Спектральные задачи (8), (9) или (8), (10) определяют декремент λ как функцию остальных параметров: R_q, R_v, P, α и k. Граница устойчивости равновесия находится из условия обращения в нуль вещественной части декремента λ_r; мнимая часть λ_i при этом дает частоту нейтральных колебаний.

Спектральные задачи (8), (9) и (8), (10) интегрировались численно методом Рунге — Кутта — Мерсона. В ходе решения находились характеристические декременты λ, а также границы устойчивости и другие параметры критических возмущений.

Рассмотрим сначала случай слоя с обеими изотермическими границами (задача (8), (9)). Предельный случай $R_v=0$ соответствует отсутствию вибрации. При этом получается задача о конвективном слое с однородным тепловыделением в статическом поле тяжести. Неустойчивость в этом случае имеет монотонный характер ($\lambda_i=0$). Минимальное по волновому числу k критическое число Рэлея $R_{qm}=37{,}33\cdot 10^3$, а минимальное волновое число $k_m=4{,}00$, что хорошо согласуется с результатами [3]. Другой предельный случай соответствует отсутствию статической силы тяжести $R_q=0$ (полная невесомость). Порог конвекции при этом связан с вибрационным механизмом и определяется критическим значением числа R_v, которое зависит от направления оси вибрации. Неустойчивость в этом предельном случае также монотонна; критические параметры в зависимости от угла наклона α приведены ниже:

α°	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$R_{vm}\cdot 10^{-3}$	269,3	278,3	311,7	388,1	558,4	993,3	$2{,}458\cdot 10^3$	$10{,}51\cdot 10^3$	$153{,}1\cdot 10^3$	∞
k_m	4,35	4,34	4,24	4,00	3,59	3,00	2,25	1,48	0,72	0

Наименьшая устойчивость соответствует продольным вибрациям ($\alpha=0^\circ$); с увеличением угла α критическое число R_{vm} монотонно возрастает вплоть до абсолютной стабилизации при поперечной вибрации ($\alpha=90^\circ$). Ситуация, таким образом, вполне аналогична имеющей место в случае вибрационно-конвективной неустойчивости в невесомости в слое с границами разной температуры [2].



Фиг. 1

При произвольных значениях R_q и R_v неустойчивость обусловлена совместным действием статического и вибрационного механизмов конвекции. Границы устойчивости равновесия на плоскости (R_q, R_v) по отношению к наиболее опасным по волновому числу k возмущениям представлены на фиг. 1 для разных направлений оси вибрации (кривые *1*—*7* соответствуют углам $\alpha=0$, 15, 30, 45, 60, 75, 90°; область устойчивости примыкает к началу координат). Из симметрии задачи ясно, что кривые устойчивости симметричны относительно оси R_v.

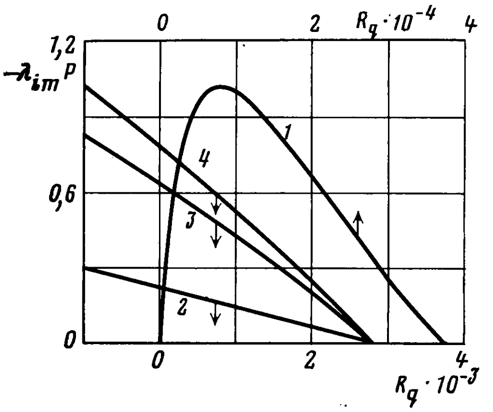
В отличие от случая слоя с разными температурами границ неустойчивость (за исключением продольного и поперечного направлений оси вибрации) имеет осциллирующий характер ($\lambda_i\neq 0$). Таким образом, при произвольных R_q и R_v на границе устойчивости возникают возмущения в виде валов, дрейфующих с фазовой скоростью $c=\lambda_i/k$. График зависимости λ_i от R_q вдоль границы устойчивости, соответствующей наклону оси вибрации $\alpha=15^\circ$, представлен на фиг. 2, кривая *1*. Дрейф конвективных валов происходит в направлении, противоположном оси x.

В случае колебательных возмущений критическое значение параметра устойчивости (R_q и R_v) зависит, вообще говоря, от числа Прандтля P. Кривые на фиг. 1, а также на фиг. 2 (кривая *1*) относятся к значению $P=1$. Расчеты, проведенные в интервале $0{,}1 \leqslant P \leqslant 10$, показывают, что границы устойчивости и критические волновые числа практически не зависят от P.

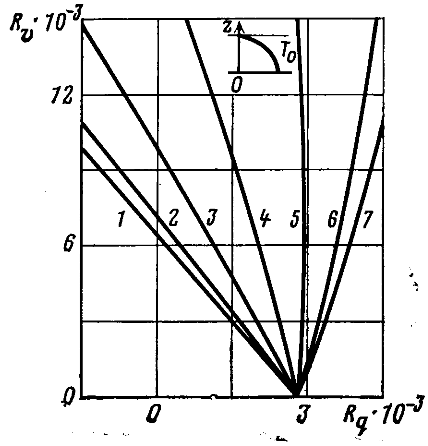
Перейдем теперь к рассмотрению слоя с изотермической и теплоизолированной границами (задача (8), (10)). В пределе $R_v=0$ (неустойчивость в статическом поле тяжести) имеем $R_{qm}=2{,}772 \cdot 10^3$; $k_m=2{,}63$ в соответствии с [4]. При полной невесомости ($R_q=0$) в отличие от случая обеих изотермических границ неустойчивость имеет колебательный характер при всех α, кроме $\alpha=0$ и 90°. Характеристики неустойчивости приведены ниже:

$\alpha°$	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90
$R_{vm} \cdot 10^{-3}$	6,394	6,675	7,651	9,783	14,43	25,98	63,22	259,5	3607	∞
k_m	2,63	2,60	2,52	2,37	2,11	1,74	1,31	0,87	0,44	0
λ_{im}	0	−0,41	−0,86	−1,37	−1,95	−2,47	−2,81	−3,00	−3,05	0

Кривые устойчивости на плоскости (R_q, R_v) для разных α представлены на фиг. 3 (кривые *1*—*7* соответствуют $\alpha=0$, 15, 30, 45, 60, 75, 90°). Как и в случае задачи (8), (9), практически отсутствует зависимость гра-



Фиг. 2



Фиг. 3

ницы устойчивости от числа Прандтля, однако диаграмма устойчивости не обладает симметрией относительно оси R_v. Левая часть диаграммы ($R_q<0$) соответствует отрицательной мощности источников тепла, поэтому профиль температуры (7) отвечает нагреву сверху, приводящему к стабилизации вибрационно-конвективного механизма. Физически понятно, что левая часть диаграммы описывает ситуацию, при которой в слое происходит положительное тепловыделение, однако верхняя граница является теплоизолированной, а нижняя — изотермической.

На фиг. 2 приведена зависимость частоты нейтральных колебаний вдоль границы устойчивости $\alpha=15°$ (кривые *2*, *3*, *4* отвечают значениям числа Прандтля $P=0{,}1$; 1; 10). В отличие от критических чисел Рэлея и волновых чисел частота нейтральных колебаний заметно зависит от P.

В заключение заметим, что в обоих рассмотренных вариантах условий нагрева в случае поперечного направления оси вибрации ($\alpha=90°$) роль вибрации сводится к стабилизации обычного рэлеевского механизма неустойчивости. При больших значениях R_v имеет место следующая асимптотическая зависимость: $R_{qm} \sim \sqrt{R_v}$. Если для описания вибрационного воздействия ввести не зависящий от условий нагрева безразмерный вибрационный параметр $\varkappa = b\Omega\sqrt{\nu\chi}/gh^2 = \sqrt{2R_v}/R_q$, то указанная выше асимптотика означает, что по достижении параметром $\varkappa$ некоторого предельного значения $\varkappa_*$ критическое число $R_{qm} \to \infty$, т. е. наступает абсолютная стабилизация. Согласно расчетам, в задачах (8), (9) и (8), (10) $\varkappa_* = 0{,}01\,779$ и $0{,}04\,874$ соответственно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* Вибрационная тепловая конвекция в невесомости.— В кн.: Гидромеханика и процессы переноса в невесомости. Свердловск, 1983, с. 86–105.
2. *Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М.* О конвективной неустойчивости жидкости в вибрационном поле в невесомости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 4, с. 12–19.
3. *Sparrow E. M., Goldstein K. J., Jonsson V. K.* Thermal instability in a horizontal fluid layer: effect of boundary conditions and non-linear temperature profile.— J. Fluid Mech., 1964, v. 18, № 4, p. 513–528.
4. *Roberts P. H.* Convection in horizontal layers with internal heat generation. Theory.— J. Fluid Mech., 1967, v. 30, № 1, p. 33–49.

Пермь

Поступила в редакцию
28.XI.1984