МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1985

УДК 532.516

О БИФУРКАЦИИ РАЗВИТОГО ТЕЧЕНИЯ ПО ПРЯМОУГОЛЬНЫМ КАНАЛАМ, ВРАЩАЮЩИМСЯ ВОКРУГ ПОПЕРЕЧНОЙ ОСИ

СМИРНОВ Е. М.

В [1, 2] изучена линейная задача устойчивости течения Пуазейля между двумя бесконечными пластинами, вращающимися вокруг оси, параллельной пластинам и нормальной к направлению течения. Установлено, что поток наименее устойчив к возмущениям в виде стоячих волн, известных как вихри Тейлора. Опытные данные [1, 3] и результаты [4] численного интегрирования уравнений Навье – Стокса для каналов, сечения которых сильно вытянуты вдоль оси вращения, хорошо согласуются с выводами линейной теории. В более интересных для практики случаях каналов с отношением сторон сечения порядка единицы первичное течение приобретает существенно пространственный характер и эволюционирует с изменением определяющих критериев – чисел Рейнольдса и Россби. Это, очевидно, сильно затрудняет использование методов линейной теории. Экспериментально вопрос о влиянии отношения сторон сечения на устойчивость первичного режима течения изучался в [3]. Ниже излагаются результаты исследования данной проблемы, выполненного на основе численного метода интегрирования нелинейных уравнений Навье – Стокса. Кроме того, приводится асимптотическая оценка предела устойчивости первичного режима, основанная на локальном условии невязкой неустойчивости вращающихся течений.

1. Рассмотрим установившееся движение вязкой несжимаемой жидкости по каналу прямоугольного поперечного сечения $2h\times 2l$, который вращается с постоянной угловой скоростью ω относительно оси, перпендикулярной к стенкам канала шириной $2l$ (фиг. 1). Канал полагается достаточно длинным, а движение развитым, с неизменными распределениями составляющих скорости во всех нормальных сечениях.

Введем жестко связанную с каналом декартову систему координат xyz, начало которой расположим на центральной линии. Ось z направим по потоку, ось y – параллельно оси вращения. Примем полуширину канала l и среднерасходную скорость W_m за масштабы и запишем уравнения задачи в безразмерном виде

$$\frac{\partial(u^2)}{\partial x}+\frac{\partial(uv)}{\partial y}=-\frac{\partial p^*}{\partial x}+\frac{2}{\mathrm{Re}}\Delta u-Kw \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial(uv)}{\partial x}+\frac{\partial(v^2)}{\partial y}=-\frac{\partial p^*}{\partial y}+\frac{2}{\mathrm{Re}}\Delta v$$

$$\frac{\partial(uw)}{\partial x}+\frac{\partial(vw)}{\partial y}=\frac{\lambda}{4}+\frac{2}{\mathrm{Re}}\Delta w+Ku$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

$$\lambda=-4\frac{\partial p^*}{\partial z}=-\frac{4}{\rho W_m^2}\frac{\partial}{\partial z}\left(p+\frac{\rho\omega^2r^2}{2}+D\right)=\mathrm{const}$$

Здесь $\Delta=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$; u, v, w – безразмерные проекции вектора скорости соответственно на осях x, y, z; p^* – безразмерная величина модифицированного давления; r — кратчайшее расстояние до оси вращения; D — потенциал массовых сил; $\mathrm{Re}=2lW_m/\nu$ — число Рейнольдса; $K=2l\omega/W_m$ — параметр вращения; λ — коэффициент гидравлического сопротивления.

Решение системы (1.1) должно удовлетворять условиям прилипания

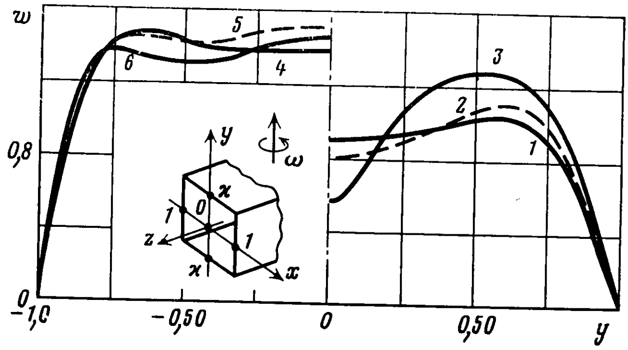
$$u=v=w=0, \quad x=\pm 1 \tag{1.2}$$

$$u=v=w=0, \quad y=\pm\varkappa \tag{1.3}$$

где $\varkappa=h/l$, и интегральному соотношению

$$\int_{-1}^{1}\int_{-\varkappa}^{\varkappa} w(x, y)\,dx\,dy=4\varkappa \tag{1.4}$$

Проводя замену $y\to -y$, $v\to -v$, убедимся, что в задаче возможны решения, симметричные относительно плоскости $y=0$. Только такие реше-



Фиг. 1

ния и будем рассматривать в дальнейшем. Граничные условия (1.3) заменим на следующие:

$$v=0, \quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial y}=0, \quad y=0 \tag{1.5}$$

$$u=v=w=0, \quad y=\varkappa$$

2. Численные решения задачи (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) находились методом установления по неявной разностной схеме, сходной с предложенной в [5]. Использовались физические переменные u, v, w, p^*. В уравнение неразрывности вводился член, выражающий искусственную сжимаемость. Исходной нелинейной задаче ставилась в соответствие линеаризованная задача нахождения невязок на каждом временно́м шаге. Для вычисления невязок применялся метод расщепления по координатам. Дифференциальные операторы аппроксимировались в соответствии с методом маркеров и ячеек на сетке с равномерными шагами $h_x=2/N$, $h_y=\varkappa/M$. Аппроксимация установившегося решения имела второй порядок точности по обеим координатам. Выполнение условия (1.4) обеспечивалось разделением уравнения для невязки поля w на два линейно независимых уравнения и надлежащей суперпозицией их решений.

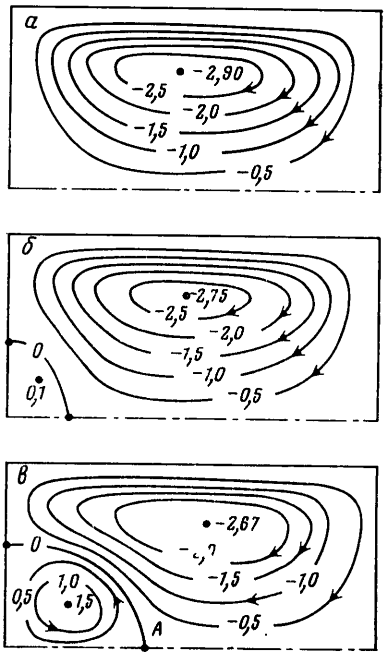
Для диапазона $0\leqslant K\leqslant 0{,}25$ использовалась сетка $N\times M=20\times 20$, при расчетах с бо́льшими значениями K — сетка $N\times M=20\times 40$.

3. Первичный режим развитого течения по вращающимся каналам прямоугольного сечения изучался в [6] экспериментально, в [7, 8] — численными методами. В ходе настоящего исследования были воспроизведены численные решения, соответствующие тем наборам значений Re и K, для которых в [7, 8] приводятся профили составляющих скорости

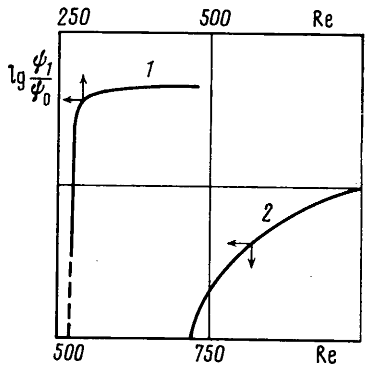
в каналах с $\varkappa=1$ и 2; получено практически полное совпадение результатов.

Конкретный вид первичного режима течения зависит от значений Re и K. Можно, однако, выделить следующие наиболее характерные черты перестройки потока, обусловленной вращением. В канале развивается вторичное (поперечное) течение, первопричина возникновения которого заключается в неоднородности распределения силы Кориолиса по направлениям, параллельным оси вращения. Вторичное течение формируется в виде пары вихрей, симметричных относительно плоскости $y=0$. Обратное действие поперечного движения на течение в основном направлении при малых K проявляется в смещении максимума скорости к набегающей на жидкость стенке (стороне с повышенным давлением), а при больших K — в выделении центрального ядра потока, в котором распределение составляющих скорости w, u близко к однородному. На стенках, перпендикулярных оси вращения, формируются относительно тонкие сдвиговые слои, так называемые слои Экмана.

В результате экспериментов [3, 6] установлено, что при переходе на плоскости определяющих критериев Re, K



Фиг. 2



Фиг. 3

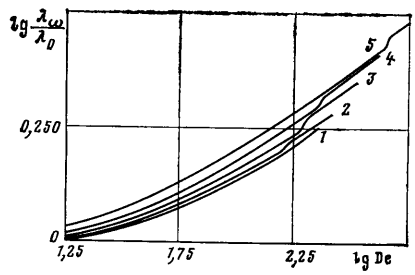
через некоторую границу картина движения во всех использованных каналах ($\varkappa=1$; 2; 4; 7,2) резко меняется. При этом наибольшим изменениям подвержено поле скорости в окрестности набегающей стенки. Численные решения, полученные в настоящей работе, ведут себя подобным же образом.

На фиг. 2, *а—в* для канала с геометрическим параметром $\varkappa=1$ приведены картины проекций линий тока на нормальное сечение, полученные при $K=0{,}5$ и трех близких значениях Re=250, 275 и 285. Цифры у кривых соответствуют значениям величины 50ψ, где ψ — безразмерная функция тока поперечного движения

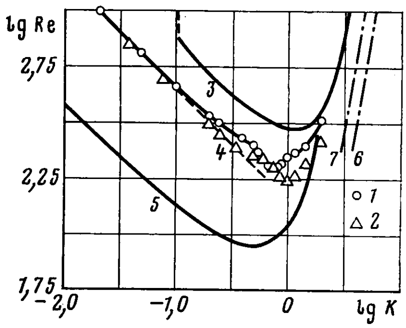
$$\psi = \int\limits_0^y u\,dy$$

Видно, что рост Re приводит к развитию в области $x<0$ пары вихрей (учитывается симметрия течения) с циркуляцией, противоположной основному вторичному движению. Переход к новой форме движения вызывается конвективной неустойчивостью и может трактоваться как нормальная бифуркация первичного режима течения во вторичный режим с одной парой тейлоровских вихрей.

На фиг. 1 показано распределение продольной компоненты скорости в двух плоскостях x=const при K=0,5; кривым *1—3* соответствуют Re=250, 275, 285, x=−0,85; кривым *4—6* – Re=250, 285, 475, x=−0,15. В непосредственной близости к набегающей стенке переход к течению с тейлоровскими вихрями сопровождается развитием глубоких провалов в профилях $w(y)$. Очевидно, это обусловлено выносом замедленной жидкости от стенки внутрь потока. В центральной части изменение профилей $w(y)$ качественно иное. Здесь наблюдается повышение скорости в средней части, правда, относительно слабое. Причина этого повышения заключается в уменьшении в окрестности точки ветвления A (фиг. 2, *в*) тормозящего эффекта, создаваемого в центре потока осевой составляющей



Фиг. 4



Фиг. 5

силы Кориолиса (величиной Ku). Результаты экспериментов [3, 6], в которых использовалась техника визуализации водородными пузырьками, подтверждают данный характер перестройки поля w, сопровождающей развитие тейлоровских вихрей.

На фиг. 3 для K=0,5, 0,05 (кривые *1*, *2*) показаны зависимости отношения ψ_1/ψ_0 от числа Рейнольдса. Здесь $\psi_0=\max|\psi|$ для вихря основного вторичного течения, $\psi_1=\max|\psi|$ для тейлоровского вихря. Видно, что при малых K развитие тейлоровских вихрей с ростом Re идет медленнее.

Практический интерес представляет выяснение вопроса о реакции такой интегральной величины, как гидравлическое сопротивление канала, на переход к новой форме движения. На фиг. 4 приведены зависимости отношения λ_ω/λ_0 от безразмерных параметров течения в канале с квадратным сечением. Здесь λ_ω, λ_0 — коэффициенты сопротивления вращающегося и неподвижного каналов, взятые при одинаковом значении Re. Кривым *1—5* соответствуют значения K=0,05; 0,2; 0,5; 1,0; 2,0. Комплекс $\mathrm{De}=\mathrm{Re}\sqrt{K}$ построен по аналогии с известным числом Дина [9], используемым в исследованиях движений по криволинейным каналам.

В первичном режиме расслоение кривых $\lambda_\omega/\lambda_0=f(\mathrm{De})$ для разных K становится существенным лишь при $K\geqslant0{,}2$. На зависимостях *2—5* отчетливо видны изломы, соответствующие переходу к течению с одной парой тейлоровских вихрей. Однако повышение величины λ_ω вследствие бифуркации весьма незначительно, кроме того, сохраняется характер зависимости $f(\mathrm{De})$. Этим, вероятно, и обусловлен тот факт, что в работах, посвященных измерениям потерь давления во вращающихся прямолинейном [10] и криволинейных [11] каналах, переход к новой форме движения не отмечен. В целом же представленные на фиг. 4 зависимости хорошо согласуются с опытными данными [10].

В результате систематических расчетов были определены границы на плоскости определяющих критериев Re, K, отмечающие начало образования тейлоровских вихрей (фиг. 5). Расчетные точки *1*, *2* соответствуют значениям $\varkappa$=1; 2. Они определялись по появлению в области $x<0$, $y>0$ положительных значений $\psi>10^{-4}$.

Первичный режим в каналах с $\varkappa=2$ переходит, как и в случае $\varkappa=1$, в течение с одной парой вихрей Тейлора. Отметим, однако, что если для канала с квадратным сечением все полученные численные решения соответствовали либо первичному режиму, либо течению с одной парой тейлоровских вихрей, то в случае $\varkappa=2$ решения при $K\geqslant1{,}5$ и $\mathrm{Re}\geqslant400$ указывали на развитие трех пар вихрей Тейлора (в полном сечении канала). Определение границ перехода от течения с одной парой тейлоровских вихрей к режиму с большим их числом может составить предмет отдельного исследования.

Кривая *3* на фиг. 5 ограничивает снизу область значений Re, K, при которых в экспериментах [3, 6] с каналом квадратного сечения первичный режим течения не мог быть реализован, а наблюдались либо стационарный режим с парой тейлоровских вихрей, либо нестационарные (при $\mathrm{Re}\geqslant650$) режимы движения. В качественном отношении расчетная и экспериментальная границы устойчивости первичного режима полностью согласуются между собой. Причина количественного расхождения заключается, по-видимому, в недостаточности длины каналов в опытах [3, 6] для полного развития потока. В пользу данного объяснения свидетельствует сближение опытных и расчетных результатов с ростом K. В [12] установлено, что увеличение интенсивности вращения сокращает длину участка развития поля скорости.

Пунктирная линия *4* соответствует постоянному значению комплекса $\mathrm{De}=147$. Построенная по данным [2] кривая *5* приведена для сравнения. Она отмечает предел устойчивости течения в плоскопараллельном канале ($\varkappa\to\infty$), определенный по линейной теории устойчивости.

4. К сожалению, не удалось продолжить границы устойчивости первичного режима течения в область $K>2$. В этой области увеличение K влечет за собой повышение критических значений числа Рейнольдса. Имеет смысл в связи с этим рассмотреть асимптотику предела устойчивости первичного режима, основываясь на локальном условии невязкой (рэлеевской) неустойчивости в плоскопараллельных вращающихся течениях, которое использует проверку знака скалярного произведения векторов угловой скорости и абсолютной завихренности. При $\omega\neq0$ нейтральное локальное состояние соответствует нулевому значению модуля абсолютной завихренности ζ.

Рассмотрим случай $K\gg1$, т. е. течение при малых значениях числа Россби $\mathrm{Ro}=K^{-1}$. Для достаточно больших значений Re это означает, что число Экмана $E=\nu/\omega h^2\ll1$ и в потоке сформировалось однородное ядро, отделенное от стенок слоями Экмана и Стюартсона [6, 13]. Неустойчивость по Рэлею может проявиться лишь в слое Стюартсона, расположенном у набегащей стенки. Распределение $w(y)$ в этом слое близко к однородному, а две другие компоненты скорости пренебрежимо малы. Увеличение ω приводит к монотонному смещению плоскости $\zeta=0$ в направлении основной компоненты кориолисовой силы. При совмещении плоскости нейтральной устойчивости с набегающей стенкой область дестабилизации исчезает и весь поток оказывается подверженным стабилизирующему действию вращения.

Распределение скорости в слое у набегающей стенки при $E\to0$ определяется формулой [13]

$$w=1-\exp\left[-(1+x)/\varkappa E^{1/4}\right] \tag{4.1}$$

Составим выражение для величины абсолютной завихренности

$$\zeta_y=2\omega-\frac{W_m}{l}\frac{dw}{dx} \tag{4.2}$$

и положим $\zeta_y=0$ при $x=-1$. Тогда из (4.1), (4.2) найдем, что области с дестабилизирующим воздействием вращения отсутствуют в потоке, если $\mathrm{Ro}\leqslant\varkappa E^{1/4}$ или, что то же самое, при $\mathrm{Re}\leqslant4\varkappa^2K^3$. Пределы невязкой неустойчивости, определенные по этой формуле, показаны для $\varkappa=1$ и 2 линиями *6*, *7* на фиг. 5.

Отметим в заключение, что в плоскопараллельном канале стабилизирующее воздействие вращения охватывает весь поток, если $K>3$ [14]. Независимость данного условия от числа Рейнольдса проистекает из того факта, что в идеализированном случае сколь угодно больших значений $\varkappa$ первичный режим движения не эволюционирует ни с ростом Re, ни с увеличением K, а сохраняется в виде течения Пуазейля с параболическим профилем $w(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hart J. E.* Instability and secondary motion in a rotating channel flow.— J. Fluid Mech., 1971, v. 45, № 2, p. 341–351.
2. *Lezius D. K.* Finite — difference solutions of Taylor instabilities in viscous plane flow.— Comput. and Fluids, 1975, v. 3, № 1, p. 103–110.
3. *Кузьминский А. В., Смирнов Е. М., Юркин С. В.* Продольно ориентированные ячеистые структуры типа вихрей Тэйлора — Гертлера на стороне повышенного давления вращающихся каналов.— ПМТФ, 1983, № 6, с. 129–134.
4. *Speziale C. G., Thangam S.* Numerical study of secondary flows and loll-cell instabilities in rotating channel flow.— J. Fluid Mech., 1983, v. 130, p. 377–395.
5. *Колешко С. Б.* Разностная схема для решения уравнений стационарных течений вязкой жидкости.— В кн.: Численные методы механики сплошной среды. Новосибирск, 1979, т. 10, № 3, с. 100–104.
6. *Смирнов Е. М., Юркин С. В.* О течении жидкости по вращающемуся каналу квадратного поперечного сечения.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 6, с. 24–30.
7. *Schilling R., Marcinowski H.* Untersuchung des Druckverlustes und der Warmeüberganges in rotierenden Kanälen mit rechteckigem Querschnitt.— In: Recent Developments in Theor. and Experiment Fluid Mech. Berlin: Springer, 1979, p. 529–545.
8. *Speziale C. G.* Numerical study of viscous flow in rotating rectangular ducts.— J. Fluid Mech., 1982, v. 122, p. 251–271.
9. *Щукин В. К.* Теплообмен и гидродинамика внутренних потоков в полях массовых сил. М.: Машиностроение, 1980. 240 с.
10. *Döbner E.* Über den Strömungswiderstand in einem rotierenden Kanal: Dissertation. Darmstadt: Technische Hochschule Darmstadt. 1959, 62 S.
11. *Piesche M., Felsch K.-O.* Experimental investigation of pressure loss in rotating curved rectangular channels.— Arch. Mech., Warszawa, 1980, v. 32, № 5, p. 747–756.
12. *Кузьминский А. В., Смирнов Е. М., Юркин С. В.* Экспериментальное исследование развивающегося течения в канале квадратного сечения, вращающемся вокруг поперечной оси.— Инж.-физ. журн., 1983, т. 45, № 4, с. 662–663.
13. *Смирнов Е. М.* Асимптотические формулы сопротивления быстровращающихся радиальных каналов прямоугольного поперечного сечения.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1978, № 6, с. 42–49.
14. *Lezius D. K., Johnston J. P.* Roll-cell instabilities in rotating laminar and turbulent channel flows.— J. Fluid Mech., 1976, v. 77, № 1, p. 153–175.

Ленинград

Поступила в редакцию
17.XII.1984