

Полученный результат ($Q/Q_0 > 1$ при $\sigma < \sigma_0$) аналогичен известному эффекту увеличения расхода жидкости, истекающей через отверстие при наличии направляющих лопаток [3].

ЛИТЕРАТУРА

1. Бучин В. А. Решение задачи об обтекании проницаемой пластинки с отрывом струй.— Докл. АН СССР, 1983, т. 269, № 6, с. 1331—1335.
2. Payne P. R. The theory of fabric porosity as applied to parachutes in incompressible flow.— Aeron. Quart., 1978, v. 29, № 3, p. 175—206.
3. Идельчик И. Е. Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1975. 559 с.

Москва

Поступила в редакцию
2.VIII.1984

УДК 532.527

О ДВИЖЕНИИ ДВУХ ВИХРЕВЫХ КОЛЕЦ

БОЯРИНЦЕВ В. И., ЛЕВЧЕНКО Е. С., САВИН А. С.

Известно [1], что два соосных вихревых кольца, которые движутся в одном направлении, поочередно проходят друг через друга. В случае тонких вихревых колец это явление количественно впервые было рассмотрено в [2]. Допущение о тонкости вихревых колец означает, что при рассмотрении их взаимодействия они считаются кольцевыми вихревыми нитями. В настоящей работе на основании подхода, предложенного в [2], установлены некоторые новые свойства системы двух соосных вихревых колец одинаковой интенсивности.

Пусть два тонких соосных вихревых кольца одинаковой интенсивности Γ движутся вдоль оси z . Положения центров колец и их радиусы обозначим соответственно z_i , ρ_i ($i=1, 2$). Вихревые кольца обладают скоростью самодвижения [3]

$$V_i = \frac{\Gamma}{4\pi\rho_i} \ln \frac{\rho_i}{a_i} \quad (1)$$

где a_i — радиус поперечного сечения вихревой трубки i -го кольца. С учетом постоянства объема вихревого кольца [3] $W_i = 2\pi^2 a_i^2 \rho_i$ (1) запишем в виде

$$V_i = \frac{3\Gamma}{8\pi\rho_i} \ln \frac{\rho_i}{B_i}, \quad B_i = \left(\frac{W_i}{2\pi^2} \right)^{1/2} = \text{const} \quad (2)$$

Вихревые кольца взаимодействуют через посредство индуцируемых ими полей скорости. Радиальная компонента скорости, индуцируемой одним кольцом, изменяет радиус другого кольца и, следовательно, в соответствии с (2) — его скорость, z -компонента дает непосредственный вклад в скорость другого кольца. В соответствии с этим систему уравнений движения колец запишем в виде

$$\dot{z}_1 = V_1 + \Gamma F(\rho_1, z_1 - z_2, \rho_2) \quad (3)$$

$$\dot{z}_2 = V_2 + \Gamma F(\rho_2, z_2 - z_1, \rho_1) \quad (4)$$

$$\dot{\rho}_1 = \Gamma \Phi(\rho_1, z_1 - z_2, \rho_2) \quad (5)$$

$$\dot{\rho}_2 = \Gamma \Phi(\rho_2, z_2 - z_1, \rho_1) \quad (6)$$

$$F(\rho, z, R) = \frac{1}{2\pi\sqrt{(\rho+R)^2+z^2}} \left[\frac{R^2-\rho^2-z^2}{(\rho-R)^2+z^2} E(x) + K(x) \right], \quad x^2 = \frac{4\rho R}{(\rho+R)^2+z^2}$$

$$\Phi(\rho, z, R) = \frac{z}{2\pi\rho\sqrt{(\rho+R)^2+z^2}} \left[\frac{\rho^2+R^2+z^2}{(\rho-R)^2+z^2} E(x) - K(x) \right]$$

Здесь K , E — полные эллиптические интегралы, выражения для F , Φ взяты из [4]. Точка над величиной означает ее дифференцирование по времени.

С учетом постоянства Γ [3] из (5), (6) следует интеграл движения [2]

$$\rho_1^2 + \rho_2^2 = C \quad (7)$$

Вычтя (3) из (4) с учетом (7) и положив $B_1=B_2=B$, $z_2-z_1=H$, $\rho_1=R$, получим

$$\dot{H}=\Gamma\theta(R, H) \quad (8)$$

$$R=\Gamma\psi(R, H) \quad (9)$$

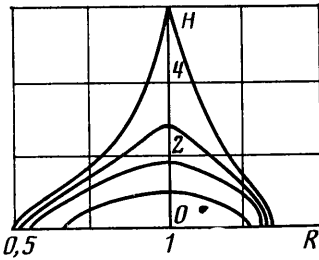
$$\theta(R, H)=\frac{3}{8\pi}\left(\frac{1}{A}\ln\frac{A}{B}-\frac{1}{R}\ln\frac{R}{B}\right)+F(A, H, R)-F(R, H, A)$$

$$\psi(R, H)=-\Phi(R, H, A), \quad A=\sqrt{C-R^2}$$

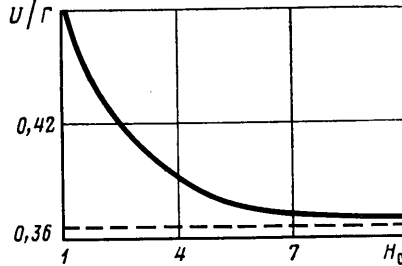
Разделив (8) на (9), получим

$$\frac{dH}{dR}=\frac{\theta(R, H)}{\psi(R, H)} \quad (10)$$

Легко видеть, что фазовые траектории, определяемые (10), являются симметричными относительно оси R . Пусть в начальный момент времени кольца отстоят друг от друга на расстоянии H_0 и имеют одинаковые радиусы $R_0=1$ и одинаковые



Фиг. 1



Фиг. 2

радиусы поперечных сечений вихревых трубок $a_0=10^{-2}$. На фиг. 1 приведен фазовый портрет такой системы, полученный с помощью ЭВМ при $H>0$. Замкнутость фазовых траекторий означает, что величины R и H меняются периодически во времени [5]. При изменении \dot{H} от $-H_0$ до H_0 величина R изменяется в интервале $[R_1(H_0), R_2(H_0)]$. Точка, изображающая состояние системы, движется по фазовой траектории против часовой стрелки. Время T однократного прохождения фазовой траектории, т. е. период изменения величины R и H , находим из (9)

$$T=\frac{2}{\Gamma}\int_{R_2(H_0)}^{R_1(H_0)}\frac{dR}{\psi(R, H(R))} \quad (11)$$

Скорость движения системы вихрей U определим как среднюю за период T скорость любого из вихрей

$$U=\frac{1}{T}\int_0^T\dot{z}_1(t)dt=\frac{2}{T}\int_{R_2(H_0)}^{R_1(H_0)}\frac{\dot{z}_1(R)}{R}dR \quad (12)$$

Из (11), (12) следует, что путь $S=UT$, проходимый системой вихрей за период, не зависит от Γ и полностью определяется геометрией задачи. Легко видеть, что скорость U пропорциональна Γ . На фиг. 2 приведен график зависимости величины $\Gamma^{-1}U$ от H_0 , пунктиром обозначена величина $\Gamma^{-1}V$, где V — скорость движения изолированного кольца интенсивности Γ при $R=1$, $a=10^{-2}$. Видно, что при любом H , $U>V$, причем U возрастает с уменьшением H_0 .

Авторы искренне благодарны А. А. Александрову за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика, М.—Л.: Гостехиздат, 1947. 928 с.
2. Hicks W. M. On the mutual threading of vortex rings.—Proc. Roy. Soc. London, 1923, v. A102, № 715, p. 111—130.
3. Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.
4. Кочин Н. Е., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1. М.—Л.: Гостехиздат, 1938. 324 с.
5. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Физматгиз, 1959. 915 с.

Москва

Поступила в редакцию
14.VI.1984