**МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1985**

УДК 532.011.1

# РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ИСТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ ИЗ ПОЛУПРОСТРАНСТВА ЧЕРЕЗ ЧАСТИЧНО ПРОНИЦАЕМУЮ СТЕНКУ

**БУЧИН В. А., ГУВЕРНЮК С. В., ФЕЩЕНКО С. А.**

Получено точное решение задачи об истечении идеальной несжимаемой жидкости из полупространства через отверстие, занятое проницаемой пластинкой. Показано, что расход $Q$ жидкости при истечении через проницаемую пластинку может превышать расход $Q_0$ жидкости при струйном истечении через свободное отверстие.

1. Рассмотрим задачу о стационарном истечении плоского потенциального потока идеальной несжимаемой невесомой жидкости из полупространства через отверстие, по всей ширине которого установлена проницаемая пластинка. Введем следующую систему координат. Ось $x$ направим вдоль стенки, ограничивающей область, занятую жидкостью ($y>0$). Через проницаемый участок $-L\leqslant x\leqslant L$, $y=0$ жидкость истекает в нижнее полупространство $y<0$. Проницаемый участок будем рассматривать как разрыв в потоке идеальной несжимаемой жидкости, на котором выполнены следующие условия [1]:

$$v_1=v_2,\quad k(p_2-p_1)=v_1,\quad u_2=0,\quad k=\mathrm{const},\quad -L\leqslant x\leqslant L \tag{1.1}$$

Здесь $u$, $v$ – компоненты скорости вдоль оси $x$ и $y$, $p$ – давление, $k$ – коэффициент, характеризующий проницаемость, индексами 1, 2 обозначены гидродинамические величины в областях $y>0$ и $y<0$ соответственно.

Введем безразмерные переменные по формулам

$$x_*=\frac{x}{L},\quad y_*=\frac{y}{L},\quad u_*=\frac{u}{V_m},\quad v_*=\frac{v}{V_m}$$

$$p_*=\frac{p}{p_0},\quad \sigma=\frac{1}{\rho k V_m},\quad V_m=\sqrt{\frac{2p_0}{\rho}}$$

Здесь $x$, $y$ – декартовы координаты, $2L$ – ширина проницаемого участка, $\rho$ – плотность жидкости, $p_0$ – разность между полным давлением в полупространстве $y>0$ и давлением в полупространстве $y<0$, $u$, $v$ – компоненты скорости, $V$ – модуль скорости, $V_m$ – максимальное значение $V$ при $y\geqslant 0$. В дальнейшем звездочка в индексе у безразмерных величин опускается.

Примем следующую схему истечения. Будем предполагать, что проницаемый участок $-1\leqslant x\leqslant 1$, $y=0$ обладает направляющим действием [1], таким, что скорость истекающей струи нормальна к стенке в каждой точке проницаемого участка (третье условие в соотношении (1.1)). Помимо этого будем предполагать, что линии тока в истекающей струе прямолинейны и параллельны оси $y$. Последнее предположение эквивалентно предположению о постоянстве давления в истекающей струе. Жидкость вне струи покоится. Положим постоянное давление в области $y<0$ равным нулю, $p_2=0$. Течение в истекающей струе уже не будет потенциальным. Завихренность будет определена в процессе решения.

В области потенциального течения $y\geqslant 0$ имеет место интеграл Бернулли

$$u_1^2+v_1^2+2p_1=1,\quad y\geqslant 0 \tag{1.2}$$

С учетом (1.1), (1.2), а также сделанных выше предположений о принятой схеме истечения получаем граничные условия на проницаемом участке, а также на сплошной стенке в виде

$$u_1^2+v_1^2-2\sigma v_1=1,\quad -1\leqslant x\leqslant 1,\quad y=0 \tag{1.3}$$

$$v_1=0,\quad x<-1,\quad x>1,\quad y=0 \tag{1.4}$$

В данной задаче, так же как и в [1], определение параметров потока в области $y\geqslant 0$ не зависит от особенностей течения жидкости в области $y<0$.

2. Рассмотрим краевую задачу (1.3), (1.4) определения аналитической функции $\bar{V}=\bar{V}(z)=u_1-iv_1$ в области $y\geqslant0$ комплексной плоскости $z=x+iy$. В плоскости годографа скорости $\bar{V}$ верхней полуплоскости $y\geqslant0$ соответствует круговой сегмент, ограниченный дугой окружности с уравнением (1.3) и отрезком прямой с уравнением (1.4). Отобразим конформно верхнюю полуплоскость $y\geqslant0$ на этот сегмент при следующем соответствии точек границ:

$$A_1(\pm\infty,0)\to A(0,0),\quad B_1(-1,0)\to B(1,0),\quad C_1(1,0)\to C(-1,0)$$

Индексом 1 отмечены точки на границе области $y>0$. Искомое отображение имеет вид

$$\bar{V}=\frac{(z-1)^\beta-(z+1)^\beta}{(z-1)^\beta+(z+1)^\beta},\qquad \beta=\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sigma} \tag{2.1}$$

Соотношение (2.1) дает решение поставленной задачи.

Выражения для компонент скорости на проницаемом участке $-1\leqslant x\leqslant1$, $y=+0$ и завихренность в вытекающей струе имеют вид

$$u_1(x,0)=-\frac{(1+x)^{2\beta}-(1-x)^{2\beta}}{(1+x)^{2\beta}+2(1-x^2)^\beta\cos\pi\beta+(1-x)^{2\beta}}$$

$$v_1(x,0)=-\frac{2(1-x^2)^\beta\sin\pi\beta}{(1+x)^{2\beta}+2(1-x^2)^\beta\cos\pi\beta+(1-x)^{2\beta}}$$

$$\Omega=-\frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x}=-\frac{2\beta\sin\pi\beta(1-x^2)^{\beta-1}[(1+x)^{2\beta}-(1-x)^{2\beta}]}{[(1+x)^{2\beta}+2(1-x^2)^\beta\cos\pi\beta+(1-x)^{2\beta}]^2} \tag{2.2}$$

При приближении к границам струи ($x\to\pm1$) завихренность стремится к бесконечности, причем с помощью соотношения (2.2) может быть получена следующая асимптотика:

$$\Omega=-2^{-\beta}\beta\sin\pi\beta\operatorname{sign}x(1-|x|)^{\beta-1}(1+o(1))$$

3. Вычислим безразмерную величину расхода жидкости $Q$ через проницаемый участок $-1\leqslant x\leqslant1$, $y=0$. В силу стационарности течения величина $Q$ равна потоку жидкости через полуокружность бесконечно большого радиуса с центром в начале координат, лежащую в верхней полуплоскости $y\geqslant0$. Используя асимптотическое выражение для $\bar{V}=-\beta z^{-1}+O(z^{-2})$ при $z\to\infty$, вытекающее из (2.1), получим $Q=\pi\beta$. Расход при струйном истечении жидкости через свободное отверстие $-1\leqslant x\leqslant1$, $y=0$ в отсутствие проницаемой пластинки при тех же значениях $p(x,+\infty)$, $p(x,-\infty)$ равен $Q_0=2\pi/(2+\pi)$.

Из приведенных выражений следует, что $Q>Q_0$ при $0\leqslant\sigma\leqslant\sigma_0$, где значение параметра проницаемости $\sigma=\sigma_0$, соответствующее $Q=Q_0$, есть

$$\sigma_0=\operatorname{ctg}\frac{2\pi}{2+\pi}\approx0{,}3636$$

Таким образом, в рамках принятой модели протекания через проницаемый участок расход жидкости $Q$ через отверстие, закрытое проницаемой пластиной, при $0\leqslant\sigma<\sigma_0$ превосходит расход жидкости $Q_0$ через свободное отверстие. Малости безразмерного параметра проницаемости $\sigma$ можно добиться, увеличивая величину $k$ или перепад давления $p_0$.

Коэффициент $k$ в (1.1) может принимать значения от нуля до бесконечности. При $k=0$ пластинка непроницаемая, при $k=\infty$ затенение щели исчезающе мало. Последнее может реализовываться, например, в хонейкомбе. Конкретный вид зависимости $k$ от физических и геометрических параметров существенно зависит от структуры проницаемой поверхности. Некоторые частные выражения для этой зависимости приведены в [2, 3].

Отметим, что решение поставленной задачи об истечении жидкости существует и при $\sigma=0$. При этом искомые формулы имеют особенно простой вид

$$\bar{V}=-z+\sqrt{z^2-1},\qquad y\geqslant0$$

$$u_1(x,0)=-x,\qquad v_1(x,0)=-\sqrt{1-x^2},\qquad \Omega=-\frac{x}{2\sqrt{1-x^2}},\qquad -1\leqslant x\leqslant1,\qquad y=0$$

Приведенное решение не совпадает с решением для истечения жидкости через свободное отверстие.

При $\sigma=0$ значение $Q=\pi/2$ максимально, при этом максимальное отношение $Q/Q_0$ равно

$$\frac{Q}{Q_0}=\frac{\pi+2}{4}\approx1{,}285$$

Полученный результат ($Q/Q_0>1$ при $\sigma<\sigma_0$) аналогичен известному эффекту увеличения расхода жидкости, истекающей через отверстие при наличии направляющих лопаток [3].

## ЛИТЕРАТУРА


1. *Бучин В. А.* Решение задачи об обтекании проницаемой пластинки с отрывом струй.— Докл. АН СССР, 1983, т. 269, № 6, с. 1331–1335.
2. *Payne P. R.* The theory of fabric porosity as applied to parachutes in incompressible flow.— Aeron. Quart., 1978, v. 29, № 3, p. 175–206.
3. *Идельчик И. Е.* Справочник по гидравлическим сопротивлениям. М.: Машиностроение, 1975. 559 с.



Москва



Поступила в редакцию
2.VIII.1984


---


УДК 532.527


# О ДВИЖЕНИИ ДВУХ ВИХРЕВЫХ КОЛЕЦ


БОЯРИНЦЕВ В. И., ЛЕВЧЕНКО Е. С., САВИН А. С.


Известно [1], что два соосных вихревых кольца, которые движутся в одном направлении, поочередно проходят друг через друга. В случае тонких вихревых колец это явление количественно впервые было рассмотрено в [2]. Допущение о тонкости вихревых колец означает, что при рассмотрении их взаимодействия они считаются кольцевыми вихревыми нитями. В настоящей работе на основании подхода, предложенного в [2], установлены некоторые новые свойства системы двух соосных вихревых колец одинаковой интенсивности.

Пусть два тонких соосных вихревых кольца одинаковой интенсивности $\Gamma$ движутся вдоль оси $z$. Положения центров колец и их радиусы обозначим соответственно $z_i$, $\rho_i$ $(i=1,2)$. Вихревые кольца обладают скоростью самодвижения [3]

$$V_i=\frac{\Gamma}{4\pi\rho_i}\ln\frac{\rho_i}{a_i} \tag{1}$$

где $a_i$ – радиус поперечного сечения вихревой трубки $i$-го кольца. С учетом постоянства объема вихревого кольца [3] $W_i=2\pi^2a_i^2\rho_i$ (1) запишем в виде

$$V_i=\frac{3\Gamma}{8\pi\rho_i}\ln\frac{\rho_i}{B_i},\qquad B_i=\left(\frac{W_i}{2\pi^2}\right)^{1/3}=\mathrm{const} \tag{2}$$

Вихревые кольца взаимодействуют через посредство индуцируемых ими полей скорости. Радиальная компонента скорости, индуцируемой одним кольцом, изменяет радиус другого кольца и, следовательно, в соответствии с (2) – его скорость, $z$-компонента дает непосредственный вклад в скорость другого кольца. В соответствии с этим систему уравнений движения колец запишем в виде

$$\dot z_1=V_1+\Gamma F(\rho_1,\ z_1-z_2,\ \rho_2) \tag{3}$$
$$\dot z_2=V_2+\Gamma F(\rho_2,\ z_2-z_1,\ \rho_1) \tag{4}$$
$$\dot\rho_1=\Gamma\Phi(\rho_1,\ z_1-z_2,\ \rho_2) \tag{5}$$
$$\dot\rho_2=\Gamma\Phi(\rho_2,\ z_2-z_1,\ \rho_1) \tag{6}$$

$$F(\rho,z,R)=\frac{1}{2\pi\sqrt{(\rho+R)^2+z^2}}\left[\frac{R^2-\rho^2-z^2}{(\rho-R)^2+z^2}E(\varkappa)+K(\varkappa)\right],\qquad \varkappa^2=\frac{4\rho R}{(\rho+R)^2+z^2}$$

$$\Phi(\rho,z,R)=\frac{z}{2\pi\rho\sqrt{(\rho+R)^2+z^2}}\left[\frac{\rho^2+R^2+z^2}{(\rho-R)^2+z^2}E(\varkappa)-K(\varkappa)\right]$$

Здесь $K$, $E$ – полные эллиптические интегралы, выражения для $F$, $\Phi$ взяты из [4]. Точка над величиной означает ее дифференцирование по времени.

С учетом постоянства $\Gamma$ [3] из (5), (6) следует интеграл движения [2]

$$\rho_1^2+\rho_2^2=C \tag{7}$$