

УДК 535.5.013:536.252

## НЕСТАЦИОНАРНАЯ ЕСТЕСТВЕННАЯ КОНВЕКЦИЯ В ЕМКОСТИ ТРЕУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

КАРЯКИН Ю. Е., СОКОВИШИН Ю. А.

Каналы строительных конструкций, панели электронной аппаратуры, токопроводы в электротехнической промышленности часто имеют вид призм треугольного поперечного сечения. Однако естественная конвекция в таких областях до сих пор мало изучена. Впервые численное исследование конвекции в призматической горизонтальной емкости треугольного сечения выполнено в [1, 2]. Сечение емкости — прямоугольный треугольник с изотермическим (холодным) основанием, вертикальной теплоизолированной и наклонной изотермической (нагретой) границами. Найдены стационарные решения задачи в диапазоне чисел Грасгофа  $800 \leq Gr \leq 64\,000$  и значений геометрического параметра  $0,0625 \leq H/L \leq 1,0$ . В [3] исследована конвекция в емкости, сечение которой имеет форму равнобедренного треугольника, с изотермическими охлаждаемыми наклонными поверхностями и нагретым основанием. Применялось разложение искомых функций в ряды по малому параметру  $H/L$ , а также конечно-разностный метод. Численное решение задач в [1–3] основано на использовании переменных функция тока — завихренность — температура. Экспериментальное исследование теплообмена при естественной конвекции в областях треугольного сечения с различными температурными условиями на стенках выполнено в [4–6].

В статье рассмотрено конечно-разностное решение нестационарной задачи естественной конвекции в емкости треугольного сечения, основанное на использовании физических переменных: компоненты скорости — давление — температура.

1. Рассмотрим призматическую емкость достаточно большой протяженности, поперечное сечение которой — равнобедренный треугольник (фиг. 1) со стороной основания  $L$  и высотой  $H$ . Боковые стенки емкости предполагаются изотермическими (горячая  $AC$  и холодная  $BC$ ), основание  $AB$  — теплоизолированным. Вектор силы тяжести перпендикулярен основанию.

Будем предполагать, что имеет место «слабая» конвекция, при которой изменениями плотности жидкости в неоднородном поле температуры можно пренебречь во всех членах уравнений естественно-конвективного движения, за исключением члена с подъемной силой. Тогда уравнения двумерной нестационарной естественной конвекции в безразмерном виде (приближение Буссинеска) запишутся так [7]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2)}{\partial y} = Gr \theta - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (1.2)$$

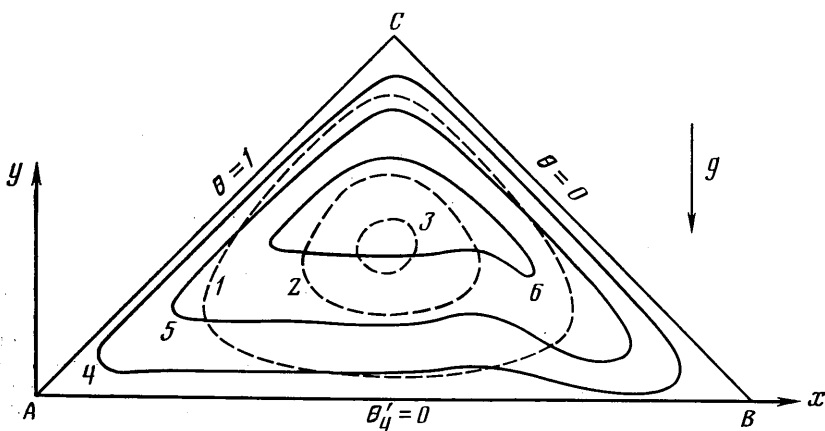
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(u\theta)}{\partial x} + \frac{\partial(v\theta)}{\partial y} = \frac{1}{Pr} \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right) \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad Gr = \frac{\beta g (T_1 - T_2) L^3}{\nu^2} \quad (1.4)$$

Здесь  $u, v$  — проекции вектора скорости на декартовы оси  $x, y$ , расположенные соответственно вдоль основания емкости и перпендикулярно ему,  $\theta = (T - T_2) / (T_1 - T_2)$ ,  $T$  — температура ( $T_1$  — температура горячей стен-

ки,  $T_2$  — холодной),  $p$  — давление,  $P_r$  — число Прандтля,  $G_r$  — число Грасгофа,  $\beta$  — термический коэффициент объемного расширения,  $g$  — ускорение силы тяжести,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости.

При построении безразмерных величин в уравнениях (1.1) — (1.4) в качестве линейного масштаба выбрана ширина основания  $L$ , в качестве масштаба времени — величина  $t_0 = L^2/\nu$ , так называемое диффузионное время.



Фиг. 1

Тогда масштабом скорости будет характерная скорость  $u_0 = L/t_0 = \nu/L$ , которую имеют частицы жидкости при развитии конвекции из состояния покоя. Наконец, в качестве масштаба давления выбирается удвоенный динамический напор  $\rho_0 u_0^2 = \rho_0 \nu^2/L$ , а в качестве масштаба плотности — некоторая характерная величина  $\rho_0$ .

В уравнении баланса тепловой энергии (1.3) отброшены члены, учитывающие работу сил сжатия и диссипацию механической энергии. Движение в области конвекции предполагается ламинарным.

Граничные условия для уравнений (1.1) — (1.4) имеют вид

$$\begin{aligned} y=2Hx/L, 0 \leq x \leq 0,5: u=v=0, \theta=1 \\ y=2H(1-x)/L, 0,5 \leq x \leq 1: u=v=0, \theta=0 \\ y=0, 0 \leq x \leq 1: u=v=0, \partial\theta/\partial y=0 \end{aligned} \quad (1.5)$$

При решении задачи в физических переменных давление  $p$  определяется из уравнений (1.1) — (1.2) с точностью до константы. Это приводит к необходимости его задания в одной точке области [8], скажем, при  $x=0,5$ ,  $y=H/L$  величина  $p=0$ . В начальный момент времени жидкость внутри области конвекции неподвижна и в каждой точке имеет температуру  $\theta_0=0,5$ .

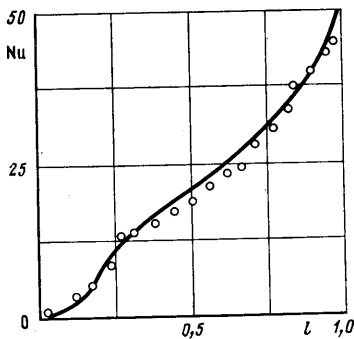
2. Опишем кратко особенности применяемого конечно-разностного метода решения системы (1.1) — (1.4).

В треугольной области конвекции располагаются сетки искомых величин  $u$ ,  $v$ ,  $\theta$  и  $p$ , смещенные друг относительно друга так, как это принято в методе маркеров и ячеек [9]. Узлы сеток согласуются с границами области, при этом шаги  $\Delta x$  и  $\Delta y$  удовлетворяют соотношению  $\Delta y = 2H\Delta x/L$ . На соответствующих сеточных шаблонах строятся разностные аналоги уравнений (1.1) — (1.2), аппроксимирующие конвективные члены по методу «донорской ячейки» [8], а диффузионные — по обычной трехточечной схеме. Искомые сеточные функции  $u$  и  $v$  на новом,  $(n+1)$ -м временном слое выражаются через их известные значения на предыдущем,  $n$ -м слое и неизвестные значения сеточной функции  $p$ . Для определения функции  $p$  используется релаксационное уравнение, построенное на основе уравнения неразрывности (1.4) добавлением члена  $\partial p/\partial \tau$ , где  $\tau$  — релаксационное время. Переход от временного слоя  $\tau$  к слою  $\tau+\Delta\tau$  соответствует переходу от  $s$ -го приближения функции  $p$  к  $(s+1)$ -ому. Разностный аналог релаксационного уравнения приводится к виду, совпадающему

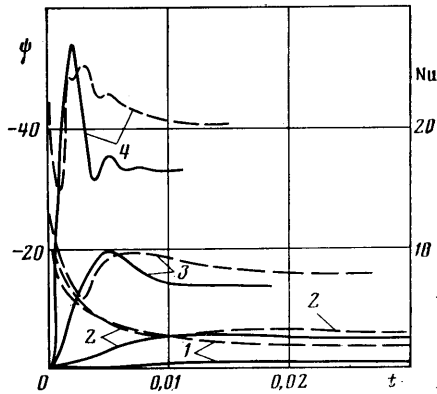
с известным методом последовательной верхней релаксации при решении уравнения Пуассона [8]. Связь между величиной  $\Delta t$  и параметром релаксации  $\omega$  определяется так

$$\Delta t = \frac{\omega \cdot \Delta x^2}{2 \cdot \Delta t (1 + \beta^2)}, \quad \beta = \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Для сходимости итерационного процесса требуется  $1 \leq \omega \leq 2$ . В указанном диапазоне существует оптимальное значение параметра релаксации  $\omega_0$ , определяемое экспериментально путем последовательных расчетов на ЭВМ поля функции  $p$  при различных значениях параметра  $\omega$  из допустимого диапазона. На сетке  $10 \times 20$  (10 узлов вдоль высоты равнобедренного треугольника, 20 — вдоль основания) оказалось, что  $\omega_0 = 1,71$ , на сетке  $20 \times 40$   $\omega_0 = 1,73$ , на сетке  $40 \times 80$   $\omega_0 = 1,75$ . В узлах, непосредственно примыкающих к границам области конвекции, разностный аналог релаксационного уравнения использует граничные условия для функций  $u$  и  $v$ . Вычисления производятся с переменным шагом  $\Delta t$ , величина которого определяется в каждый момент времени из условия устойчивости модельного линейного уравнения.



Фиг. 2



Фиг. 3

3. Описанный выше алгоритм применялся прежде всего для решения задачи, экспериментально исследованной в [4].

Режим конвекции в эксперименте характеризуется следующими параметрами: температура горячей стенки  $T_1 = 322$  К, холодной —  $T_2 = 274$  К, ширина основания емкости  $L = 0,1524$  м, а угол при вершине равнобедренного треугольника равен  $90^\circ$ , т. е.  $H/L = 0,5$ . Такому режиму конвекции соответствует число Грасгофа (см. п. 1)  $Gr = 2,1577 \cdot 10^7$ .

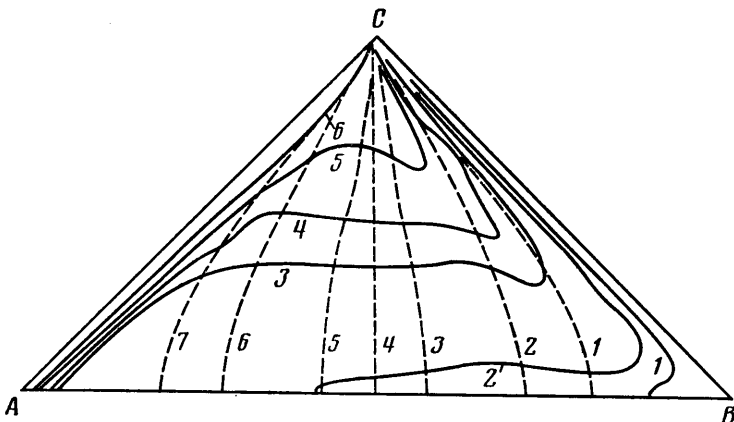
На фиг. 2 представлено распределение локального числа Нуссельта  $Nu(l)$  вдоль поверхности холодной боковой стенки  $BC$  в установившемся режиме конвекции ( $l$  — относительная координата, отсчитываемая вдоль стенки  $BC$  от основания емкости;  $l = 1$  соответствует вершине емкости):  $Nu = (\partial\theta/\partial n)_w$ , где  $n$  — координата, ортогональная стенке  $BC$ . Сплошной линией нанесены результаты численного решения задачи по описанному выше алгоритму при  $Gr = 2,1577 \cdot 10^7$ ,  $Pr = 0,71$  и  $H/L = 0,5$ , точками отмечены экспериментальные данные работы [4].

Совпадение результатов следует признать удовлетворительным, тем более что в эксперименте недостаточно строго выполняется условие тепловой изоляции основания емкости, а также нарушены условия изотермичности боковых поверхностей вблизи вершины  $C$  (эта точка в некотором смысле особая для исходных уравнений конвекции: в ней пересекаются изотермические поверхности с условиями  $\theta = 0$  и 1).

4. Систематические расчеты проводились при изменении отношения высоты емкости к основанию в пределах  $0,25 \leq H/L \leq 2$ , числа Грасгофа в диапазоне  $10^3 \leq Gr \leq 10^8$ , число Прандтля полагалось равным 1. Для расчетов использовалась разностная сетка  $40 \times 80$  (80 узлов вдоль основания емкости).

В начальный момент времени температура всей жидкости равна  $\theta_0=0,5$ , затем правая наклонная стенка  $BC$  емкости мгновенно охлаждалась до  $\theta=0$ , а левая  $AC$  мгновенно нагревалась до  $\theta=1$ .

На фиг. 3 сплошными линиями показано изменение со временем значений функции тока  $\psi$  в точке емкости с координатами  $x=0,5$ ,  $y=H/2L$  при  $H=0,5L$  и четырех значениях числа  $Gr$ :  $10^4$ ,  $10^5$ ,  $10^6$ ,  $10^7$  (кривые 1–4 соответственно). Там же штрихами нанесены значения локального числа Нуссельта в центральной точке холодной стенки.



Фиг. 4

При сравнительно небольших числах Грасгофа,  $Gr \leq 10^4$ , значение функции тока  $\psi$ , характеризующее интенсивность циркуляционной зоны в емкости, монотонно возрастает со временем, достигая некоторого предела. В области течения образуется циркуляционная зона с направлением вращения жидкости по часовой стрелке. Значения локального числа  $Nu$  в начале процесса конвекции велики из-за больших температурных градиентов вблизи стенки, затем они монотонно убывают со временем, стремясь к некоторому пределу.

При  $Gr \geq 10^5$  зависимости  $\psi(t)$  и  $Nu(t)$  уже не имеют монотонного характера. Если  $Gr=10^5$ ,  $10^6$ , то значение функции тока  $\psi$  (сплошные кривые 2, 3) достигает максимума, а затем убывает до некоторого предельного значения. При  $Gr \geq 10^7$  величина  $\psi$  после достижения максимума стремится к стационарному значению по закону затухающих колебаний (кривая 4). Зависимость  $Nu(t)$  в этих случаях также существенно немонотонна. Как следует из фиг. 3, время установления нестационарного процесса конвекции уменьшается с ростом числа Грасгофа.

На фиг. 1 штрихами изображены линии тока, соответствующие установившемуся режиму конвекции при  $H/L=0,5$ ,  $Gr=10^3$  (кривые 1–3 определяются значениями функции тока  $\psi=-0,01$ ;  $-0,06$ ;  $-0,09$ ). Там же сплошными кривыми показаны линии тока при  $Gr=10^8$  (кривые 4–6 характеризуются значениями  $\psi=-10$ ,  $-40$ ,  $-70$ ). Соответствующие этим случаям изотермы приведены на фиг. 4 (кривые 1–7 определяются следующими значениями безразмерной температуры  $\theta$ : 0,1; 0,2; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8; 0,9; штриховые линии —  $Gr=10^3$ , сплошные линии —  $Gr=10^8$ ).

Как следует из фиг. 1 и 4, при малых числах Грасгофа ( $Gr \sim 10^3$ ) происходящие в емкости процессы определяются в значительной степени теплопроводностью.

С ростом числа Грасгофа возрастает интенсивность процессов конвекции в емкости, при  $Gr=10^8$  они полностью преобладают над теплопроводностью. Это приводит к существенному искажению картин линий тока и изотерм в емкости. На боковых стенках образуются ярко выраженные гра-

диентные зоны типа температурных пограничных слоев, вблизи всех твердых поверхностей возникают области, аналогичные динамическим пограничным слоям. В центральной части емкости изотермы из почти вертикального положения при  $Gr=10^3$  переходят в горизонтальное положение при  $Gr=10^8$ , соответствующее условиям стратификации.

На фиг. 5 приведено распределение безразмерной температуры  $\theta$  вдоль адиабатической стенки  $AB$  треугольной емкости для различных значений числа  $Gr$ ; кривые 1–5 соответствуют  $Gr=10^3, 10^4, 10^5, 10^6$  и  $10^8$ . Отчетливо прослеживается образование температурных градиентных областей с ростом числа Грасгофа.

Было исследовано влияние геометрического параметра  $H/L$  на основные характеристики конвекции в треугольной емкости. Для установившегося режима конвекции при  $Gr=10^6, Pr=1$  ниже дается зависимость  $Nu_*(H/L)$ , где  $Nu_*$  — относительное значение локального числа  $Nu$  в центральной точке холодной стенки  $BC$ , а также зависимость  $\psi_*(H/L)$ , где  $\psi_*$  — относительное значение максимальной величины функции тока в емкости. В качестве масштабов при построении относительных величин выбраны соответствующие абсолютные значения для случая  $H/L=1$ :  $Nu=10,11$  и  $\psi_{max}=23,6$ .

$H/L$	0,25	0,5	1	1,5	2
$Nu_*$	0,128	0,764	1	0,987	0,944
$\psi_*$	0,275	0,572	1	1,36	1,665

Из приведенных результатов следует, что при фиксированном значении числа Грасгофа процессы конвекции в емкости становятся более интенсивными с ростом параметра  $H/L$ . Значение числа  $Nu$  в центральной точке холодной стенки максимально при  $H/L=1$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Akinsete V. A., Coleman T. A. Heat transfer by steady laminar free convection within triangular enclosures.— Numer. Meth. Therm. Probl. Proc. 1st Int. Conf., Swansea, 1979. Swansea, 1979, p. 259–268.
2. Akinsete V. A., Coleman T. A. Heat transfer by steady laminar free convection in triangular enclosures.— Int. J. Heat and Mass Transfer, 1982, v. 25, № 7, p. 991–998.
3. Poulidakos D., Bejan A. The fluid dynamics of an attic space.— J. Fluid Mech., 1983, v. 131, p. 251–269.
4. Flack R. D., Kopornicki T. T., Rooke J. H. The measurement of natural convective heat transfer in triangular enclosures.— Trans. ASME, J. Heat Transfer, 1979, v. 101, № 4, p. 648–654.
5. Flack R. D. The experimental measurement of natural convection heat transfer in triangular enclosures heated or cooled from below.— Trans. ASME, J. Heat Transfer, 1980, v. 102, № 4, p. 770–772.
6. Poulidakos D., Bejan A. Natural convection experiments in a triangular enclosure.— Trans. ASME, J. Heat Transfer, 1983, v. 105, № 3, p. 652–655.
7. Соколович Ю. А., Мартыненко О. Г. Введение в теорию свободной конвективного теплообмена. Л.: Изд-во ЛГУ, 1982. 224 с.
8. Роуч П. Дж. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980. 616 с.
9. Harlow F. H., Welch J. E. Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow of fluid with free surface.— Phys. Fluids, 1965, v. 8, № 12, p. 2182–2189.

Ленинград

Поступила в редакцию  
31.V.1984