МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1985

УДК 533.95:537.84

СОЛИТОНЫ В ПЛАЗМЕ С ХОЛЛОВСКОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

ОСИН А. И.

Рассматривается система уравнений идеальной магнитной гидродинамики с учетом токов Холла. Изучение одномерных стационарных решений, затухающих на бесконечности, сводится к исследованию гамильтоновой динамической системы с неоднозначными правыми частями. Производится качественное исследование системы с определением области существования указанных решений. Решения имеют вид уединенных волн – солитонов. Получено точное решение в квадратурах, описывающее структуру солитонов. Указано на существование двух солитонов альфвеновского типа. Анализируются области существования соответствующих решений. В предельных случаях магнитозвуковых и альфвеновских солитонов решения выражаются в явном виде в элементарных функциях.

1. Качественный анализ. В качестве исходной системы уравнений для разреженной плазмы в сильном магнитном поле при больших магнитных числах Рейнольдса воспользуемся системой уравнений бездиссипативной магнитной гидродинамики с учетом холловских токов [1]. Для одномерных стационарных волн все параметры плазмы являются функциями переменной $\xi=x-\lambda t$, где $\lambda=\text{const}>0$ – скорость волны. Система уравнений в этом случае сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, интегрирование которой с граничными условиями затухания на бесконечности ($u=v=w=0$, $\rho=\rho_0$, $p=p_0$, $\mathbf{B}=\mathbf{B}_0$, $\mathbf{B}'=0$ при $\xi\to-\infty$), приводит к следующей системе уравнений [1]:

$$(u-\lambda)\rho=-\lambda\rho_0,\qquad v=-\frac{B_x(B_y-B_{y0})}{4\pi\rho_0\lambda},\qquad w=-\frac{B_xB_z}{4\pi\rho_0\lambda}$$

$$-\lambda\rho_0u+p+\frac{B^2}{8\pi}=p_0+\frac{B_0^2}{8\pi},\qquad p=p_0\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^\gamma$$

$$\left[u+\lambda\left(\frac{V_{Ax}^2}{\lambda^2}-1\right)\right]B_y=\lambda B_{y0}\left(\frac{V_{Ax}^2}{\lambda^2}-1\right)+\varkappa\frac{\rho_0}{\rho}B_z' \tag{1.1}$$

$$\left[u+\lambda\left(\frac{V_{Ax}^2}{\lambda^2}-1\right)\right]B_z=-\varkappa\frac{\rho_0}{\rho}B_y'$$

$$V_{Ax}^2=\frac{B_{x0}^2}{4\pi\rho_0},\qquad \varkappa=\frac{V_{Ax}^2}{\Omega^+}$$

Здесь Ω^+ – циклотронная частота ионов. При этом система координат выбрана таким образом, что $B_{z0}=0$. В работе [1] получены приближенные решения системы (1.1) в предположении слабой нелинейности и дисперсии, а также при дополнительном предположении $|(V_{Ax}^2/\lambda^2-1)|\gg1$. Эти решения соответствуют магнитозвуковым солитонам.

Рассмотрим систему уравнений (1.1) в точном виде. Исключая u и p, получим систему, состоящую из двух обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка и одного конечного соотношения (интеграла)

$$h_y' = -\frac{\lambda(\rho^*+\varphi)h_z}{\varkappa(1-\rho^*)}, \qquad h_z' = \frac{\lambda(\rho^*+\varphi)h_y - \lambda\varphi}{\varkappa(1-\rho^*)} \tag{1.2}$$

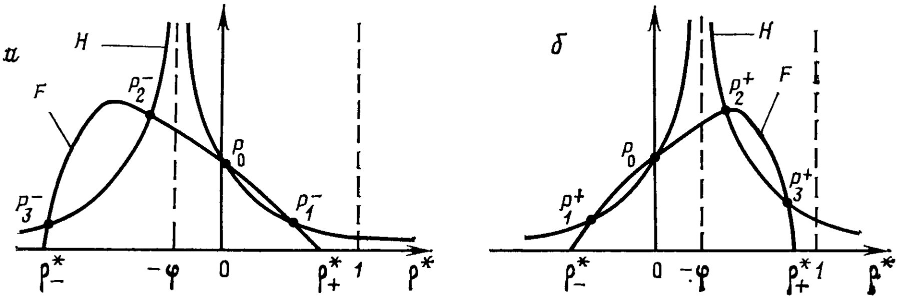
$$h_\perp^2 = F(\rho^*) \stackrel{\text{def}}{=} 1 + 2\frac{\beta}{\sin^2\theta}\left[1+\gamma\left(\frac{\lambda^2}{a_0^2}\right)\rho^* - \frac{1}{(1-\rho^*)^\gamma}\right] \tag{1.3}$$

$$\rho^* = \frac{\rho-\rho_0}{\rho}, \qquad h_\perp^2 = h_y^2 + h_z^2, \qquad \mathbf{h}_\perp = \frac{\mathbf{B}_\perp}{B_{\perp 0}}$$

$$a_0^2 = \frac{\gamma p_0}{\rho_0}, \qquad \beta = \frac{4\pi p_0}{B_0^2}, \qquad \varphi = \left(\frac{V_{Ax}^2}{\lambda^2} - 1\right)$$

Здесь θ — угол между направлением невозмущенного магнитного поля $\mathbf{B}_0$ и осью x. Соотношение (1.3) определяет величину ρ^* как неявную, двузначную функцию $h_\perp$. Стационарным решениям исходной системы уравнений, затухающим на минус бесконечности, соответствуют траектории системы (1.2), выходящие из «начальной» точки $P_0(1, 0, 0)$ и расположенные на поверхности Σ (определяемой (1.3)) в пространстве $\mathbf{R}^3(h_y, h_z, \rho^*)$.

Соотношение (1.3) определяет поверхность вращения с осью ρ^* в качестве оси симметрии. Функция $F(\rho^*)$ ограничена сверху и имеет два корня, один из которых положительный (ρ_+^*), другой отрицательный (ρ_-^*), кроме того, $F(0)=1$ и $F''(\rho^*)<0$. Максимум $F(\rho^*)$ находится в области отрицательных значений ρ^* при $\lambda^2<a_0^2$ и в области положительных значений ρ^* при $\lambda^2>a_0^2$. Качественно вид функции



Фиг. 1

$F(\rho^*)$ представлен на фиг. 1. Из перечисленных свойств функции $F(\rho^*)$, в частности, следует, что Σ – гладкая, выпуклая поверхность, гомеоморфная двумерной сфере S^2. В дальнейшем точки $(0, 0, \rho_+^*)$ и $(0, 0, \rho_-^*)$ будем называть соответственно северным N и южным S полюсом, окружность максимального радиуса $F = \max F(\rho^*)$ – экватором. На экваторе $F'(\rho^*)=F'(\rho_0^*)=0$, $\rho_0^*=1-(a_0^2/\lambda^2)^{1/(\gamma+1)}$. Части поверхности Σ, лежащие по разные стороны от экватора, будем называть северным Σ_N и южным Σ_S «полушариями».

Фактически речь идет о двух динамических системах, соответствующих двум ветвям двузначной функции $\rho^*(h_\perp)$. Фазовым пространством для каждой из них служит круг K: $h_\perp<h_{\perp\max}(\lambda)$ на плоскости (h_y, h_z). Удобно рассматривать эти системы как одну динамическую систему в $\mathbf{R}^3(h_y, h_z, \rho^*)$ на поверхности уровня Σ интеграла (1.3). Следует отметить, что на экваторе для такой динамической системы нарушаются условия теоремы существования и единственности решений, так что траектории, выходящие на экватор, будут соответствовать непродолжаемым решениям. Стационарные решения исходной системы уравнений, затухающие на минус бесконечности, существуют тогда и только тогда, когда существуют целые траектории (траектории, вдоль которых параметр ξ изменяется от $-\infty$ до $+\infty$) системы (1.2), выходящие из точки P_0.

Нетрудно видеть, что начальная точка $P_0(1, 0, 0)$, имеющая смысл значений параметров плазмы при $x \to -\infty$, является особой точкой системы (1.2).

Характеристическое уравнение, составленное для линеаризованной в точке P_0 системы, имеет вид

$$\Lambda^2 + \det L_0 = 0, \qquad \det L_0 = \frac{(\lambda^2 - a_+^2)(\lambda^2 - a_-^2)(\lambda^2 - V_{Ax}^2)}{\varkappa^2 \lambda^2 (\lambda^2 - a_0^2)}$$
$$a_{+,-} = \frac{1}{2}\left(\sqrt{a_0^2 + V_{A0}^2 + 2a_0 V_{Ax}} \pm \sqrt{a_0^2 + V_{A0}^2 - 2a_0 V_{Ax}}\right), \qquad V_{A0}^2 = \frac{B_0^2}{4\pi\rho_0} \tag{1.4}$$

Здесь a_+, a_- – скорости соответственно быстрых и медленных магнитозвуковых возмущений, L_0 – матрица линеаризованной в точке P_0 системы. В случае $\operatorname{Re}\Lambda \neq 0$ (невырожденный случай) поведение траекторий нелинейной системы (1.2) в достаточно малой окрестности точки P_0 качественно не отличается от поведения траекторий линеаризованной системы. В дальнейшем примем, что скорость волны λ не совпадает ни с одной из характеристических скоростей и не равна a_0, тогда $\det L_0 \neq 0, \infty$.

Если $\det L_0 > 0$, то $\Lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\det L_0}$ и особая точка P_0 линеаризованной системы – центр. Особая точка P_0 нелинейной системы (1.2) в этом случае – либо центр, либо фокус. В силу инвариантности системы (1.2) относительно преобразования $h_z \to -h_z$, $\xi \to -\xi$ траектории системы в окрестности особой точки, лежащей на плоскости $h_z = 0$, не могут иметь вид спиралей (принцип симметрии Пуанкаре), поэтому особая точка P_0 в этом случае – центр. Но тогда не существует ни одной траектории, выходящей из особой точки P_0 и, следовательно, не существует стационарных решений исходной системы уравнений, затухающих на бесконечности.

Если $\det L_0 < 0$, то $\Lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\det L_0}$ и особая точка P_0 как у линейной, так и у нелинейной системы – седло. В этом случае имеются две выходящие из P_0 траектории (сепаратрисы).

Таким образом, условие $\det L_0 < 0$ является необходимым условием существования стационарных решений, затухающих на бесконечности. Из (1.4) следует, что это условие эквивалентно выполнению одного из следующих двух неравенств:

$$\begin{gathered} a_-^2 < \lambda^2 < \min[a_0^2, V_{Ax}^2] \\ \max[a_0^2, V_{Ax}^2] < \lambda^2 < a_+^2 \end{gathered} \tag{1.5}$$

Скорость волны λ должна лежать в одном из двух непересекающихся интервалов. Решения (если они существуют) с меньшими значениями λ будем называть медленными, с большими значениями λ — быстрыми волнами. Вид функции $F(\rho^*)$ для медленных и быстрых волн представлен на фиг. 1, *а* и *б* соответственно. В медленных волнах магнитное поле с ростом плотности убывает, а с уменьшением плотности растет: $dh_\perp/d\rho^* < 0$. В быстрых волнах $dh_\perp/d\rho^* > 0$. Можно заметить, что характер изменения магнитного поля в волне в зависимости от изменения плотности аналогичен изменению магнитного поля в простых волнах в изотропной магнитной гидродинамике [2].

Для полного качественного исследования необходимо выяснить вопрос о наличии и характере других особых точек системы (1.2), а также о поведении сепаратрис особой точки P_0 (фазовых траекторий искомых решений).

Исключая из рассмотрения тривиальные решения при $\lambda = 0$, $\lambda = V_{Ax}$, из (1.2), (1.3) получим систему для определения особых точек

$$h_z = 0, \qquad h_y = \frac{\varphi}{\rho^* + \varphi}, \qquad F(\rho^*) = \frac{\varphi^2}{(\rho^* + \varphi)^2} \overset{\text{def}}{=} H(\rho^*) \tag{1.6}$$

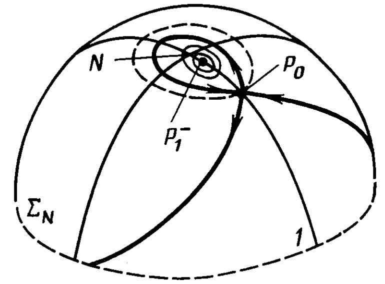
Особым точкам, таким образом, соответствуют общие точки кривой $F(\rho^*)$ и гиперболы $H(\rho^*)$, причем всегда существует по крайней мере одна общая точка, соответствующая особой точке P_0, так как $F(0) = H(0) = 1$. Вообще может быть не более четырех общих точек (по две на каждой ветви гиперболы), так как $F'' < 0$ и $H'' > 0$. Можно показать, что для медленных волн особая точка P_1^-, лежащая на ветви гиперболы, проходящей через P_0, находится в области $\rho^*>0$, причем $P_1^-\to P_0$ при $\lambda^2\to a_-^2$ и $P_1^-\to N$ при $\lambda^2\to V_{Ax}^2$. Для быстрых волн особая точка P_1^+, лежащая на одной ветви гиперболы с P_0, находится в области $\rho^*<0$, причем $P_1^+\to P_0$ при $\lambda^2\to a_+^2$ и $P_1^+\to S$ при $\lambda^2\to V_{Ax}^2$ (фиг. 1). В обоих случаях, как это видно из (1.6), $\operatorname{sgn}(h_y)_{P_1}=1=\operatorname{sgn}(h_y)_{P_0}$. Когда скорость волны равна одной из магнитозвуковых скоростей, гипербола $H(\rho^*)$ касается кривой $F(\rho^*)$ в точке P_0. Очевидно, $P_2\to P_0^*$ $(-1, 0, 0)$, когда $\lambda^2\to V_{Ax}^2(\varphi\to 0)$, а P_3 всегда находится в противоположном P_0 полушарии и, следовательно, недостижима для траекторий, выходящих из P_0.

Линеаризация системы в окрестности любой из четырех возможных особых точек P_i приводит к линейной системе с характеристическим уравнением

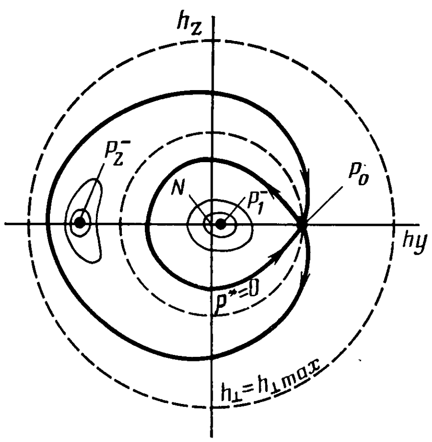
$$\Lambda^2+\det \mathbf{L}_i=0,\qquad \det \mathbf{L}_i=\frac{\lambda^2}{\varkappa^2}\left(\frac{\rho^*+\varphi}{1-\rho^*}\right)^2\left[1-\frac{H'(\rho^*)}{F'(\rho^*)}\right]_{P_i}$$

Особая точка P_1 в тех случаях, когда решения вообще существуют ($\det \mathbf{L}_0<0$),— центр (принцип симметрии), поскольку $\det \mathbf{L}_1>0$ как для медленных, так и для быстрых волн ($0<H'(\rho^*)/F'(\rho^*)<1$). Особая точка P_2 — центр, если она находится в том же полушарии, что и P_0.

Построив поле направлений на окружности $h_\perp=1$ ($\rho^*=0$) и осях h_y и h_z с помощью (1.2), можно показать, что сепаратриса L_1, идущая в окрестность одного из полюсов, обязательно пересечет ось $h_z=0$ где-то между



Фиг. 2



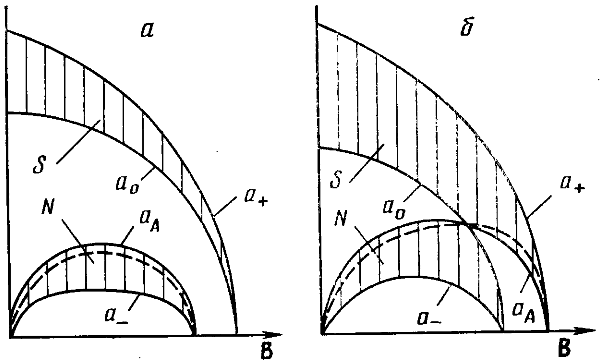
Фиг. 3

точками P_0^* и P_1. Но тогда по принципу симметрии Пуанкаре она обязана вернуться в точку P_0. Поскольку сепаратриса возвращается в исходную точку, то соответствующее стационарное решение затухает при $\xi\to+\infty$ и выходит на те же значения параметров, что и при $\xi\to-\infty$. Таким образом, доказана достаточность условий (1.5) для существования затухающих на бесконечности одномерных стационарных решений. Решения имеют вид уединенных волн — солитонов.

Медленные солитоны являются солитонами сжатия, поскольку сепаратриса L_1^- целиком находится в области $\rho^*>0$ $(\rho>\rho_0)$. Быстрые солитоны являются солитонами разрежения, так как L_1^+ находится в области $\rho^*<0$. Качественно фазовый портрет системы в области существования медленных решений изображен на фиг. 2, 3 (кривая *1* — экватор). Для быстрых волн картина качественно аналогична, с той лишь разницей, что движение вдоль сепаратрис происходит в обратном направлении.

Если $\lambda^2\to a_-^2$, то $P_1^-\to P_0$ и решение в этом случае описывает медленный солитон сжатия малой амплитуды, распространяющийся со скоростью, немного большей скорости медленных магнитозвуковых возмущений (медленный магнитозвуковой солитон). Если $\lambda^2\to a_+^2$, то $P_1^+\to P_0$ и решение описывает быстрый солитон разрежения малой амплитуды, распространяющийся со скоростью, немного меньшей скорости быстрых магнитозвуковых возмущений (быстрый магнитозвуковой солитон). Эти предельные случаи соответствуют приближенным решениям, полученным в [1].

Если $\lambda^2 \to V_{Ax}^2$, то $P_1^- \to N$ ($P_1^+ \to S$). Сепаратриса L_1^- (соответственно L_1^+) описывает петлю, целиком лежащую вблизи окружности $\rho^*=0$. Это решение описывает медленный (быстрый) солитон сжатия (разрежения), распространяющийся со скоростью, немного меньше (большей) скорости альфвеновских возмущений,— альфвеновский солитон. Поперечная составляющая магнитного поля, почти не испытывая изменения по величине, совершает один полный оборот вокруг оси x. Изменение всех величин,



Фиг. 4

кроме угла поворота магнитного поля, в такой волне мало. Описанное решение не содержится в приближенном решении, представленном в работе [1], поскольку для него выполняется условие $|(V_{Ax}^2/\lambda^2-1)|\gg 1$.

Все перечисленные выше решения характеризуются ослаблением магнитного поля в волне ($B_\perp < B_{\perp 0}$). Наличие второй сепаратрисы, L_2, выходящей из точки P_0, указывает на возможность существования решений с усилением поля. Решения этого типа не существуют, если сепаратриса L_2 выходит на экватор (фиг. 2). На основе результатов точного интегрирования, приводимых ниже, можно доказать, что для значений λ, достаточно близких к V_{Ax}, существуют оба решения (фиг. 3), соответствующие сепаратрисам L_1 и L_2. Всегда существуют, таким образом, два альфвеновских солитона ($\lambda \approx V_{Ax}$). На фиг. 4 обозначены области существования медленных N и быстрых S солитонов для плазмы с $\beta > \gamma^{-1}$ (фиг. 4, *а*) и $\beta < \gamma^{-1}$ (фиг. 4, *б*).

2. Точное решение. Система (1.2) допускает представление в гамильтоновой форме и интегрируется в квадратурах. Уравнение сепаратрис может быть получено в явном виде в элементарных функциях. Процедуру интегрирования удобно рассмотреть на более общем примере, частным случаем которого является система (1.2)—(1.3). Рассмотрим систему

$$\dot{x} = -\frac{G(f)\,y}{\Phi(f)}, \quad \dot{y} = \frac{G(f)\,x+\mu}{\Phi(f)} \tag{2.1}$$

$$F(f) = x^2 + y^2 \tag{2.2}$$

Здесь $\mu=\text{const}$; G, Φ — произвольные непрерывные функции, причем $\Phi(f)$ нигде не обращается в нуль, $F(f)$ — дифференцируемая функция. После замены параметризации $ds = dt/\Phi(f)$ система (2.1) переписывается в виде

$$x' = -G(f)\,y, \quad y' = G(f)\,x + \mu \tag{2.3}$$

Очевидно, функция Гамильтона для системы (2.3) $H = H^* + \mu x$, где H^* — функция Гамильтона невозмущенной системы ($\mu=0$). При помощи

(2.3) и (2.2) находим

$$H=\frac{1}{2}\int G(f)F_f'(f)df+\mu x \tag{2.4}$$

В силу сохранения функции Гамильтона легко получить уравнение произвольной фазовой траектории, например сепаратрис особой точки $P_0(x_0, y_0)$

$$x=\frac{1}{\mu}\left(H_0-\frac{1}{2}\int G(f)F_f'(f)df\right)$$

$$y=\pm\sqrt{F(f)-\frac{1}{\mu^2}\left(H_0-\frac{1}{2}\int G(f)F_f'(f)df\right)^2}$$

Здесь H_0 — константа, вычисленная при помощи (2.4) в точке P_0, функция f выступает в роли параметра. Зависимость $f(t)$ вдоль выбранной траектории выражается при помощи первого уравнения в (2.1) квадратурой

$$t=-\int\frac{\Phi(f)x'(f)}{G(f)y(f)}df$$

Реализация описанной выше процедуры интегрирования применительно к системе (1.2)—(1.3) приводит к уравнению сепаратрис, которое удобно представить в следующем виде:

$$\begin{gathered}h_y=1+\frac{\beta}{\varphi}\left(\frac{1+\mathrm{tg}^2\theta}{\mathrm{tg}^2\theta}\right)\left[\gamma\left(\frac{\lambda^2}{a_0^2}\right)\rho^*\left(\varphi+\frac{\rho^*}{2}\right)-\right.\\ \left.-\frac{\varphi+1}{(1-\rho^*)^\gamma}+\frac{\gamma}{(\gamma-1)(1-\rho^*)^{\gamma-1}}+\varphi-\frac{1}{\gamma-1}\right]\\ h_\perp^2=1+2\beta\left(\frac{1+\mathrm{tg}^2\theta}{\mathrm{tg}^2\theta}\right)\left[1+\gamma\left(\frac{\lambda^2}{a_0^2}\right)\rho^*-\frac{1}{(1-\rho^*)^\gamma}\right]\end{gathered} \tag{2.5}$$

Для определения границы существования второго солитоннного решения (соответствующего сепаратрисе L_2) запишем условие того, что сепаратриса L_2 выходит на экватор ($\rho^*=\rho_0^*$) в точке с координатой $h_z=0$

$$\begin{gathered}1+\frac{\beta}{\varphi}\left(\frac{1+\mathrm{tg}^2\theta}{\mathrm{tg}^2\theta}\right)\left\{\gamma\left(\frac{\lambda^2}{a_0^2}\right)\left[\varphi+\frac{1}{2}-\frac{(\gamma+1)(\varphi+1)}{\gamma}\omega+\frac{1}{2}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\omega^2\right]+\right.\\ \left.+\varphi-\frac{1}{\gamma-1}\right\}+\sqrt{1+2\beta\left(\frac{1+\mathrm{tg}^2\theta}{\mathrm{tg}^2\theta}\right)\left\{1+\left(\frac{\lambda^2}{a_0^2}\right)[\gamma-(\gamma+1)\omega]\right\}}=0,\\ \omega=\left(\frac{a_0^2}{\lambda^2}\right)^{1/(\gamma+1)}\end{gathered} \tag{2.6}$$

Непосредственная численная проверка соотношения (2.6) дает узкую зону, примыкающую всюду к альфвеновской скорости. На фиг. 4 граница этой области отмечена (качественно) пунктиром. Точное решение в квадратурах записывается в следующем виде:

$$\lambda\xi=-\varkappa\int\frac{(1-\rho^*)h_y'(\rho^*)}{(\rho^*+\varphi)h_z(\rho^*)}d\rho^* \tag{2.7}$$

Здесь $h_y(\rho^*)$, $h_z(\rho^*)$ определяются при помощи (2.5).

3. Солитоны малой амплитуды. Для магнитозвуковых и альфвеновских солитонов ($\lambda\approx a_+$, a_-, V_{Ax}) решение может быть представлено в более простом виде, так как эти случаи соответствуют солитонам малой амплитуды ($|\rho^*|\ll 1$). Дифференциальное уравнение, соответствующее (2.7), может быть записано в виде

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\rho^*}{d\xi}\right)^2+U(\rho^*)=0$$

Сохраняя в выражении для «потенциала» $U(\rho^*)$ члены до порядка ρ^{*4} включительно и опуская громоздкие выкладки, приближенное решение для солитонов малой амплитуды можно записать в виде

$$\frac{d^2\rho^*}{d\eta^2}=-\frac{dU}{d\rho^*} \tag{3.1}$$

$$U=(\alpha\rho^{*2}+\delta\rho^{*3}+\rho^{*4})\Gamma,\qquad \Gamma=\operatorname{sgn}\frac{L(\lambda^2-V_{Ax}^2)}{(\lambda^2-a_0^2)}$$

$$\eta^2=\xi^2\left|\frac{L(\lambda^2-V_{Ax}^2)}{\varkappa^2\lambda^2(\lambda^2-a_0^2)}\right|,\qquad \alpha=\frac{1}{2L}(\lambda^2-a_+^2)(\lambda^2-a_-^2),\qquad \delta=\frac{K}{L}$$

$$K=(1+k_0)(\lambda^2-a_+^2)(\lambda^2-a_-^2)-{}^1/_2[k_0+k_1-{}^2/_3k_0k_1k_2](\lambda^2-V_{Ax}^2)(\lambda^2-a_0^2)$$

$$L=\frac{1}{2}[\gamma k_0-(1+k_0)^2](\lambda^2-a_+^2)(\lambda^2-a_-^2)-[(1+k_0)\left(k_0+k_1-\frac{2}{3}k_0k_1k_2\right)+$$

$$+\frac{1}{8}k_1[(k_0+k_1)^2-k_0k_2]](\lambda^2-V_{Ax}^2)(\lambda^2-a_0^2)$$

$$k_0=\frac{a_0^2(\gamma+1)}{\lambda^2-a_0^2},\qquad k_1=\frac{\lambda^2}{\lambda^2-V_{Ax}^2},\qquad k_2=\frac{V_{A0}^2-V_{Ax}^2}{\lambda^2-a_0^2}$$

Нетривиальные решения существуют только при $\alpha\Gamma<0$, что эквивалентно (1.5). В области, где существуют солитонные решения, $\Gamma=\operatorname{sgn}L$, поэтому возможны два случая: $L>0$, $\alpha<0$; $L<0$, $\alpha>0$.

В случае $\Gamma=-1$ существует только одно решение: солитон разрежения при $\delta>0$ или солитон сжатия при $\delta<0$. Если $\delta^2<4\alpha$, то солитонные решения в этом случае вообще не существуют. Интегрирование (3.1) приводит к следующим явным формулам, описывающим структуру солитонов:

$$\rho^*_{+,-}=\frac{A_{+,-}}{\operatorname{ch}^2\tau+\nu_{+,-}\operatorname{sh}^2\tau} \tag{3.2}$$

$$A_{+,-}=\frac{1}{2}(-\delta\pm\Gamma\sqrt{\delta^2-4\alpha}),\qquad \nu_{+,-}=\frac{A_{+,-}}{\delta+A_{+,-}}$$

$$\tau=\frac{\xi}{\Delta}=\frac{x-\lambda t}{\Delta},\qquad \Delta=\frac{2}{\sqrt{-\det\mathbf{L}_0}}$$

Величина $A_{+,-}$ имеет смысл амплитуды солитонов сжатия ($A_+>0$) и разрежения ($A_-<0$), $\operatorname{sgn}\nu_+=\operatorname{sgn}\nu_-=\Gamma$ и $\nu_+\nu_-=1$. В случае $\Gamma=-1$, если $\delta>0$, то $\nu_+<-1$ и солитон сжатия не существует, так как (3.2) перестает быть ограниченным. Если $\delta<0$, то не существует солитон разрежения.

Если $\lambda^2\to a_+^2$ или $\lambda^2\to a_-^2$, то величина L в (3.1) остается конечной, так что $\alpha\to 0$, тогда как δ остается конечной, поэтому в этих случаях приближенное решение (3.1) описывает только по одному солитону малой амплитуды. Поскольку $|\alpha|/\delta^2\to 0$ как в случае $L>0$, так и в случае $L<0$ и, следовательно, одна из величин $\nu_{+,-}$ стремится к нулю, то в пределе магнитозвуковые солитоны совпадают по виду с солитонами уравнения Кортевега — де Вриза:

$$\rho^*_{+,-}=A_{+,-}\operatorname{sch}^2\left(\frac{x-\lambda t}{\Delta}\right)$$

Здесь знаки плюс и минус относятся соответственно к медленному магнитозвуковому солитону сжатия и быстрому магнитозвуковому солитону разрежения. Величина Δ имеет смысл характерной ширины солитона, а амплитуда солитонов приближенно равна

$$|A_{+,-}| \approx \left|\frac{\alpha}{\delta}\right| = \left|\frac{1}{2K}(\lambda^2-a_+^2)(\lambda^2-a_-^2)\right|$$

Если $\lambda^2 \to V_{Ax}^2$, то $L\to\infty$, $\alpha\to 0$, $\delta\to 0$, $|\alpha|/\delta^2\to\infty$, так что при $\lambda^2\approx V_{Ax}^2$ существуют два решения, причем в этом случае $\nu_+\approx\nu_-\approx 1$. Таким образом, предельное решение для альфвеновских солитонов имеет вид

$$\rho^*_{+,-} = \frac{A_{+,-}}{\operatorname{ch}^2\tau + \operatorname{sh}^2\tau}$$

с амплитудой $A_{+,-} = \pm\sqrt{|\alpha|}$ и характерной шириной Δ.

По значению параметра λ — скорости солитона — однозначно определяются его амплитуда и ширина. Таким образом, амплитуда и ширина солитонов связаны между собой. В пределе, когда $\lambda\to a_+$, a_-, V_{Ax}, амплитуда солитонов стремится к нулю, а ширина — к бесконечности, причем таким образом, что $\Delta^2 A\to\text{const}$ как для магнитозвуковых, так и для альфвеновских солитонов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Баранов В. Б., Рудерман М. С.* Волны в плазмы с холловской дисперсией.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 3, 108–113.
2. *Куликовский А. Г., Любимов Г. А.* Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 246 с.

Москва

Поступила в редакцию
4.IX.1984