

УДК 533.697

## О ЗАКРИТИЧЕСКОМ РЕЖИМЕ НЕЛИНЕЙНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ДОЗВУКОВОЙ И СВЕРХЗВУКОВОЙ НЕВЯЗКИХ СТРУЙ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

ЛЫЖИН Д. О., ТИТОВСКАЯ Т. В., ТРИГУБ В. Н.

Исследована нелинейная задача о закритическом режиме взаимодействия между до- и сверхзвуковой невязкими струями, текущими в плоском канале. Рассмотрена задача о распространении малых возмущений давления.

Численно рассчитана форма линии тока, разделяющей две струи, нелинейные возмущения которой имеют колебательный характер. Получена зависимость амплитуды указанных колебаний от параметра подобия, представляющего собой интегральную характеристику профиля невозмущенного течения.

Впервые термины «докритический» и «закритический» были введены Л. Крокко применительно к пограничному слою при исследовании его взаимодействия с внешним сверхзвуковым потоком [1]. Оказалось, что важным параметром, характеризующим механизм взаимодействия, является приращение толщины вытеснения пограничного слоя  $\delta_e$  при изменении статического давления  $p$ :

$$\frac{d\delta_e}{dp} = \int_0^{\delta_e} \left( \frac{1}{M_0^2} - 1 \right) dy = L$$

где интеграл берется по профилю числа Маха  $M_0$  невозмущенного пограничного слоя. При  $L > 0$  пограничный слой называется докритическим и «в среднем» ведет себя как дозвуковая струйка тока, т. е. толщина вытеснения возрастает с ростом давления. При  $L < 0$  закритический пограничный слой реагирует на изменение давления как сверхзвуковой поток.

К настоящему времени докритические режимы взаимодействия изучены достаточно полно. Широко известна асимптотическая нелинейная теория отрыва пограничного слоя в сверхзвуковом потоке, развитая в работах [2–4]. Согласно ей, основной вклад в механизм взаимодействия вносит изменение толщины вытеснения тонкого вязкого пристеночного слоя. При этом длина области, в которой распространяются возмущения, превышает по порядку величины толщину невозмущенного пограничного слоя, и поэтому поперечный перепад давления в главном приближении является внепорядковым. Закритический тип взаимодействия, как указал Крокко [1], может иметь место при достаточно больших сверхзвуковых скоростях внешнего потока на холодных телах, а для турбулентного пограничного слоя – при умеренных сверхзвуковых скоростях. Исследование течений около холодных тел [5–6] показало, что для описания закритического режима взаимодействия требуется построить асимптотическую теорию более общего вида, чем в [2–4]. Оказывается, что как поперечные, так и продольные размеры области взаимодействия могут быть порядка толщины невозмущенного пограничного слоя, что приводит к необходимости учитывать в уравнениях поперечный градиент давления. При этом действие сил вязкости заключается лишь в формировании пограничного слоя, приходящего в зону взаимодействия, а сам механизм распространения возмущений является «невязким».

Для выяснения качественных характеристик взаимодействия закритического пограничного слоя с гиперзвуковым потоком газа весьма перспективной представляется упрощенная модель, в которой пограничный слой заменяется до- и сверхзвуковой струями, текущими вдоль поверхности тела, а внешнее гиперзвуковое течение с большой плотностью может в первом приближении рассматриваться как твердая стенка. Такой подход, примененный в [7], позволил получить результаты, хорошо согласующиеся с решением задачи о гиперзвуковом пограничном слое на холодной пластине [8–9]. В этих работах, однако, исследование ограничивалось анализом линейного приближения. В настоящей работе упомянутая струйная модель применена для анализа распространения нелинейных самоиндуцированных возмущений, что позволило связать их амплитуды с характеристиками приходящего пограничного слоя.

1. Рассматривается течение невязкого газа в плоском канале, схема которого представлена на фиг. 1. Ширина начальной прямолинейной части канала —  $H$ , невозмущенный поток представляет собой две струи, параллельные стенкам. Введем прямоугольную систему координат  $X, Y$ , связанную с прямолинейным участком нижней поверхности канала. Основная часть потока — сверхзвуковая струя с исходными постоянными параметрами  $p_\infty, u_{1\infty}, \rho_{1\infty}, M_{1\infty}$  (область 1 на фиг. 1). Здесь  $p, u, \rho, M$  — статическое давление, продольная компонента скорости, плотность и число Маха соответственно, индекс 1 относится к номеру области, а  $\infty$  обозначает невозмущенный поток. Тонкая дозвуковая струя, примыкающая к нижней стенке, характеризуется величинами  $p_\infty, u_{2\infty}, \rho_{2\infty}, M_{2\infty}$ . Ее исходная толщина  $d_\infty$ , причем  $d_\infty/H = O(\tau)$ , где  $\tau \ll 1$  — малый параметр, точное значение которого будет определено ниже.

Исследуем стационарную задачу о малых возмущениях первоначального давления  $p_\infty$ , которые могут быть вызваны, например, небольшим изменением формы нижней стенки. Рассмотрим наиболее общий случай, когда величина возмущения давления  $\Delta p/p_\infty = O(\tau)$  и  $\Delta p = O(\rho_{2\infty} u_{2\infty}^2)$ . Из этих предположений, учитывая, что  $M_{1\infty} = O(1)$ , можно получить

$$\frac{M_{2\infty}^2}{M_{1\infty}^2} = \frac{\rho_{2\infty} u_{2\infty}^2}{\rho_{1\infty} u_{1\infty}^2} = O(\tau) \quad (1.1)$$

Таким образом, возмущение толщины дозвуковой части потока будет сравнимо по порядку величины с ее начальной толщиной  $d_\infty$ , следовательно, течение в ней должно описываться нелинейными уравнениями. С другой стороны, в сверхзвуковой струе возмущения всех величин будут малы, что дает возможность линеаризовать исходные уравнения Эйлера, описывающие течение.

2. Пусть уравнение линии тока, разделяющей области 1 и 2 имеет вид  $Y_{12} = d(X)$ . Проведем обезразмеривание всех длин, входящих в задачу, по характерному размеру  $l = O(H)$ , выбрав  $l = d_\infty/\tau$

$$X = lx, \quad Y = ly, \quad d(X) = \tau l h(x), \quad h(x) = O(1)$$

где  $h(x)$  — безразмерная форма границы струй, причем из выбора  $l$  следует, что  $h(x) \rightarrow 1$  при  $x \rightarrow -\infty$ .

Представив потенциал скорости  $\Phi_1$  в области 1 в виде

$$\Phi_1(X, Y) = u_{1\infty} l (x + \tau \varphi_1(x, y) + \dots)$$

получим обычное линеаризованное уравнение для потенциала скоростей возмущения  $\varphi_1$

$$\beta^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} = 0, \quad \beta^2 = M_{1\infty}^2 - 1 \quad (2.1)$$

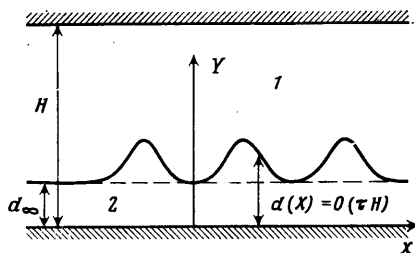
Граничные условия непротекания, поставленные для верхней стенки канала при  $y = H/l$  и на разделяющей линии тока  $y = \tau h(x)$ , при  $\tau \ll 1$  могут быть записаны в виде

$$\partial \varphi_1 / \partial y = 0 \quad (y = H/l), \quad \partial \varphi_1 / \partial y = h'(x) \quad (y = 0) \quad (2.2)$$

где штрих обозначает дифференцирование.

Запишем общее решение уравнения (2.1)

$$\varphi_1(x, y) = f(x - \beta y) + g(x + \beta y)$$



Фиг. 1

Использование граничных условий (2.2) приводит к следующим соотношениям для функций  $f$  и  $g$ :

$$\begin{aligned} f'(x-\Delta/2) - g'(x+\Delta/2) &= 0, \quad \Delta = 2\beta H/l \\ -f'(x) + g'(x) &= h'(x)/\beta \end{aligned} \quad (2.3)$$

Проинтегрировав систему (2.3) с учетом того, что для невозмущенного течения при  $x \rightarrow -\infty$ ,  $f(x) = g(x) = 0$  и  $h(x) = 1$ , получим

$$F(x-\Delta) - F(x) = h(x) - 1, \quad F = \beta f \quad (2.4)$$

Используя интеграл Бернулли, можно определить величину давления в области 1

$$\frac{p_1}{p_\infty} = 1 - \tau \frac{\rho_{1\infty} u_{1\infty}^2}{p_\infty} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x} \quad (2.5)$$

Рассмотрим теперь течение в дозвуковой области потока 2. В связи с тем что ее характерный продольный размер  $l$  по порядку величины больше поперечного, перепад давления поперек области пренебрежимо мал. Из условия непрерывности давления на разделяющей линии тока следует, что в дозвуковой струе распределение давления  $p_2$  по продольной координате должно описываться формулой (2.5) при  $y = \tau h(x)$ , т. е. с учетом того, что  $\tau \ll 1$ ,  $p_2$  может быть представлено в виде

$$p_2/p_\infty = 1 - \frac{\tau}{\beta} \frac{\rho_{1\infty} u_{1\infty}^2}{p_\infty} (F'(x) + F'(x-\Delta)) \quad (2.6)$$

Запишем интеграл Бернулли, а также условия изэнтропичности течения и постоянства расхода в области 2 для размерных величин  $u_2(X)$ ,  $\rho_2(X)$ ,  $p_2(X)$

$$\begin{aligned} \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{u_2^2}{2} &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p_\infty}{\rho_{2\infty}} + \frac{u_{2\infty}^2}{2}, \quad \frac{p_2}{\rho_2^\gamma} = \frac{p_\infty}{\rho_{2\infty}^\gamma} \\ \rho_2 u_2 (d - Y_w) &= \rho_{2\infty} u_{2\infty} d_\infty, \quad Y_w(X) = \tau l y_w(x) \end{aligned} \quad (2.7)$$

где  $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей, а  $Y_w(X)$  — уравнение нижней поверхности канала. Подставляя выражение для давления (2.6) в (2.7) и исключая из системы уравнений  $u_2$  и  $\rho_2$ , получим

$$\frac{2\tau}{\beta} \frac{\rho_{1\infty} u_{1\infty}^2}{\rho_{2\infty} u_{2\infty}^2} (F'(x) + F'(x-\Delta)) = (h(x) - y_w(x))^{-2} - 1 \quad (2.8)$$

Следует заметить, что такой же результат получится, если считать, что  $\rho_2 = \rho_{2\infty}$ . Действительно, вспомнив оценку (1.1) для числа  $M_{2\infty}$ , а именно  $M_{2\infty} = O(\tau^{1/2})$ , легко увидеть, что в главном приближении в области 2 среду можно считать несжимаемой.

Вводя обозначение  $\delta(x) = h(x) - y_w(x)$  для безразмерной толщины дозвуковой струи и определив окончательно малый параметр  $\tau$  как

$$\tau = \frac{\beta}{2} \frac{\rho_{2\infty} u_{2\infty}^2}{\rho_{1\infty} u_{1\infty}^2} \quad (2.9)$$

запишем уравнения (2.4) и (2.8) в виде

$$\begin{aligned} F'(x) + F'(x-\Delta) &= 1/\delta^2 - 1 \\ F(x) - F(x-\Delta) &= 1 - \delta - y_w \end{aligned} \quad (2.10)$$

Единственный параметр подобия  $\Delta$ , входящий в (2.10), оказывается непосредственно связанным с упоминавшимся выше интегралом  $L$ . Дейст-

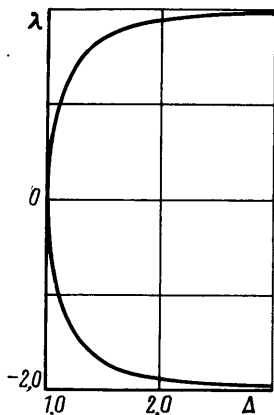
вительно, используя (1.1) и (2.9), можно получить, что

$$L = \int_0^H \left( \frac{1}{M_\infty^2} - 1 \right) dy = \frac{\beta l}{2M_{1\infty}^2} (1 - \Delta)$$

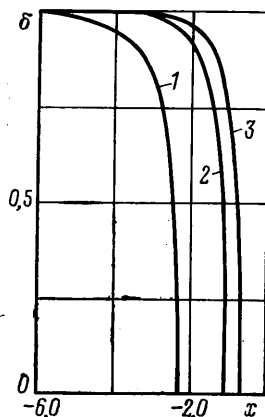
Таким образом, величина параметра  $\Delta$  определяет степень закритичности течения. В частности, при  $\Delta > 1$  ( $L < 0$ ) исходный поток является закритическим, а при  $\Delta < 1$  ( $L > 0$ ) — докритическим.

3. В дальнейшем будем рассматривать самоиндуцированные возмущения течения в канале с прямолинейной нижней стенкой, т. е. при  $y_w(x) = 0$ .

При этом система (2.10) имеет тривиальное решение  $F(x) \equiv 0$ ,  $\delta(x) \equiv 1$ , соответствующее невозмущенному исходному потоку. Анализ асимптоти-



Фиг. 2



Фиг. 3

ки поведения решения системы (2.10) при  $x \rightarrow -\infty$  позволяет установить возможность экспоненциального отхода от тривиального решения

$$F(x) = C \exp(\lambda x) + \dots, \quad \delta = 1 - C(\exp(\lambda x) - \exp[\lambda(x - \Delta)]) + \dots \quad (3.1)$$

где  $C$  — произвольная константа, а собственное число  $\lambda$  удовлетворяет соотношению

$$\exp(-\lambda \Delta) = \frac{2 - \lambda}{2 + \lambda} \quad (3.2)$$

Решение уравнения (3.2) представлено на фиг. 2 в виде зависимости  $\lambda(\Delta)$ . Заметим, что при  $\Delta \rightarrow 1$  (это соответствует переходу к докритическому течению)  $\lambda \rightarrow 0$ , т. е. область распространения возмущений по продольной координате неограниченно растет в масштабах ширины канала, а при  $\Delta < 1$  решений нет. При  $\Delta > 1$  существует два симметричных решения  $\pm \lambda(\Delta)$ . Положительные значения собственного числа  $\lambda$  определяют решения, затухающие к невозмущенному вверх по потоку решению при  $x \rightarrow -\infty$ . Отрицательные значения  $\lambda$  соответствуют возможному затуханию возмущений вниз по течению при  $x \rightarrow +\infty$ .

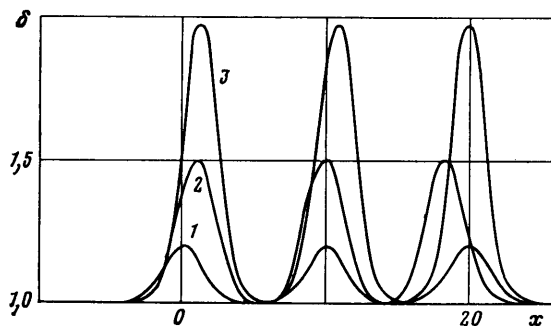
Существует групповое преобразование, позволяющее исследовать обе указанные возможности единым образом. Действительно, если произвести замены

$$x = -z + \Delta, \quad F(t) = -\Phi(-t)$$

то вид системы (2.10), записанной для  $\Phi(z)$ , останется неизменным.

Уравнения (2.10) с условиями (3.1), поставленными при  $x \rightarrow -\infty$  (т. е. при положительных  $\lambda$ ), были исследованы численно. Изменение ве-

личины константы  $C$  соответствует простому сдвигу интегральных кривых по продольной координате. В расчетах было принято  $|C|=1$ . Было обнаружено, что выбор знака  $C$  определяет два различных типа поведения решения  $\delta(x)$ . В случае  $C=-1$  решение имеет особую точку, в которой  $\delta(x)$  обращается в нуль, что соответствует «схлопыванию» дозвуковой струи. Этот случай проиллюстрирован на фиг. 3, где график  $\delta(x)$  представлен при различных значениях параметра  $\Delta$ . Индексами 1–3 обозначены интегральные кривые для  $\Delta=1,2; 1,5; 2$  соответственно. При  $C=1$  функция  $\delta(x)$  имеет колебательный характер. Интегрирование системы (2.13) до больших значений координаты  $x$  показало, что «период» колебаний незна-



Фиг. 4

чительно уменьшается с увеличением  $x$ , а амплитуда остается практически постоянной. Поведение  $\delta(x)$  на начальном участке расчета представлено на фиг. 4. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что при  $\Delta \rightarrow 1$ , т. е. при подходе течения к докритическому состоянию, амплитуда нелинейных самоиндуцированных возмущений стремится к нулю.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Crocco I. Consideration of the shock-boundary layer interaction.— Proc. Conf. on High-Speed Aeronautics. Brooklin, 1955, p. 75–113.
2. Нейланд В. Я. Сверхзвуковое течение вязкого газа вблизи точки отрыва.— В кн.: 3-й Всесоюз. съезд по теорет. и прикл. механике, Москва, 1968. М.: Наука, 1968, с. 224.
3. Нейланд В. Я. К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1969, № 4, с. 53–57.
4. Stewartson K., Williams P. G. Self-induced separation.— Proc. Roy. Soc. London, A., 1969, v. 312, № 1509, p. 181–206.
5. Нейланд В. Я. Особенности отрыва пограничного слоя на охлаждаемом теле и его взаимодействие с гиперзвуковым потоком.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 6, с. 99–109.
6. Нейланд В. Я. К теории взаимодействия гиперзвукового потока с пограничным слоем для отрывных двумерных и пространственных течений.— Уч. зап. ЦАГИ, 1974, 5, № 2, с. 70–79.
7. Тиговская Т. В. Распространение малых возмущений при взаимодействии невязких струй.— Уч. зап. ЦАГИ, 1984, т. 15, № 3, с. 127–131.
8. Тиговская Т. В. Асимптотическая теория взаимодействия закритического пограничного слоя с гиперзвуковым потоком газа.— Уч. зап. ЦАГИ, 1983, т. 14, № 3, с. 44–50.
9. Тиговская Т. В. Распространение возмущений в закритическом пограничном слое.— В сб.: Матем. методы тепломассопереноса. Днепропетровск, 1983, с. 171–175.

Москва

Поступила в редакцию  
26.VII.1984