

УДК 532.592

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ АНАЛОГ ТРОХОИДАЛЬНЫХ ВОЛН ГЕРСТНЕРА

ИНОГАМОВ Н. А.

Данная работа посвящена исследованию изобарических движений, при которых значения давления сохраняются в жидких частицах. В ней получено новое аналитическое, точное, частное решение нелинейных неоднородных уравнений гидродинамики, которое описывает трохоидаальную волну в цилиндрической геометрии, а также доказано, что трохоидаальные волны в цилиндрической и плоской геометриях исчерпывают класс нелинейных изобарических движений. Здесь и далее волной в плоской геометрии будет называться волна в однородном поле тяжести, характеризующаяся волновым вектором k . Разумеется, волны и в плоской и в цилиндрической геометрии являются плоскими движениями, так как жидкие частицы при движении фиксированы в плоскости и движения в параллельных плоскостях одинаковые.

Трохоидаальная волна в цилиндрической геометрии представляет интерес, поскольку описывает часто встречающуюся в приложениях ситуацию с нелинейной волной на поверхности полости во вращающейся жидкости.

Трохоидаальная волна в плоской геометрии открыта Герстнером в 1802 г. [1] и независимо от него в 1863 г. Ранкиным. Этот результат относится к числу классических [2–7]. Трохоидаальная волна в плоской геометрии представляет собой единственное известное точное аналитическое решение в теории нелинейных волн на поверхности тяжелой жидкости.

Кибель [6] (см. также работу Кочина [7]) доказал, что единственным а) стационарным движением, б) в однородном поле тяжести, в) с изобарами, совпадающими с линиями тока, является трохоидаальная волна в плоской геометрии. Разница между утверждением работы [6] и теоремой, доказанной в п. 2, заключается в том, что в последней сняты ограничения а), б). Подчеркнем, что именно отказ от ограничения б) приводит к появлению трохоидаальных волн в цилиндрической геометрии.

Точные решения могут быть, как обычно, использованы для тестирования двумерных численных расчетов. Отметим, что на трохоидаальных волнах основана важная для судостроения теория качки кораблей на волнении, созданная Крыловым [2].

1. Рассмотрим трохоидаальные волны в цилиндрической геометрии. Детальное описание волн в плоской геометрии имеется в [1–7]. Приведем основные уравнения. Динамическое уравнение и интеграл уравнения неразрывности в несжимаемой жидкости в случае плоских движений имеют вид (1.1) и (1.2) соответственно

$$\ddot{z} - g = i \frac{z_a' p_b' - z_b' p_a'}{\rho_0 \Delta_0} \quad (1.1)$$

$$\rho(a, b, t) = \rho_0, \quad \Delta = \Delta_0 \quad (1.2)$$

$$\Delta = \text{Im}(z_a^* z_b') \quad (1.3)$$

$$z = z(a, b, t) = x(a, b, t) + iy(a, b, t) = R(a, b, t) \exp[i\theta(a, b, t)]$$

$$\dot{z} = \frac{\partial z(a, b, t)}{\partial t}, \quad g = g_x + ig_y, \quad z_a' = \frac{\partial z(a, b, t)}{\partial a}$$

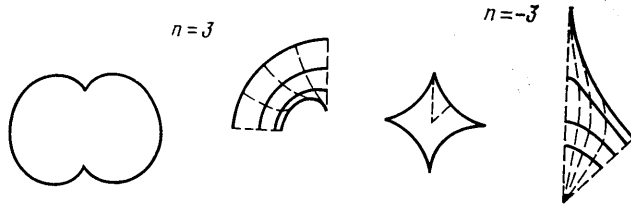
$$\rho_0 = \rho(a, b, 0), \quad \Delta_0 = \Delta(a, b, 0), \quad z^* = x - iy$$

$$\Delta = \Delta(a, b, t) = \det D(a, b, t)$$

$$D_{11} = x_a', \quad D_{12} = x_b', \quad D_{21} = y_a', \quad D_{22} = y_b'$$

где a, b — лагранжевы координаты, g_x, g_y — x - и y -компоненты g .

В случае несжимаемой жидкости уравнения (1.1), (1.2) образуют замкнутую систему для неизвестных функций z и p . В случае однородной жидкости нетрудно исключить давление из этой системы уравнений



и получить два действительных уравнения (1.2), (1.4) для функции $z = x + iy$

$$\operatorname{Re}(\dot{z}_a' z_b^* - z_a^* \dot{z}_b') = \eta_0 \Delta_0, \quad \eta_0 = \eta(a, b, 0) \quad (1.4)$$

$$\eta = \eta(a, b, t) = (\operatorname{rot} v)_z = \Delta^{-1} \operatorname{Re}(\dot{z}_a' z_b^* - z_a^* \dot{z}_b') \quad (1.5)$$

Уравнение (1.4) представляет собой интеграл закона «вмороженности» завихренности $\eta = 0$.

В случае плоских (т. е. частицы при движении фиксированы в плоскости, перпендикулярной образующим цилиндрической поверхности жидкой пленки) движений бесконечно тонкой пленки уравнение (1.1) вырождается в

$$\ddot{z} - g = -i \frac{\Delta p}{\sigma_0} \frac{z_a'}{z_{0a}} \quad (1.6)$$

где Δp — разность давлений по разные стороны пленки, $\sigma_0 = \sigma(a, 0)$ — начальная поверхностная плотность, a — лагранжева координата, $z_0 = z(a, 0)$. Уравнение (1.6) подробно исследовано в [8–10].

Покажем, что решениями уравнений (1.1), (1.2) соответственно в случаях цилиндрической и плоской геометрий будут

$$z = A \xi e^{i\omega t} + A_1 (\xi^*)^{-n} e^{i\omega_1 t}, \quad \xi = a e^{ib} \quad (1.7)$$

$$z = \xi + A e^{i(k\xi^* + \omega t)}, \quad \xi = a + ib \quad (1.8)$$

Здесь A, A_1 — комплексные постоянные, k, ω, ω_1 — действительные числа, n — целое, не равное 0 и 1. Подставим (1.7) и (1.8) в формулы (1.3), (1.5) для Δ и η , соответственно получим

$$\Delta = \Delta(a) = |A|^2 a - |A_1|^2 n^2 a^{-2n-1}$$

$$\eta \Delta = |A|^2 2\omega a - |A_1|^2 2n^2 \omega_1 a^{-2n-1}$$

$$\Delta = \Delta(b) = 1 - |A|^2 k^2 e^{2kb}, \quad \eta \Delta = -|A|^2 2\omega k^2 e^{2hb}$$

Следовательно, (1.7) и (1.8) являются решениями уравнений несжимаемости (1.2) и «вмороженности» завихренности (1.4).

Рассмотрим более подробно случай цилиндрической трохoidalной волны (1.7). Следует разделять случаи $n > 0$ и $n < 0$. При $n > 0$ ($n < 0$) жидкость в лабораторной системе координат в окрестности $|z| = \infty$ ($|z| = 0$) вращается как целое с угловой скоростью, равной ω . Фазовая угловая скорость вращения волны в лабораторной системе координат равна $\omega_s = (\omega - \omega_1)/(n - 1)$.

Рассмотрим вращающуюся систему координат, связанную с волной. Стационарные линии тока в случае $n > 0$ ($n < 0$) представляют собой укороченные эпициклоиды (укороченные гипоциклоиды) (см. фигуру). Существует предельная линия тока, которая является эпициклоидой (гипоциклоидой). Предельная линия тока имеет $|n-1|$ заострений (точек возврата). На фигуре показано мгновенное положение сетки лагранжевых переменных ξ на плоскости z . Сплошные — образы линий $|\xi| = \text{const}$, штриховые — образы лучей $\arg \xi = \text{const}$. В связанной с волной системе координат сплошные — линии тока. Сетка вычислена при следующих координатах узлов (a_k, b_j):

$$a_k = |\xi_c| q^{\pm k}, \quad b_j = 2\pi(j-1)/2|n-1|$$

где $q = \sqrt[n]{e}$, $e = 2,718 \dots$ — число e , верхний (нижний) знак соответствует $n > 0$ ($n < 0$), $k = 0, 1, 2, 3$; $j = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$. Волны с $n < 0$ могут существовать, если имеется гравитационное поле с вектором ускорения свободного падения, линейно зависящим от радиуса и направленным по радиусу к центру.

Подробное описание замечательных таутохронного (кривая колебаний в поле тяжести с постоянным периодом) и брахистохронного (кривая быстрого спуска в поле тяжести) свойств циклоиды и геометрическое описание вместе с любопытной исторической справкой можно найти в [11].

На предельной линии тока скорость в системе координат, связанной с волной, обращается в нуль в заострении. Заострения эпициклоиды направлены внутрь, гипоциклоиды — наружу. Заострения находятся на радиусе $R_c = |z_c| = |1 - 1/n| |A \xi_c|$, где $|\xi_c|^{n+1} = |n A_1 / A|$, формула пригодна при произвольных $n \neq 0, \pm 1$. Образы линий тока на плоскости ξ представляют собой концентрические окружности: $|\xi| = a = \text{const}$. Значения постоянных ограничены при $n > 0$ ($n < 0$) снизу (сверху) величиной, равной $a_c = |\xi_c| = |n A_1 / A|^{1/(n+1)}$. Окружность $|\xi| = |\xi_c|$ представляет собой образ на плоскости ξ предельной линии тока. На предельной линии тока имеем $\Delta(a_c) = 0, \eta(a_c) = 0$.

Перейдем во вращающуюся систему координат, связанную с волной

$$\begin{aligned} z_s &= z \exp[-i\omega_s t] = A \xi \exp[i(\omega - \omega_s) t] + A_1 (\xi^*)^{-n} \exp[i(\omega_1 - \omega_s) t] = \\ &= A a \exp\left[i \left(b - \frac{\omega - \omega_1}{n-1} t \right) \right] + \frac{A_1}{a^n} \exp\left[i n \left(b - \frac{\omega - \omega_1}{n-1} t \right) \right] \end{aligned}$$

Рассмотрим множество точек на плоскости z_s и их образы на плоскости ξ . Все образы точек равномерно вращаются в ξ -пространстве с угловой скоростью, равной $\omega_* = (\omega - \omega_1)/(n-1)$. Отсюда следует, что полный оборот стационарной линии тока лагранжева частица совершает за период, равный $2\pi/\omega_*$, и период этот один и тот же для всех линий тока.

В случае $n = -1$ линии тока — подобные эллипсы. Предельная линия тока отсутствует.

Рассмотрим случай волны в плоской геометрии (1.8). При $k > 0$ в лабораторной системе координат частицы на большой глубине $y \rightarrow -\infty$ покоятся. Фазовая скорость волны в этой системе координат равна $v_s = -\omega/k$. Рассмотрим систему координат, связанную с волной. Стационарные линии тока представляют собой укороченные циклоиды. Существует предельная циклоидальная линия тока. При $k > 0$ заострения направлены вверх (в положительном направлении оси y), $y_c = (1 - \ln |kA|)/k$ — координата заострений. Образы стационарных линий тока на плоскости ξ представляют собой прямые $b = \text{const}$. Значения этих постоянных ограничены при $k > 0$ сверху величиной, равной $b_c = -\ln |kA|/k$, соответствующей предельной линии тока.

2. Докажем, что изобарические трохоидальные волны в плоской и цилиндрической геометриях исчерпывают класс нелинейных движений, при которых значения давления сохраняются в лагранжевых координатах. Здесь и далее под трохоидальными волнами без уточнения геометрии понимается совокупность волн в цилиндрической и плоской геометриях.

Ниже будут представлены формулы для распределения давления в трохоидальных волнах. Из этих формул будет ясна разница между изо-

барической и неизобарической волнами. В плоской геометрии имеем [2]

$$h = \left(\frac{\omega^2}{k} + \operatorname{Im} g \right) \operatorname{Im} w + \frac{\omega^2 |w|^2}{2} + a \operatorname{Re} g + b \operatorname{Im} g + \operatorname{Re} g \operatorname{Re} w + f(t)$$

$$w = A e^{i(kx + \omega t)}$$

где $h = p/\rho$. Предполагается, что жидкость однородная, $\operatorname{Re} g$, $\operatorname{Im} g$ — соответственно x - и y -компоненты ускорения. В случае $g = -i|g|$ имеем с точностью до произвольной однородной функции времени

$$h = \left(\frac{\omega^2}{k} - |g| \right) \operatorname{Im} w + \frac{\omega^2 |w|^2}{2} - b |g|$$

Изобарическую волну в плоской геометрии получаем при $k > 0$ и $\omega^2 = |g|k$, при этом $h = h(b)$. Изобарическая волна представляет интерес, поскольку удовлетворяет обычному в теории волн свободному краевому условию. Остальные решения, соответствующие значениям ω^2 и g , не связанным условием $\omega^2 = |g|k$, требуют специального краевого условия: давление должно заданным образом изменяться вдоль стационарной линии тока. Эти последние решения будем называть неизобарическими трохoidalными волнами.

В случае цилиндрической волны имеем при $g = 0$ (решение нетрудно обобщить на случай, когда $g \propto r$) следующее распределение давления:

$$h = \frac{|A|^2 \omega^2 a^2}{2} + \frac{|A_1|^2 \omega_1^2}{2a^{2n}} + \frac{\omega_1^2 - n\omega^2}{1-n} |AA_1| a^{1-n} \times$$

$$\times \cos[(n-1)b + (\omega_1 - \omega)t + \delta_1 - \delta]$$

где δ , δ_1 — фазы комплексных постоянных A , A_1 соответственно. Изобарическую цилиндрическую волну получаем при $n > 0$ и $\omega_1^2 = n\omega^2$.

В случае движений с «вмороженными» изобарами лагранжевы координаты удобно выбрать так, чтобы образы линий $a = \text{const}$ совпадали с изобарами. При этом уравнение (1.1) преобразуется к виду

$$\ddot{z} = -i h_b' z_a' / \Delta \quad (2.1)$$

Докажем, что не существует еще каких-либо нетривиальных движений, принадлежащих к классу изобарических, кроме найденных выше, т. е. движение $z = z(a, b, t)$ является изобарическим, удовлетворяет условию (2.2) и условию взаимно однозначного соответствия (2.3) тогда и только тогда, когда является изобарической трохoidalной волной

$$\operatorname{Im} (z_a^* z_b') \neq 0 \quad (2.2)$$

$$z \neq \xi \quad (2.3)$$

Общее решение уравнения (2.1) имеет вид

$$z = Aw + \sum_k z_k \quad (2.4)$$

$$w = \chi - \frac{it^2}{2}, \quad \chi_a' = \frac{\Delta}{h_b'}, \quad z_k = T_k e_k$$

$$T_k = A_k e^{\sigma_k t} + B_k e^{-\sigma_k t}, \quad e_k = e^{\theta_k}$$

$$\theta_k = -\sigma_k^2 \varphi_k + i \sigma_k^2 \Phi, \quad \sigma_k = \sigma_k(b), \quad \varphi_k = \varphi_k(b)$$

$$\Phi = \Phi(a, b) = (h_b')^{-1} \int_{a_1}^a \Delta(a_2, b) da_2$$

где A , A_k , B_k — комплексные постоянные, $\sigma_k(b)$, $\varphi_k(b)$ — произвольные комплексные функции b , $\Phi(a, b)$ — действительная функция. Подставим

(2.4) в уравнение (1.2), после довольно длинных вычислений приводим (1.2) к следующему виду:

$$h_b' = |A|^2 \operatorname{Im} w_b' - \sum_k \operatorname{Re}[A w_b' (\sigma_k^2 z_k)^* + i A^* Q_k \sigma_k^2 z_k] - \sum_k |\sigma_k^2 z_k|^2 (\operatorname{Re} Q_k) - \sum_{k>j} \operatorname{Re}[\theta_j (\sigma_j^2 z_j) (\sigma_k^2 z_k)^* + \theta_k (\sigma_j^2 z_j)^* (\sigma_k^2 z_k)] \quad (2.5)$$

где вместо θ_k использовано обозначение $Q_k = \sigma_k^{-2} \partial \theta_k / \partial b$. Если исключить тривиальные случаи гидростатического равновесия, дифференциального вращения вокруг оси и движения как целого, то зависимость от времени в правой части (2.5) устраняется тогда и только тогда, когда

$$Q_k = i w_b^*, \quad Q_k = -Q_j^* \quad (2.6)$$

Из (2.6) следует, что при $A \neq 0$: 1) сумма по k может содержать только один член, 2) $\sigma_k = i \omega_k$, ω_k — действительное число, 3) пусть единственный член в сумме по k соответствует значению индекса $k=1$. Только одна константа из пары констант (A_1, B_1) отлична от нуля.

Действительно, при нарушении условий 1)–3) получаем $\operatorname{Re} Q_k = 0$, $\operatorname{Im} w_b' = 0$, откуда следует, что $\operatorname{Im}(z_a^* z_b') = 0$, т. е. получаем отображение в бесконечную тонкую жидкую пленку. Заметим, что если снять требование (2.2), то разложение (2.4) дает общее решение задачи о движении жидкой пленки, т. е. дает общее решение уравнения (1.6) [8–10].

Остается доказать, что ω_k не зависит от b , т. е. дифференциальное вращение недопустимо. Случай с $A \neq 0$ соответствует изобарической трохoidalной волне в плоской геометрии. Из условий 1)–3) следует, что разложение (2.4) содержит только два члена. Первый член соответствует ускорению как целое, второй член обозначим просто z , опустим индекс k . Из уравнений (2.6) остается только одно уравнение: $Q = i w_b^*$. Так как $Q = \sigma^{-2} \partial \theta / \partial b$, $\sigma = i \omega$, $\theta = i \sigma^2 \Phi - \sigma^2 \varphi$, получим

$$[\beta(i\Phi - \varphi)]_b' = i \beta w_b^* \quad (\omega^2 = \beta) \quad (2.7)$$

Подставим в (2.7) $w = \chi - it^2/2$, после некоторых преобразований имеем

$$\beta \Phi_b' + \beta_b' \Phi + i(\beta \varphi)_b' = \beta \chi_b^* \quad (2.8)$$

$$\chi = \frac{1}{h_b'} \int_a^a \Delta da_2, \quad \Phi = \frac{1}{h_b'} \int_{a_1}^a \Delta da_2 \quad (2.9)$$

Функции χ и Φ различаются на некоторую произвольную функцию b . Только эта функция от b может быть комплексной функцией; зависящая от a часть в (2.9) является действительной функцией. Следовательно, в выражении $\chi^* = \operatorname{Re} \chi - i \operatorname{Im} \chi$ только функция $\operatorname{Re} \chi$ зависит от переменной a . Поэтому разность $\beta \Phi_b' - \beta \chi_b^*$, входящая в уравнение (2.8), может быть комплексной функцией только от b . Перепишем уравнение (2.8) следующим образом:

$$\beta_b' \Phi + i(\beta \varphi)_b' = \beta \chi_b^* - \beta \Phi_b' \quad (2.10)$$

Правая часть в (2.10) зависит только от b . В левой части второе слагаемое также зависит только от b . А вот первое слагаемое в левой части (2.10) обязательно зависит от a . Значит, $\beta_b' = 0$, откуда следует, что $d\omega/db = 0$. Что и требовалось доказать.

Рассмотрим случай, когда $A = 0$ в разложении (2.4) соответствует цилиндрической изобарической трохoidalной волне. Действительно, в случае $A = 0$ из уравнений (2.6) остается только второе уравнение, из которого следует, что: 1) в сумме по k могут быть только два слагаемых,

2) $\sigma_k = i\omega_k$, 3) только по одной из констант в каждой паре (A_1, B_1) и (A_2, B_2) отличны от нуля.

Остается доказать, что ω_1, ω_2 не зависят от b . Имеем $Q_1 = -Q_2^*$. Обозначим $\omega_{1,2}^2 = \beta_{1,2}$. Уравнение $Q_1 = -Q_2^*$ перепишем в виде

$$\frac{(\beta_1 \Phi_1)_b' - i\beta_{1b}' \Phi}{\beta_1} = \frac{(\beta_2 \Phi_2^*)_b' + i\beta_{2b}' \Phi}{\beta_2} \quad (2.11)$$

Поскольку $\beta_{1,2}, \Phi_{1,2}$ — функции b , и только Φ зависит от a , то требуется, чтобы $\beta_{1b}'/\beta_1 = \beta_{2b}'/\beta_2$, откуда следует, что $\beta_1 \propto \beta_2$.

Интегрируя (2.12) при этом условии, получаем $\Phi_1 = -\Phi_2^*$, откуда следует, что

$$z = \xi e^{i\omega(b)t} + |A| (\xi^*)^{-n} e^{i\sqrt{n}\omega(b)t} \quad (2.12)$$

Напомним, что в изобарической трохоидальной волне имеем $n > 0$. Движение (2.12) удовлетворяет всем условиям теоремы, кроме, быть может, условия (2.3). Проверим выполнение условия (2.3). При движении (2.12) это условие нарушается — возникают пересечения. Последнее утверждение завершает доказательство теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Franz von Gerstner J. Theorie der Wellen Sammt einer abgeleiteten Theorie der Deichprofile.— Gilbert's Annal. Phys., 1809, v. 32, p. 412—445.
2. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
3. Ламб Г. Гидродинамика. М.—Л.: Гостехиздат. 1947. 928 с.
4. Милл-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. М.: Мир, 1964. 655 с.
5. Dureil-Jacotin M. L. Sur les ondes de type permanent dans les liquides hétérogènes.— Rendiconti Accad. dei Lincei. Roma, 1932, v. 15 (6), p. 814—819.
6. Кибель И. А. О некоторых плоских движениях тяжелой сжимаемой жидкости.— В сб.: Прикладная математика и механика. Т. 1. Л.: Гостехиздат, 1933, с. 51—55.
7. Кочин Н. Е. Собр. соч. Т. 2. М.—Л.: Изд-во АН СССР, 1949, с. 80—85.
8. Ott E. Nonlinear evolution of the Rayleigh—Taylor instability of a thin layer.— Phys. Rev. Lett., 1972, v. 29, № 20, p. 1429—1431.
9. Башинлов Ю. А., Покровский С. В. Тейлоровская неустойчивость тонкой цилиндрической оболочки.— Письма в ЖЭТФ, 1976, т. 23, вып. 8, с. 462—466.
10. Иногамов Н. А. Модельный анализ тейлоровской неустойчивости оболочек.— Письма в ЖТФ, 1977, т. 3, вып. 7, с. 314—318.
11. Берман Г. Н. Циклоида. М.: Наука, 1980. 113 с.

Москва

Поступила в редакцию
22.XI.1983