МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 5 • 1985

УДК 532.546

ОБ ОСРЕДНЕНИИ ЭВОЛЮЦИОННЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ФИЛЬТРАЦИОННОГО ПЕРЕНОСА

ИНДЕЛЬМАН П. В., ШВИДЛЕР М. И.

Эффективное описание фильтрационного переноса в нерегулярных пористых средах связано с трактовкой полей пористости и проницаемости как случайных функций пространственных координат и осреднением стохастической системы уравнений переноса, содержащих эти функции (законов сохранения, закона Дарси, замыкающих соотношений). Задача осреднения состоит в нахождении соотношений для функционалов от искомых и заданных полей – средних, моментов, плотностей распределения и т. д. При этом наибольший интерес представляет осредненное описание, при котором уравнения для функционалов инвариантны к некоторому множеству условий, определяющих процесс в рамках такого описания единственным образом. Например, в эволюционных задачах целесообразно получить соотношения для средних полей, инвариантные к начальным условиям и, следовательно, описывающие некоторый класс процессов переноса. В задачах стационарного переноса интересны соотношения для средних полей, инвариантные к краевым условиям и плотности распределенных источников. В этих случаях полученные соотношения естественно использовать в качестве уравнений, для которых могут быть поставлены соответствующие (краевые, начально-краевые) задачи.

Примеры приближенного осреднения задач фильтрационного переноса и те немногочисленные задачи, для которых известны точные результаты, приведены в [1]. Задачи осреднения эволюционных уравнений фильтрационного переноса исследовались в работах [2, 3].

Ниже рассматривается задача об осреднении простейших одномерных эволюционных уравнений фильтрационного переноса, получен ряд точных функциональных уравнений, соответствующих распределениям случайных параметров специального вида. В некоторых случаях функциональные уравнения удается локализовать и свести к дифференциальным уравнениям достаточно высокого порядка. В первой части статьи (п. 1–6) рассматривается процесс фильтрационного переноса нейтральной примеси. Используется функциональный подход и техника расщепления корреляций, излагаемая в [4]. Во второй части изучается процесс фильтрационного переноса двух несмешивающихся несжимаемых жидкостей в рамках модели Баклея – Леверетта. Приводится линейное уравнение для совместной плотности вероятностей решения стохастического квазилинейного уравнения переноса и его производной. Получена бесконечная цепочка уравнений для моментов решения. Предложена схема приближенного замыкания и дано сопоставление решения приближенных уравнений для средней концентрации с точно осредненной концентрацией.

1. Распределение концентрации $C(t, x)$ при одномерном переносе нейтральной примеси в области $t\geqslant 0$, $|x|<\infty$ описывается уравнением

$$m\frac{\partial C}{\partial t}+v\frac{\partial C}{\partial x}=0,\qquad C(0,x)=C_0(x) \tag{1.1}$$

где пористость $m(x)$ и скорость $v(t)$ – случайные функции соответственно пространственной переменной x и времени t, $C_0(x)$ – неслучайная функция.

Введем плотность распределения концентрации $\varphi^c(t, x)=\delta[C(t, x)-c]$, которая является функцией c и параметрически зависит от t и x. Как известно, она удовлетворяет уравнению Лиувилля

$$m\frac{\partial \varphi^c(t,x)}{\partial t}+v\frac{\partial \varphi^c(t,x)}{\partial x}=0,\qquad \varphi^c(0,x)=\delta[C_0(x)-c] \tag{1.2}$$

Задача состоит в том, чтобы, усреднив (1.2), получить соотношение для плотности распределения вероятностей $P^c(t, x)=\langle\varphi^c\rangle$. Здесь символ $\langle\cdot\rangle$ означает теоретико-вероятностное осреднение по реализациям полей m и v. Очевидно, что для любого момента поля $C(t, x)$ имеем

$$u_k(t,x)=\langle C^k(t,x)\rangle=\int c^k P^c(t,x)\,dc \quad (k=1,2,\ldots) \tag{1.3}$$

2. Перейдем к осреднению уравнений (1.2), когда $m=\mathrm{const}$ и $v=\mathrm{const}$ — случайные величины, представляющих интерес в связи с задачей о переносе примеси в неоднородной слоистой структуре с невзаимодействующими слоями. Усреднив уравнение (1.2), получим

$$\frac{\partial P^c(t,x)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\langle V\varphi^c(x-Vt)\rangle=0, \qquad V=\frac{v}{m}$$
$$P^c(0,\ x)=\delta[C_0(x)-c] \tag{2.1}$$

Для корреляции в (2.1) можно получить формулу вида [4]

$$\langle V\varphi^c(x-Vt)\rangle=i^{-1}\theta'\left(it\frac{\partial}{\partial x}\right)P^c(t,x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n\frac{K_{n+1}}{n!}\frac{\partial^n P^c}{\partial x^n} \tag{2.2}$$

где $\theta(w)$ — логарифм характеристической функции, а K_n — кумулянты случайной величины V.

Введем стохастический оператор $A=\partial/\partial t+V\partial/\partial x$ так, что $AC(t,\ x)=0$. Тогда, исходя из структуры (2.1) и (2.2), естественно ввести эффективный оператор A_* такой, что $A_*P^c(t,\ x)=0$ и

$$A_*=\frac{\partial}{\partial t}+i^{-1}\theta'\left(it\frac{\partial}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n\frac{K_{n+1}}{n!}\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}=$$
$$=\left[\left\langle \exp\left(-Vt\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\rangle\right]^{-1}\left\langle \exp\left(-Vt\frac{\partial}{\partial x}\right)A\right\rangle \tag{2.3}$$

Уравнение для моментов u_k согласно (1.3) можно записать, например, в следующем виде:

$$A_*u_k=\frac{\partial u_k}{\partial t}+\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n\frac{K_{n+1}}{n!}\frac{\partial^{n+1}u_k}{\partial x^{n+1}}=0, \qquad u_k(0,x)=C_0{}^k(x) \quad (k=1,2,\ldots) \tag{2.4}$$

Таким образом, в общем случае осредненные уравнения имеют первый порядок по времени и бесконечный по пространственной переменной. При этом коэффициенты при производных по пространственной переменной зависят от t. Указанное обстоятельство делает задачу неинвариантной к сдвигу начального момента времени, хотя от начального условия уравнения (2.4) не зависят. Эта неинвариантность связана с тем, что система в момент $t=0$ детерминирована, а при $t>0$ — стохастична.

Полученные выражения позволяют выписать эффективный оператор и осредненное уравнение для любой плотности распределения $p(V)$ случайной величины V, имеющей конечные моменты. При этом можно использовать любое из выражений (2.3). Рассмотрим далее на отдельных примерах, какой вид могут иметь осредненные уравнения.

3. Пусть V принимает конечное число значений, т. е. $p(V)=\sum_{r=1}^{n}p_r\delta(V-$

$-V_r)$. Тогда, вычисляя корреляции в формуле (2.3), получим

$$A_* = \left[\sum_{r=1}^{n} p_r \exp\left(-V_r t\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]^{-1}\left[\sum_{r=1}^{n} p_r \exp\left(-V_r t\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}+V_r\frac{\partial}{\partial x}\right)\right]$$

и осредненное уравнение оказывается нелокальным дифференциально-разностным

$$\sum_{r=1}^{n} p_r\left(\frac{\partial}{\partial t}+2V_r\frac{\partial}{\partial x}\right)u_k(t, x-V_r t)=0 \tag{3.1}$$

Очевидно, что для рассматриваемого случая можно выписать и локальное осредненное уравнение n-го порядка

$$\prod_{r=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial t}+V_r\frac{\partial}{\partial x}\right)u_k(t,x)=0 \tag{3.2}$$

Интересно отметить, что в отличие от (3.1) уравнение (3.2) зависит от значений скоростей V_r и не зависит от вероятностей их появления p_r, которые входят только в начальные условия.

Пусть $V=nV_0$, где V_0 — детерминированная величина, а n распределена по закону Пуассона с параметром λ. Тогда

$$A_* = \frac{\partial}{\partial t}+\lambda V_0 \exp\left(-V_0 t\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}$$

и осредненное уравнение нелокально

$$\frac{\partial u_k(t,x)}{\partial t}+\lambda V_0\frac{\partial u_k(t,x-V_0 t)}{\partial x}=0 \tag{3.3}$$

Если величина V распределена по нормальному закону со средним значением W и дисперсией B, то из (2.3) имеем

$$\frac{\partial u_k(t,x)}{\partial t}+W\frac{\partial u_k(t,x)}{\partial x}=Bt\frac{\partial^2 u_k(t,x)}{\partial x^2} \tag{3.4}$$

Если скорость фильтрации детерминирована, а пористость случайна, то предположение о нормальном законе для m^{-1} теряет физический смысл. Однако при достаточно малых коэффициентах вариации пористости уравнение (3.4) можно рассматривать как приближенное.

Для случая, когда V имеет гамма-распределение: $p_{\gamma,\lambda}(V)=[\lambda^\gamma/\Gamma(\gamma)]\cdot$ $\cdot V^{\gamma-1}\exp(-\lambda V)$ при $V>0$ и $p_{\gamma,\lambda}(V)=0$ при $V<0$, эффективный оператор и осредненное уравнение имеют вид

$$\begin{gathered} A_* = \frac{\partial}{\partial t}+\frac{\gamma}{\lambda}\left(1+\lambda^{-1}t\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial u_k}{\partial t}+W\frac{\partial u_k}{\partial x}+\zeta^2 Wt\frac{\partial^2 u_k}{\partial x\partial t}=0 \\ \gamma/\lambda=W=\langle V\rangle,\quad \gamma^{-1}=\zeta^2=\langle V'^2\rangle W^{-2} \end{gathered} \tag{3.5}$$

Пусть теперь $p(V)$ является «смесью» гамма-распределений $p(V)=\sum_{r=0}^{l}\alpha_r p_{r+\gamma,\lambda}(V)$, $0<\gamma\leqslant 1$, $\sum_{r=0}^{l}\alpha_r=1$. Тогда, используя (2.3), получим выражение для эффективного оператора

$$A_* = \frac{\partial}{\partial t}+\left[(l+\gamma)\left(\lambda+t\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-1}-\sum_{r=1}^{l}\left(\omega_r+t\frac{\partial}{\partial x}\right)^{-1}\right]\frac{\partial}{\partial x} \tag{3.6}$$

где ω_r – корни характеристической функции величины V. Из (3.6) следует дифференциальное уравнение $(l+2)$-го порядка для моментов u_k.

Описанную процедуру осреднения можно обобщить: рассмотрим множество распределений $\{p(V)\}$, таких, что для любого элемента $p(V)$ этого множества существует $\gamma>0$, такое, что функция $p(V)V^{-\gamma}$ принадлежит классу $L_2(0,\infty)$. Тогда функция $p(V)V^{-\gamma}$ разложима в ряд по полиномам Лаггера. Для таких распределений можно получить эффективный оператор типа (3.6), имеющий в общем случае бесконечный порядок.

Несложно получить осредненные дифференциально-разностные уравнения для случаев, когда скорость имеет равномерное или треугольное распределение. Если величина V представима в виде $V=\sum_{r=1}^{l} V_r$, где $\{V_r\}$ – последовательность одинаково распределенных и независимых величин, имеющих одну и ту же характеристическую функцию $\varphi(\omega)$, а l – случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром λ, то эффективный оператор получается из (2.3) заменами функции $\theta'(\omega)$ на функцию $\lambda\varphi'(\omega)$, а кумулянтов K_n – на моменты λM_n.

4. Пусть величина V распределена по закону Коши $p(V)=$ $=\pi^{-1}\lambda[(V-W)^2+\lambda^2]^{-1}$, $\lambda>0$, для которого моменты и кумулянты не ограничены. В этом случае воспользоваться описанным подходом нельзя. Однако, как показано А. И. Шнирельманом, для моментов u_k можно получить дифференциальные уравнения второго порядка эллиптического типа

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial t^2}+2W\frac{\partial^2 u_k}{\partial x\partial t}+(W^2+\lambda^2)\frac{\partial^2 u_k}{\partial x^2}=0$$

для которого ставится задача Дирихле на полуплоскости $t\geqslant 0$. Если $|C_0(x)|<C=\text{const}$, то эта задача имеет единственное и устойчивое решение.

5. Следуя [4], рассмотрим задачу осреднения, когда скорость переноса $V(t)$ есть функция времени. В этом случае имеет место формула, аналогичная (2.2)

$$\langle V(t)F[V(\tau)]\rangle=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\int\ldots\int K_{n+1}(t,\tau_1,\ldots,\tau_n)\times$$
$$\times\left\langle\frac{\delta^n F[V(\tau)]}{\delta V(\tau_1)\ldots\delta V(\tau_n)}\right\rangle d\tau_1\ldots d\tau_n$$

где $K_n(t_1,\ldots,t_n)$ – кумулянтные функции процесса $V(t)$, а осреднению подвергаются вариационные производные функционала $F[V(\tau)]$. Учитывая структуру функционала $\varphi^c(t,x)$, нетрудно вычислить вариационные производные и получить уравнения для плотности распределения вероятностей

$$\frac{\partial P^c(t,x)}{\partial t}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^t\ldots\int K_{n+1}(t,\tau_1,\ldots,\tau_n)\,d\tau_1\ldots d\tau_n\frac{\partial^{n+1}P^c(t,x)}{\partial x^{n+1}}=0 \tag{5.1}$$

В случае дельта-коррелированного процесса $K_{n+1}(t,\ \tau_1,\ldots,\tau_n)=$ $=K^*_{n+1}(t)\delta(t-\tau_1)\delta(\tau_1-\tau_2)\ldots\delta(\tau_{n-1}-\tau_n)$ имеем

$$\frac{\partial P^c(t,x)}{\partial t}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}K^*_{n+1}(t)\frac{\partial^{n+1}P^c(t,x)}{\partial x^{n+1}}=0 \tag{5.2}$$

Пусть $V(t)$ – гауссовский процесс со средним $K_1=\langle V(t)\rangle=W(t)$ и корреляционной функцией $K_2(t,\tau)=B(t,\tau)$. Тогда

$$\frac{\partial P^c(t,x)}{\partial t}+W(t)\frac{\partial P^c(t,x)}{\partial x}=\int_0^t B(t,\tau)\,d\tau\frac{\partial^2 P^c(t,x)}{\partial x^2} \tag{5.3}$$

Если процесс $V(t)$ стационарен, его время корреляции можно определить формулой

$$\varepsilon=(2B_0)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}B(|\tau|)\,d\tau,\qquad B_0=B(0)$$

Тогда при малых временах $t\ll\varepsilon$ уравнение (5.3) переходит в (3.4). Напротив, при $t\gg\varepsilon$ имеем уравнение

$$\frac{\partial P^c(t,x)}{\partial t}+W\frac{\partial P^c(t,x)}{\partial x}=B_0\varepsilon\frac{\partial^2P^c(t,x)}{\partial x^2}$$

Это же уравнение получится из (5.2), если $V(t)$ – дельта-коррелированный стационарный процесс и, следовательно, $K_1^*=W$, $K_2^*(t)=2B_0\varepsilon$.

Рассмотрим на простом примере вопрос об обратимости осредненного описания. Пусть случайная функция $V(t)$ равна V_1 при $0<t<T$ и $-V_1$ при $T<t<2T$, где V_1 – нормально распределенная величина. Тогда, вычисляя интеграл в (5.3), найдем, что осредненное уравнение при $0<t<T$ имеет вид (3.4), а при $T<t<2T$

$$\frac{\partial u_k^1(t,x)}{\partial t}-W\frac{\partial u_k^1(t,x)}{\partial x}=-B(2T-t)\frac{\partial^2u_k^1(t,x)}{\partial x^2}\tag{5.4}$$

Из уравнений (5.4) и (3.4) видно, что процесс обратим, т. е. $u_k(2T-t,x)=u_k^1(t,x)$. Отметим, что задача Коши для уравнения (5.4) некорректна.

Пусть теперь $V(t)=\sum_{i=1}^{n}\xi_ig(t-t_i)$ – пуассоновский процесс. Здесь ξ_i – статистически независимые случайные величины с плотностью распределения $p(\xi)$, точки t_i распределены равномерно на интервале $(0,\ T)$; их число n является случайной величиной, распределенной по закону Пуассона с параметром $n^*=\nu T$, а функция $g(\tau)$ такая, что $g(\tau)=0$ при $\tau<0$. Тогда, следуя [4], получим функциональное уравнение

$$\frac{\partial P^c(t,x)}{\partial t}+\nu\frac{\partial}{\partial x}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t\xi p(\xi)g(t-\tau)P^c\left(t,x-\xi\int_{\tau}^{t}g(\tau_1-\tau)\,d\tau_1\right)d\xi\,d\tau=0\tag{5.5}$$

При $p(\xi)=\delta(\xi-\xi_0)$ и $g(t)=1$ уравнение (5.5) переходит в (3.3) с заменой в последнем λ и W на νt и ξ_0.

Уравнение, аналогичное (5.5), можно получить и для процесса $V(t)=V_0(t)+V'(t)$, где $V_0(t)=\langle V(t)\rangle$, а $V'(t)$ – пуассоновский процесс с $\langle\xi_i\rangle=0$.

Для дельта-коррелированных процессов имеем осредненное уравнение

$$\frac{\partial P^c(t,x)}{\partial t}+\nu P^c(t,x)-\nu\int_{-\infty}^{\infty}p(\xi)P^c(t,x-\xi)\,d\xi=0\tag{5.6}$$

При $p(\xi)=\delta(\xi-\xi_0)$ из (5.6) получим

$$\frac{\partial P^c(t,x)}{\partial t}+\nu[P^c(t,x)-P^c(t,x-\xi_0)]=0$$

Если $p(\xi)$ – экспоненциальное распределение, то из (5.6) следует локализованное уравнение второго порядка

$$\frac{\partial P^c}{\partial t}+\frac{\nu}{\lambda}\frac{\partial P^c}{\partial x}+\frac{1}{\lambda}\frac{\partial^2P^c}{\partial x\partial t}=0$$

аналогичное (3.5), но без множителя t при второй производной, что связано с дельта-коррелированностью процесса.

6. Рассмотрим стохастическое уравнение переноса с диффузией

$$m\frac{\partial C}{\partial t}+v\frac{\partial C}{\partial x}=\varkappa\frac{\partial^2C}{\partial x^2},\quad C(0,x)=C_0(x)\tag{6.1}$$

где m, $\varkappa \geqslant 0$ — неслучайные величины, и пусть для простоты v — случайная величина. Для уравнения (6.1) уже не удается выписать уравнение Лиувилля, не содержащего в явном виде случайную функцию $C(t, x)$. Можно, однако, получить уравнение для $u = \langle C \rangle$, если учесть, что решение уравнения (6.1) имеет вид $C_1(x - Vt, t)$, где $C_1(t, x)$ — решение уравнения (6.1) при $v=0$. Тогда для эффективного оператора получим

$$A_* = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{d}{dt} \ln \left\langle \exp\left(-Vt\frac{\partial}{\partial x}\right)\right\rangle - \varkappa \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

В частности, для нормального закона распределения скорости имеем уравнение

$$m\frac{\partial u}{\partial t} + W_1 \frac{\partial u}{\partial x} = \varkappa_* \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad W_1 = \langle v \rangle$$

с эффективным коэффициентом $\varkappa_* = \varkappa + Bm^{-1}t$, линейно возрастающим со временем. Если скорость v имеет гамма-распределение, то осредненное уравнение примет вид

$$m\frac{\partial u}{\partial t} + W_1 \frac{\partial u}{\partial x} = \varkappa \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \zeta^2 W_1 t \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial t} + \zeta^2 \varkappa W_1 t \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \tag{6.2}$$

Уравнение для средней концентрации можно получить, если коэффициент диффузии является случайной величиной, пропорциональной скорости, т. е. $\varkappa = \varkappa_1 v$. Тогда $C = C(Vt, x)$ и осреднение (6.1) дает

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{K_{n+1}}{n!}(-tA)^n A u = 0, \qquad A = \left(1 - \varkappa_1 \frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial x}$$

Отсюда легко получить уравнения для нормального и гамма-распределений. Аналогичные результаты имеют место, когда скорость — случайная функция времени.

Для задачи осреднения неоднородного уравнения переноса

$$m\frac{\partial C}{\partial t} + v\frac{\partial C}{\partial x} = \gamma(t, x), \qquad C(0, x) = C_0(x) \tag{6.3}$$

где m и v — случайные величины, а $\gamma(t, x)$ — неслучайная плотность источников примеси, осредненное уравнение имеет вид

$$A_* u(t, x) = B_* \gamma(t, x)$$

Эффективный оператор B_* определяется характеристической функцией случайного вектора (V, m^{-1}). В частности, если V имеет гамма-распределение, пористость неслучайна, а $\gamma(t, x) = q(x)$, то, вводя обозначение $\mu = 1 - \zeta^{-2}$, получим осредненные уравнения

$$m\frac{\partial u}{\partial t} + W\frac{\partial u}{\partial x} + \zeta^2 W t \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial t} =$$

$$= \mu^{-1}\left[\left(1 + \zeta^2 W m^{-1} t \frac{\partial}{\partial x}\right)^{\mu} + \mu - 1\right] q(x), \qquad \zeta \neq 1$$

$$m\frac{\partial u}{\partial t} + W\frac{\partial u}{\partial x} + \zeta^2 W t \frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial t} = \left[1 + \ln\left(1 + W m^{-1} t \frac{\partial}{\partial x}\right)\right] q(x), \qquad \zeta = 1$$

7. Рассмотрим задачу Коши для квазилинейного уравнения переноса первого порядка, описывающего процесс фильтрации двух несмешивающихся жидкостей

$$\frac{\partial C(t, x)}{\partial t} + \Psi(t, C)\frac{\partial C(t, x)}{\partial x} = 0, \quad C(0, x) = C_0(x) \tag{7.1}$$

Пусть функции Ψ и C_0 таковы, что задача (7.1) имеет непрерывное и дифференцируемое по переменной x решение. Следуя [4], введем функцию $\Lambda=\partial C/\partial x$ и плотность $\varphi_{t,x}(c,\lambda)=\delta[C(t,x)-c]\,\delta[\Lambda(t,x)-\lambda]$, для которой линейное уравнение Лиувилля и соответствующее начальное условие имеют вид

$$\frac{\partial\varphi_{t,x}}{\partial t}+\Psi\frac{\partial\varphi_{t,x}}{\partial x}=\Psi_c'\lambda\left(3+\lambda\frac{\partial}{\partial\lambda}\right)\varphi_{t,x}$$

$$\varphi_{0,x}(c,\lambda)=\delta[C_0(x)-c]\,\delta[C_0'(x)-\lambda]$$

Пусть $\Psi=V(t)f(C)$, где $V(t)$ — случайная функция времени, а $f(C)$ — детерминированная функция C. Тогда, вводя оператор $A=f\partial/\partial x-f'\lambda(3+$ $+\lambda\partial/\partial\lambda)$, для плотности распределения $P=\langle\varphi_{t,x}\rangle$ имеем задачу

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)!}\int\limits_0^t\ldots\int K_{n+1}(t,\tau_1,\ldots,\tau_n)\,d\tau_1\ldots d\tau_n A^{n+1}P=0 \qquad (7.2)$$

$$P(0,\ x)=P_0(x)=\delta[C_0(x)-c]\,\delta[C_0'(x)-\lambda]$$

Если $V(t)=V$ — случайная величина, то уравнение (7.2) упрощается

$$\frac{\partial P}{\partial t}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n!}K_{n+1}A^{n+1}P=0 \qquad (7.3)$$

В частности, если V имеет гамма-распределение, то

$$\frac{\partial P}{\partial t}+WAP+\zeta^2Wt\frac{\partial}{\partial t}AP=0$$

а для экспоненциального закона, т. е. при $\zeta=1$, имеем

$$Wtf\frac{\partial P}{\partial x}+(1-3Wtf'\lambda)P=Wtf'\lambda^2\frac{\partial P}{\partial\lambda}+P_0(x)$$

Заметим, что $P_0(x)$ зависит от λ. При этом в отличие от линейного случая получить уравнения для моментов из приведенных уравнений не удается. Для их вычисления следует решить уравнение для P, проинтегрировать по λ, а затем воспользоваться формулой (1.3).

В некоторых случаях осредненное описание можно получить с помощью характеристических уравнений переноса. Например, пусть $V=\mathrm{const}$ — случайная величина, $f(c)$ и начальные условия таковы, что решение задачи (7.1) непрерывно. Тогда в связи с характеристическим уравнением

$$\frac{dx^c(t)}{dt}=Vf(c),\qquad c=\mathrm{const},\qquad x^c(0)=x_0(c)$$

введем плотность $\varphi_t^c(x)=\delta[x^c(t)-x]$, для которой уравнение Лиувилля имеет вид

$$\frac{\partial\varphi_t^c(x)}{\partial t}+Vf(c)\frac{\partial\varphi_t^c(x)}{\partial x}=0,\qquad \varphi_0^c(x)=\delta[x_0(c)-x]$$

Осредняя, получим для плотности вероятностей $P_t^c(x)=\langle\varphi_t^c(x)\rangle$ уравнение

$$\frac{\partial P_t^c(x)}{\partial t}+\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n\frac{K_{n+1}}{n!}f^{n+1}(c)\frac{\partial^{n+1}P_t^c(x)}{\partial x^{n+1}}=0 \qquad (7.4)$$

Для гамма-распределения V из (7.4) имеем задачу

$$m\frac{\partial P_t^c(x)}{\partial t}+Wf(c)\frac{\partial P_t^c(x)}{\partial x}+\zeta^2Wtf(c)\frac{\partial^2P_t^c(x)}{\partial x\,\partial t}=0$$

$$P_0^c(x)=\delta[x_0(c)-x]$$

решение которой нетрудно найти. Зная плотности распределения $P_t^c(x)$, можно найти моменты u_k.

8. Ограничимся в дальнейшем задачей осреднения уравнения

$$\frac{\partial c}{\partial t}+V\frac{\partial F(c)}{\partial x}=0,\quad c(0,x)=c_0(x) \qquad (8.1)$$

где V — случайная величина. Пусть решение задачи (8.1) непрерывно.

Получим из уравнения (8.1) соотношения для моментов. Обозначим $f(c)=F'(c)$. Умножая (8.1) на c^{k-1} и учитывая, что $c=c(Vt, x)$, получим незамкнутые уравнения для u_k

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}+k\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n\frac{K_{n+1}}{n!}\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\left\langle\int c^{k-1}f^{n+1}(c)dc\right\rangle=0 \quad (k=1,2,\dots) \tag{8.2}$$

Пусть $\psi(c)$ — произвольная непрерывно дифференцируемая функция. Тогда, умножая (8.1) на $\psi'(c)$ и осредняя, получим

$$\frac{\partial\langle\psi(c)\rangle}{\partial t}+\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^n\frac{K_{n+1}}{n!}\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\left\langle\int\psi' f^{n+1}dc\right\rangle=0 \tag{8.3}$$

В частности, при $\psi=f^k$ уравнение (8.3) принимает вид

$$\frac{\partial\langle f^k\rangle}{\partial t}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n!}\frac{k}{n+k+1}K_{n+1}\frac{\partial^{n+1}}{\partial x^{n+1}}\langle f^{n+k+1}\rangle=0 \tag{8.4}$$

Нетрудно видеть, что не существует такой функции $\psi(c)$, для которой уравнения (8.3) были бы замкнутыми.

Пусть V имеет гамма-распределение. Тогда, подставляя в (8.4) значения для кумулянтов, дифференцируя по x и заменяя сумму с помощью (8.4), получим локализованную систему для моментов

$$\frac{\partial\langle f^k\rangle}{\partial t}+\frac{k}{k+1}WA\langle f^{k+1}\rangle=0,\quad A=\left(1+\zeta^2 t\frac{\partial}{\partial t}\right)\frac{\partial}{\partial x}\quad (k=1,2,\dots) \tag{8.5}$$

В случае $F(c)=c^l/l$ из уравнений (8.2) следует система

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}+\frac{k}{k+l+1}WAu_{k+l-1}=0\quad (k=1,2,\dots) \tag{8.6}$$

Система (8.6) содержит систему (8.5). В частности, для уравнения Бюргерса ($l=2$) они совпадают. Для момента бесконечного порядка из (8.5) следует замкнутое линейное уравнение, совпадающее с (3.5).

Пусть $\varphi(f)$ — произвольная монотонная функция, допускающая в нуле разложение в ряд Тейлора. Тогда, умножая каждое уравнение системы (8.5) на $\varphi^{(k)}(0)/k!$ и складывая, будем иметь

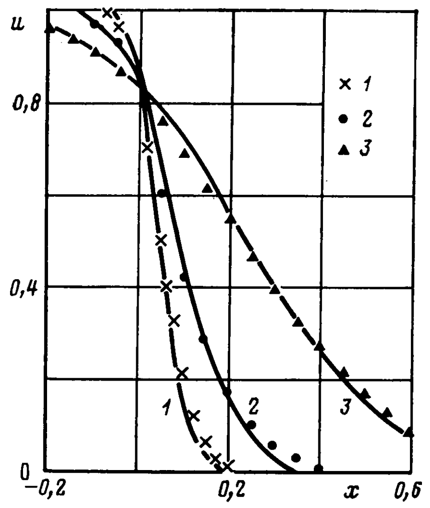
$$\frac{\partial\langle\varphi(f)\rangle}{\partial t}+WA\langle G(\varphi)\rangle=0,\quad G(\varphi)=\int_0^{f(\varphi)}f\varphi'(f)df \tag{8.7}$$

Из уравнения (8.7) для функций $\varphi(f)$ частного вида получаем уравнения

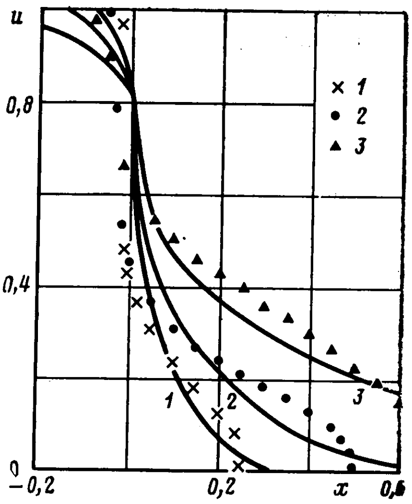
$$\frac{\partial}{\partial t}\langle e^f\rangle+WA\langle(f-1)e^f\rangle=0$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\ln f\rangle+WA\langle f\rangle=0$$

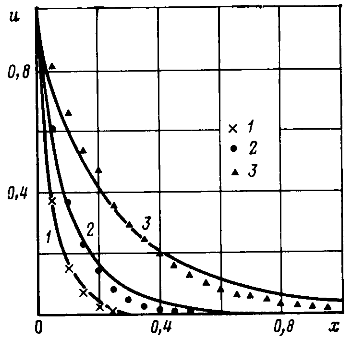
Из системы (8.5) или (8.6) можно получить систему уравнений для флуктуаций. Обозначив через $s_k=\langle(f-\langle f\rangle)^k\rangle$ центральный момент k-го



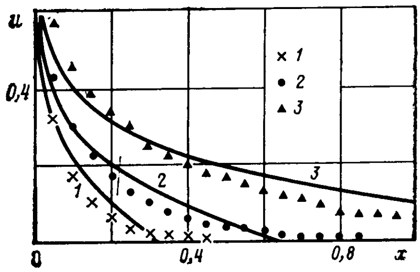
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

порядка, из (8.5) получим бесконечную систему уравнений

$$\frac{\partial f_1}{\partial t}+\frac{1}{2}WAf_1^2+\frac{1}{2}WAs_2=0, \quad f_1=\langle f\rangle$$

$$\frac{\partial s_2}{\partial t}+2WA(f_1s_2)+\frac{2}{3}WA(f_1^3+s_3)+\frac{\partial f_1^2}{\partial t}=0$$

$$\frac{\partial s_3}{\partial t}+\frac{3}{2}WA(f_1s_3)+\frac{3}{4}WA(2s_2f_1^2-f_1^4+s_4)+\frac{\partial f_1^4}{\partial t}+3\frac{\partial f_1s_2}{\partial t}=0$$

. . . .

9. Представляет интерес задача нахождения приближенных замкнутых уравнений для u_k. В частности, приближенное уравнение для $u=\langle c\rangle$ можно получить следующим образом. Разложим функцию $F(c)$ в ряд Тейлора в точке u и ограничимся линейной по флуктуациям c аппроксимацией. Тогда уравнение (8.1) примет вид

$$\frac{\partial c}{\partial t}+V\frac{\partial cf(u)}{\partial x}-Vu\frac{\partial f(u)}{\partial x}=0$$

Осредняя, получим

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n!}K_{n+1}\left[\frac{\partial f(u)}{\partial x}\right]^n\frac{\partial F(u)}{\partial x}=0$$

Например, для нормального и гамма-распределений скорости V соответствующие уравнения имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial F(u)}{\partial x}=Bt\frac{\partial}{\partial x}f(u)\frac{\partial F(u)}{\partial x} \tag{9.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+W\frac{\partial F(u)}{\partial x}+\zeta^2 Wt\frac{\partial^2 F(u)}{\partial x\,\partial t}=0 \tag{9.2}$$

Аналогично можно получить приближенные уравнения для старших моментов

$$\frac{\partial u_k}{\partial t}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-t)^n}{n!}K_{n+1}\left[\frac{\partial}{\partial x}f_k(u_k)\right]^n\frac{\partial F_k(u_k)}{\partial x}=0$$

где $f_k(u_k)=F_k'(u_k)=ku_k^{k-1}f(u_k)$. Отсюда легко вывести следствия типа (9.1) и (9.2) с соответствующими заменами.

Степень точности приближенных уравнений проиллюстрируем численными решениями уравнений (9.1) и (9.2). Результаты представлены соответственно на фиг. 1, 2 и 3, 4. Сплошные кривые соответствуют осреднению точного решения уравнения (8.1) для нормального и гамма-распределений, пунктирные – численному решению приближенных уравнений. Начальное условие имеет вид полочки: $c_0(x)=1$ при $x<0$ и $c_0(x)=0$ при $x>0$, коэффициент вариации $\zeta=1$. Расчеты проводились для двух функций: $F(u)=\ln(1+u)/\ln 2$ (фиг. 1 и 3) и $F(u)=u^2[u^2+0{,}1(1-u)^2]^{-1}$ (фиг. 2 и 4). В первом случае решения-реализации в области $x>0$ непрерывны, во втором – разрывны. Шифр кривых на фиг. 1–4 соответствует различным значениям безразмерного времени $\tau=x/Wt$. Сравнение показывает, что в первом случае приближенное уравнение удовлетворительно описывает осредненный процесс, во втором случае кривые разнятся больше.

Авторы признательны А. И. Шнирельману за указание на возможность получения осредненного уравнения в случае распределения скорости по закону Коши.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Швидлер М. И.* Статистическая гидродинамика пористых сред. М.: Недра, 1985. 288 с.
2. *Швидлер М. И.* О дисперсии фильтрационного потока.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 4, с. 65–69.
3. *Швидлер М. И.* Осреднение уравнений фильтрационного переноса в средах со случайными неоднородностями.– Изв. АН СССР. МЖГ, 1985, № 1, с. 68–75.
4. *Кляцкин В. И.* Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 336 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.X.1984