

УДК 532.529

К ТЕОРИИ ЦИРКУЛЯЦИОННЫХ ДВИЖЕНИЙ В БАРБОТАЖНОМ СЛОЕ

ЗЕЛЕНКО В. Л., МЯСНИКОВ В. П.

Барботаж газовых пузырей через слой жидкости даже при незначительных расходах газа сопровождается крупномасштабным движением, которое является основным источником продольного перемешивания фаз в колонне и вносит наибольший вклад в масштабный эффект при моделировании промышленных процессов на колоннах малого диаметра и высоты. Вследствие этого экспериментальному изучению продольного перемешивания фаз в барботажном слое посвящена обширная литература. Однако лишь в малой части этих работ детально исследована структура потоков [1-3].

В работах, количественно описывающих эффекты крупномасштабного движения, часто используются формальные модели: ячеечная, диффузионная и т. д., с помощью которых можно сделать качественные выводы о характере движения фаз в конкретной колонне на основе ограниченного числа экспериментальных данных, полученных на этой же колонне. Однако эти модели по существу ограничены и непригодны для решения проблемы масштабного перехода. В этой связи наибольший интерес представляют исследования, основанные на уравнениях гидродинамики.

Движение фаз при неравномерном подводе газа рассмотрено в [4]. При равномерном подводе газа исследование принципиально усложняется ввиду возможной множественности состояний. В этом случае всегда существует тривиальное решение системы гидродинамических уравнений, соответствующее состоянию покоя жидкой фазы, устойчивость которого исследована в ряде работ. В [5] показана неустойчивость горизонтального барботажного слоя, связанная с градиентом скорости всплытия пузырей, вследствие чего реализуется неустойчивая стратификация слоя по плотности. В [6, 7] исследовано влияние электрического поля и растворимости газа на устойчивость барботажного слоя.

Вместе с тем конечно-амплитудные движения на основе уравнений гидродинамики ранее не рассматривались. Часто для оценки интенсивности циркуляционного движения жидкости используются различные соображения, основанные на минимизации энергии [8, 9], завихренности [2], диссипации энергии [1, 2]. При этом обоснование применимости этих вариационных принципов отсутствует, что иногда приводит к качественному различию выводов теории и данных опыта.

В настоящей работе рассмотрен класс прямолинейно-параллельных движений на развитом участке вертикального слоя при равномерном подводе газа в бесконечно удаленное сечение. На основе уравнений неразрывности и движения для случая ползущих стационарных движений жидкости получен вариационный принцип, с помощью которого решена плоская задача о движении фаз. Показано, что если газосодержание превосходит критическое значение, то наряду с тривиальным решением, соответствующим механическому равновесию слоя, существует семейство решений, описывающих конечно-амплитудные движения масштаба диаметра и высоты слоя.

1. Постановка задачи. Рассмотрим цилиндрическую колонну произвольного сечения с вертикальной образующей, заполненную вязкой жидкостью. В нижнее сечение колонны равномерно подводятся газовые пузыри. Ограничиваясь малыми газосодержаниями и пренебрегая эффектами, связанными с массой газа, запишем уравнения движения фаз в виде [10]

$$\rho_0(1-q') \frac{d_1 \mathbf{V}_1'}{dt} = -\nabla p' + \rho_0 v \Delta \mathbf{V}_1' - (1-q') \rho_0 g e$$

$$-q' \nabla p' - K \rho_0 \frac{v}{a^2} q' (\mathbf{V}_2' - \mathbf{V}_1') + \mathbf{F} = 0, \quad \frac{d_1}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V}_1 \nabla$$

где ρ_0 — истинная плотность жидкости, q' — газосодержание (объемная доля газа в газожидкостной смеси), p' — давление, ν — кинематический коэффициент вязкости жидкости, V_1', V_2' — скорость жидкой и газовой фаз, g — ускорение силы тяжести, e — единичный вектор вертикального направления, a — радиус пузырей, F — силы Магнуса — Жуковского и присоединенной массы, $K=9/2$ при стоксовом движении пузырей; если применима формула Адамара — Рыбчинского, то $K=3$.

Пусть R_0 — характерный горизонтальный масштаб слоя, например радиус колонны с круговым горизонтальным сечением или полуширина слоя, ограниченного двумя параллельными вертикальными плоскостями, W_0 — скорость всплытия одиночного пузыря, q_0 — газосодержание во входном по газу сечении. Введем новые масштабы расстояния R_0 , скорости W_0 , давления $\rho_0 W_0^2$, газосодержания q_0 . В предположении, что число Фруда $Fr=W_0/\sqrt{gR_0}$ мало в сравнении с единицей, в уравнениях движения фаз, представленных в безразмерном виде, опустим члены порядка Fr^2 и, присоединяя в предположении несжимаемости фаз уравнения неразрывности, получим систему уравнений относительно безразмерных величин, записанных без штриха

$$\begin{aligned} q_0 \frac{\partial q}{\partial t} &= \operatorname{div}[(1-q_0q) V_1] \\ \frac{\partial q}{\partial t} + \operatorname{div}(qV_2) &= 0, \quad V_2 = V_1 + e \\ \Delta V_1 + Ar q e &= Re \left[\nabla P + (1-q_0q) \frac{d_1 V_1}{dt} \right] \\ Ar &= \frac{q_0 g R_0^2}{\nu W_0}, \quad Re = \frac{W_0 R_0}{\nu} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где Ar , Re — числа Архимеда и Рейнольдса. Из первых трех уравнений системы (1.1) для стационарного случая нетрудно получить

$$\frac{\partial q}{\partial z} + \frac{V_1 \nabla q}{1-q_0q} = 0 \quad (1.2)$$

Из вида (1.2), рассматриваемого как уравнение относительно q при произвольно заданной гладкой функции координат V_1 , следует, что если во входном по газу сечении $q=1$, то это значение будет переноситься характеристиками уравнения (1.2) во все точки слоя, через которые проходят эти характеристики. В частности, эти характеристики могут занимать весь объем слоя. В этом случае очевидно, что стационарное течение невозможно (предполагается непроницаемость границ слоя относительно жидкости).

Однако в принципе возможны случаи, когда упомянутые характеристики занимают лишь часть объема барботажного слоя. При этом реализуется разрывное, ступенчатое распределение газосодержания и связанное с ним стационарное течение. Таким образом, задача о течениях в барботажном слое при равномерном подводе газа сводится к определению условий существования и явного вида контактной поверхности, разделяющей области, в которых $q=0$ и 1 .

2. Прямолинейно-параллельные течения. Рассмотрим колонну, имеющую форму неограниченного кругового цилиндра, с равномерным подводом газа в бесконечно удаленное сечение. Будем искать стационарные прямолинейно-параллельные течения, соответствующие цилиндрической контактной поверхности безразмерного радиуса r_0 , охватывающей газожидкостную смесь, безразмерное газосодержание в которой равно единице. В осесимметричном случае уравнение движения жидкости в цилиндрической системе координат с осью z , направленной по вертикали вверх вдоль

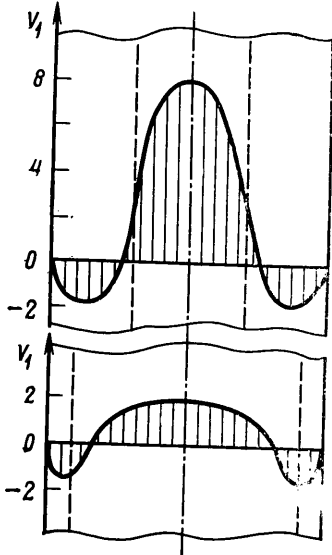
оси цилиндра, и текущим радиусом r имеет вид

$$-\operatorname{Re} \frac{dp}{dz} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV_-}{dr} \right) = 0 \quad (r_0 < r \leq 1)$$

$$-\operatorname{Re} \frac{dp}{dz} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dV_+}{dr} \right) + \operatorname{Ar} = 0 \quad (r \leq r_0) \quad (2.1)$$

где V_- , V_+ — скорость жидкости в указанных областях. Для V_- выполняется граничное условие прилипания $V_- = 0$ при $r = 1$. По обе стороны контактной поверхности равны скорости и касательные напряжения в жидкости: $r = r_0$, $V_- = V_+$, $dV_-/dr = dV_+/dr$.

При рассмотрении нулевого приближения по малому параметру q_0 газосодержание следует учитывать лишь в члене с подъемной силой в уравнении движения жидкости, тогда как уравнение неразрывности для жидкой фазы сводится к условию соленоидальности V_1 [4]. Аналогичное рассмотрение в теории тепловой конвекции известно как приближение Буссинеска [11]. Таким образом, условия замкнутости потока на бесконечности и равенства газосодержания в предпологаемом нижнем непроницаемом относительно жидкости сечении, в которое равномерно подводится газ, и в газожидкостной смеси внутри контактной поверхности можно представить в форме



Фиг. 1

$$\int_0^{r_0} r V_+ dr + \int_{r_0}^1 r V_- dr = 0, \quad r_0^2 + 2 \int_0^{r_0} r V_+ dr = 1$$

Будем искать решение (2.1) в виде $V_- = C_1 r^2 + C_2 \ln r - C_3$, $V_+ = -C_3 r^2 + C_4$. При этом условие прилипания выполняется автоматически, а с помощью оставшихся условий получим систему шести уравнений относительно шести констант $\operatorname{Re} dp/dz$, r_0 , $C_1 \dots C_4$, в результате решения которой имеем

$$V_- = \frac{\operatorname{Ar}}{4} r_0^2 [(2 - r_0^2)(r^2 - 1) - 2 \ln r]$$

$$V_+ = \frac{\operatorname{Ar}}{4} \{ [r_0^2(2 - r_0^2) - 1] r^2 + r_0^2(r_0^2 - 1 - 2 \ln r_0) \}$$

$$\operatorname{Ar} = \frac{8(1 - r_0^2)}{r_0^4(-r_0^4 + 4r_0^2 - 4 \ln r_0 - 3)}$$

Функция $\operatorname{Ar}(r_0)$ достигает минимум $\operatorname{Ar}_{\min} = 109$ при $r_0 = 0,65$ и имеет две вертикальные асимптоты $r_0 = 0$ и 1 .

Таким образом, существует критическое значение числа Архимеда $\operatorname{Ar}_* = 109$, причем если $\operatorname{Ar} < \operatorname{Ar}_*$, то стационарные прямолинейно-параллельные течения невозможны, если $\operatorname{Ar}_* < \operatorname{Ar}$, то возможно два конечно-амплитудных движения, сливающихся при $\operatorname{Ar} = \operatorname{Ar}_*$. При этом в обоих случаях в нисходящем потоке скорость жидкости достигает значений, превыря. На фиг. 1 показаны два положения контактной поверхности (обозначена штриховой линией) с соответствующими профилями скорости жидкости при $\operatorname{Ar} = 200$.

В работе [1] также исследовались прямолинейно-параллельные течения, при этом вместо условия, выражающего постоянство газосодержания вдоль линии тока газовой фазы, применялся принцип минимума диссипации энергии, с помощью которого определялся диаметр пузырьковой дорожки и один из параметров пространственного распределения газосодержания. Однако в более поздней обзорной статье [2] один из авторов работы [1] признал ошибочность модели именно в связи с противоречащим опытным данным, но следующим из модели непостоянством газосодержания вдоль линии тока газовой фазы. При этом не была предложена другая постановка задачи.

Рассмотрим аналогичную задачу для плоского вертикального слоя со свободными границами. Пусть начало прямоугольной системы координат xz расположено на левой границе, ось z направлена по вертикали вверх. Обозначим безразмерную абсциссу контактной прямой через s , причем газовые пузыри содержатся лишь в области $s < x \leq 1$. Решая уравнения, аналогичные (2.1), с соответствующими краевыми условиями и условиями, выражающими баланс массы каждой фазы и равенство локальных газосодержаний в пузырьковой дорожке на развитом участке и во входном сечении, получим

$$\begin{aligned} V_- &= \frac{3x^2}{2s(1-s)} - \frac{2-s}{2(1-s)} \quad (0 \leq x < s) \\ V_+ &= -3 \left(\frac{1-x}{1-s} \right)^2 + \frac{1+s}{2(1-s)} \quad (s \leq x < 1) \\ A\Gamma &= \frac{3}{s(1-s)^2}, \quad A\Gamma_* = \frac{81}{4} \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $A\Gamma_*$ — минимум функции $A\Gamma(s)$, являющийся критическим значением числа Архимеда. При исследовании полученного решения можно сделать те же выводы, что и полученные при рассмотрении цилиндрической колонны.

3. Плоская задача. Для исследования влияния концевых эффектов на течение в барботажном слое рассмотрим в прямоугольной области плоскую задачу, что позволяет ввести функцию тока ψ с помощью известных соотношений: $V_x = \partial\psi/\partial z$, $V_z = -\partial\psi/\partial x$, где V_x , V_z — горизонтальная и вертикальная составляющие скорости жидкости.

Получим полезное соотношение, связывающее ψ с уравнением линии тока газовой фазы, заданным в виде $x = \varphi(z)$. Для этого продифференцируем ψ вдоль линии тока фазы пузырей

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{d\varphi}{dz}$$

С другой стороны, в силу третьего уравнения системы (1.1) имеем

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{\partial\psi}{\partial z} \left[1 - \frac{\partial\psi}{\partial x} \right]^{-1} \quad (3.1)$$

Подставляя (3.1) в предыдущее соотношение, получим

$$\frac{d\psi}{dz} = \frac{\partial\psi}{\partial z} \left[1 - \frac{\partial\psi}{\partial x} \right]^{-1} \quad (3.2)$$

Из (3.1), (3.2) следует $d(\psi - \varphi)/dz = 0$. Пусть $\psi = 0$ при $x = 0$, тогда, если линия тока газовой фазы начинается при $x = 0$

$$\psi(\varphi(z), z) = \varphi(z) \quad (3.3)$$

Если ввести оператор Ω , ставящий в соответствие кусочно-гладкой функции $f(z)$ функцию $\psi(f(z), z)$, то соотношение (3.3) можно интерпретировать следующим образом: каждая контактная кривая, начинающаяся

при $x=0$, является неподвижной точкой оператора Ω . Дифференцируя (3.3), нетрудно доказать обратное утверждение.

Ограничиваясь для простоты рассмотрением барботажного слоя со свободными границами, заметим, что в случае ползущих движений ($Re \ll 1$), встречающихся при барботаже газа через высоковязкие жидкости [9], и при известной гладкой функции координат q для ψ имеем задачу

$$\Delta^2 \psi = \text{Ar} \frac{\partial q}{\partial x}$$

$$\begin{aligned} x=0, 1; \quad 0 \leq z \leq H; \quad \psi=0; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \\ z=0, H; \quad 0 \leq x \leq 1; \quad \psi=0; \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

где H — безразмерная высота слоя.

Решение этой задачи эквивалентно нахождению минимума функционала [12]

$$\Phi = \iint_S \left[(\Delta \psi)^2 - 2 \text{Ar} \psi \frac{\partial q}{\partial x} \right] dx dz$$

определенного в пространстве функций L_2 , удовлетворяющих краевым условиям (3.4) (S — прямоугольная область, занятая барботажным слоем). Если ширину полосы, в которой q меняется от 0 до 1 устремить к нулю, то эта полоса вырождается в контактную линию, задаваемую уравнением $x = \varphi(z)$, а функционал Φ примет вид

$$\Phi = \int_0^1 dx \int_0^H (\Delta \psi)^2 dz - 2 \text{Ar} \int_0^H \psi(\varphi(z), z) dz \quad (3.5)$$

Таким образом, задача о нахождении контактной поверхности и соответствующего течения в слое допускает следующую формулировку: найти функции $\varphi(z)$ и удовлетворяющую условиям (3.4) $\psi(x, z)$, сообщающие минимум функционалу (3.5) и удовлетворяющие уравнению (3.3).

Будем искать ψ в виде ряда по полной системе функций $\sin(\pi i x) \sin(\pi j z)$. Коэффициенты ряда C_{ij} определяются согласно методу Рунца [12] из уравнения $\partial \Phi / \partial C_{ij} = 0$.

Таким образом, с помощью (3.3) после замены $u = z/H$ $f(u) = \varphi(Hu)$ окончательно получим уравнение относительно $f(u)$

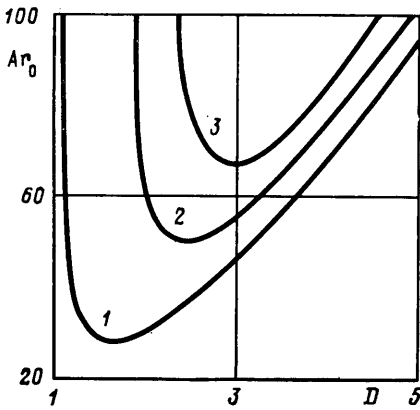
$$\sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{4 \text{Ar}}{\pi^4} \left(i^2 + \frac{j^2}{H^2} \right)^{-2} \left[\int_0^1 \sin(\pi i f) \sin(\pi j u) du \right] \sin(\pi i f) \sin(\pi j u) = f \quad (3.6)$$

Рассматривая случай бесконечно высокой колонны, будем искать те решения уравнения (3.6), вид которых не меняется при $H \rightarrow \infty$. При этом ряд по индексу j в уравнении (3.6) нетрудно привести к виду ряда Фурье функции $\sin(\pi i f)$ по $\sin(\pi j u)$ на интервале $(0, 1)$. Вследствие этого при ненулевых f (3.6) может быть преобразовано к виду

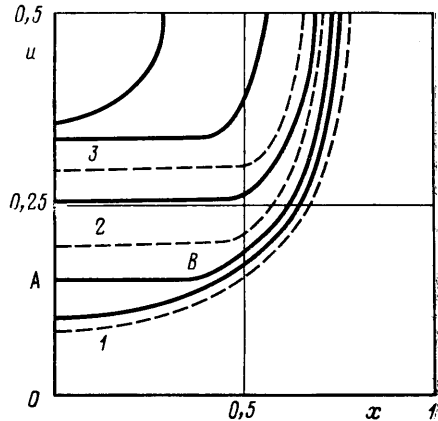
$$\text{Ar} = \frac{\pi^4}{2} f \left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\sin^2(\pi i f)}{i^4} \right]^{-1}$$

Можно показать, что полученная функция $Ag(f)$ и функция $Ag(s)$, задаваемая соотношением (2.2), тождественны с точностью до обозначения аргументов на интервале $(0, 1)$. Таким образом, при $81/4 < Ag$ и $H = \infty$ решение уравнения (3.6) может наряду с нулевым значением принимать пару значений из интервала $(0, 1)$, т. е. произвольная ступенчатая функция, принимающая три указанных значения или лишь некоторые из них, является искомым решением.

Поскольку при этом выбраны два различных масштаба: в горизонтальном направлении — полуширина слоя, а в вертикальном — высота слоя H , причем $H \rightarrow \infty$, то ясно, что все изменения контактной линии, происходящие на масштабе R_0 или на любом другом, не связанном с H , вырождаются



Фиг. 2



Фиг. 3

ся в горизонтальные отрезки, проходящие через точки разрыва ступенчатой функции.

Для лучшего выяснения качественных особенностей задачи при конечной высоте слоя H рассмотрим уравнение (3.6), сохранив лишь первый член двойного ряда

$$\pi f = D \sin(\pi f) \sin(\pi u) \quad (3.7)$$

$$D = \frac{4 Ag}{\pi^3 (1+H^{-2})^2} \int_0^1 \sin(\pi f) \sin(\pi u) du$$

Решение уравнения (3.7) имеет вид

$$f=0, \quad D \sin(\pi u) < a, \quad f=G(D \sin(\pi u)), \quad a \leq D \sin(\pi u)$$

где G — функция, обратная к $F = \pi x / \sin(\pi x)$ на интервале $(0, 1)$. Значение a не определено, хотя и заключено в отрезке $1 \leq a \leq a_0$, как будет показано ниже, величина a_0 связана с Ag и H . Заметим, что при $a=1$ реализуется непрерывная в точке схода контактная линия, при $1 < a$ имеет место разрыв со скачком $G(a)$, при этом координата точки схода равна $u_c = \pi^{-1} \arcsin(a/D)$. Интегрируя обе части уравнения (3.7) от 0 до 1, после преобразований получим трансцендентное уравнение относительно D

$$Ag_0 \int_0^b \frac{G(D(1-z^2))}{\sqrt{2-z^2}} dz = \frac{\pi^3 D^2}{16}, \quad Ag_0 = \frac{Ag}{(1+H^{-2})^2}, \quad b = \sqrt{1 - \frac{a}{D}}$$

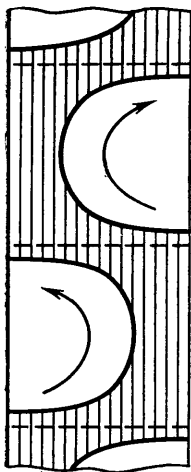
На фиг. 2 кривые 1–3 описывают зависимость Ag_0 от D при $a=1, 1,8, 2,2$ соответственно. Видно, что каждому значению $Ag_0 > 28,2$ при фиксированном a соответствует два значения D , причем значения a ограничены

величиной a_0 , при которой оба корня сливаются. Заметим, что полученное здесь при $H=\infty$ приближенное минимальное критическое значение $Ag_*=28,2$ превосходит вычисленное выше точное значение $81/4$.

Вследствие предполагаемой симметрии слоя относительно средних вертикального и горизонтального сечений на фиг. 3 показана левая нижняя четверть слоя с различными возможными контактными кривыми (обозначены сплошной линией), соответствующими значению $Ag_0=50$. Точки A и B обозначают координату точки схода и конец горизонтального участка контактной кривой. Очевидно, что на отрезке AB , являющимся одновременно величиной скачка контактной кривой, вертикальная составляющая скорости нисходящего потока по абсолютной величине в точности равна скорости всплытия одиночного пузыря.

Таким образом, наиболее важной особенностью рассмотренного приближения является неопределенность точки схода и связанной с ней длины горизонтального участка контактной кривой.

Переходя к численному решению уравнения (3.6), заметим, что простые итерации, беспорядочно колеблясь, не сходятся. С другой стороны, обозначая левую часть уравнения (3.6) через $\chi(f)$ и задавая связь между итерациями соотношением $f_{k+1}=0,5(\chi(f_k)+f_k)$ (k — номер итерации), получим сходящийся итерационный процесс. В качестве начальных функций использовали четные относительно среднего горизонтального сечения функции, имеющие на отрезке $0 \leq u \leq 0,5$ вид: $f_0=0, 0 \leq u < b, f_0=c(u-b), b \leq u \leq 0,5$. Контроль расчета проводили сравнением результатов при $H=\infty$ с формулой (2.2). Из вида оператора χ следует, что все итерации на отрезке $0 \leq u < b$ равны нулю. Это обстоятельство позволяет управлять положением точки схода контактной кривой в процессе численного расчета.



Фиг. 4

На фиг. 3 штриховыми линиями показаны полученные в ходе расчета контактные кривые с различными точками схода: 1 — кривая с самым низким положением точки схода $b=0$, 2 — $b=0,2$, 3 — $b=0,3$. Видно, что у кривых 2 и 3, точки схода которых расположены выше, чем у кривой 1, имеется горизонтальный участок. Таким образом, полученный выше вывод о неопределенности положения точки схода контактной поверхности остается справедливым и при рассмотрении полного уравнения (3.6). Рассчитанные контактные кривые при $Ag=200, H=1$ близки к кривым, полученным в приближенной теории, однако с увеличением H расхождение возрастает.

С помощью полученных результатов можно строить периодические как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях решения. На фиг. 4 показана близкая к экспериментально наблюдаемой [3] периодическая структура потоков в высоком барботажном слое (пузыри содержатся лишь в заштрихованной области, стрелки указывают направление циркуляции жидкости) при $Ag=200$ с вертикальным масштабом движения, равным ширине слоя.

В заключение заметим, что рассмотренный в настоящей работе механизм крупномасштабной циркуляции, связанный с оттеснением пузырей в восходящий поток нисходящим потоком, скорость которого превосходит скорость подъема одиночного пузыря, имеет место не только в пузырьковом слое, но и в других дисперсных системах, применительно к которым полученные результаты могут быть без труда обобщены.

ЛИТЕРАТУРА

1. Rietema K., Ottengraf S. P. P. Laminar liquid circulation and bubble street formation in gas-liquid system. — Trans. Inst. Chem. Engrs, 1970, v. 48, № 2, p. 54–62.
2. Rietema K. Science and technology of dispersed two-phase systems. — Chem. Eng. Sci., 1982, v. 37, № 8, p. 1125–1150.

3. Мясников В. П., Митронов А. П., Кочергин Н. А., Дильман В. В. Структура потоков в высоком непроточном пузырьковом слое.— Докл. АН СССР, 1983, т. 269, № 4, с. 827–830.
4. Дильман В. В., Зеленко В. Л. Влияние газораспределительного устройства на крупномасштабное движение в трехфазном неподвижном слое.— Хим. пром-сть, 1981, № 11, с. 673–676.
5. Лихт М. К., Штейнберг В. А. Об устойчивости слоя жидкости при барботаже.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 4, с. 47–53.
6. Налетова В. А. Стабилизация барботажных процессов электрическим полем.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 4, с. 5–12.
7. Зеленко В. Л. Влияние растворимости газа на устойчивость слоя жидкости с пузырями и неподвижной насадкой.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 5, с. 68–74.
8. Азбель Д. С. Гидродинамика процессов в реакторах барботажного типа.— Хим. пром-сть, 1964, № 7, с. 523–527.
9. Нигматулин Р. И. Основы механики гетерогенных сред. М.: Наука, 1978. 336 с.
10. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
11. Будтов В. П., Консетов В. В. Тепломассоперенос в полимеризационных процессах. Л.: Химия, 1983. 256 с.
12. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. М.: Наука, 1970. 512 с.

Москва

Поступила в редакцию
19.IX.1984