

УДК 532.546

## ТЕНЗОРНЫЙ ЗАКОН ДАРСИ ДЛЯ ТКАНЫХ СЕТОК ПЛОТНОГО ТИПА

КУРПАТЕНКОВ А. В., ПОЛЯЕВ В. М., СИНЦОВ А. Л.

Применение сеток в качестве фитилей тепловых труб, в капиллярных системах фазоразделения [1] и кондиционирования [2] обуславливает интерес к их гидравлическим характеристикам. При этом для оптимизации структуры сетки требуется значение ее гидравлических характеристик в зависимости от направления и геометрических параметров. Экспериментальное определение таких зависимостей затруднительно и к настоящему времени полностью не осуществлено. Ниже дан теоретический вывод формулы для расчета гидравлического сопротивления тканых сеток плотного типа в любом направлении в области, где справедлив закон Дарси, т. е. где перепад давления линейно зависит от скорости набегающего потока. Вывод основан на применении к сеткам так называемой ячеистой модели фильтрации Хопшеля [3]. Заметим, что ячеистая модель позволяет получить хорошее согласие с экспериментом для ряда пористых материалов, в частности для засыпок сфер [3, 4] и для волокнистых материалов [5].

Для вектора силы, действующей со стороны потока на единицу длины цилиндра, находящегося в пористой среде, ячеистая модель дает [3]

$$\mathbf{f}_l = \mu (\varphi_n \mathbf{n} u_n + \varphi_t \mathbf{t} u_t) \quad (1)$$

где  $\mu$  — вязкость потока,  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{t}$  — единичные векторы нормали и касательной к оси цилиндра,  $u_n$ ,  $u_t$  — соответствующие проекции вектора скорости набегающего потока  $\mathbf{u}$ . Относительно  $\mathbf{n}$  здесь и ниже предполагается, что этот вектор компланарен векторам  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{t}$ , т. е. смешанное произведение  $[\mathbf{n} \mathbf{u} \mathbf{t}]$  всегда равно нулю. Безразмерные коэффициенты  $\varphi_n$ ,  $\varphi_t$  зависят исключительно от пористости среды  $\varepsilon$  [3]

$$\varphi_n = -8\pi \{ \ln(1-\varepsilon) + [1 - (1-\varepsilon)^2] / [1 + (1-\varepsilon^2)] \}^{-1} \quad (2)$$

$$\varphi_t = -8\pi [2 \ln(1-\varepsilon) + 3 - 4(1-\varepsilon) + (1-\varepsilon)^2]^{-1} \quad (3)$$

Перед тем как применить соотношение (1) к сеткам, введем некоторые термины и обозначения. Назовем основами проволоочки, осевая линия которых прямолинейна и лежит в срединной плоскости сетки, утками — проволоочки с криволинейной осевой линией, пересекающей срединную плоскость. Сетку будем характеризовать следующими исходными параметрами: диаметрами проволоочек основы  $d_0$  и утка  $d_u$  и числом проволоочек на единицу длины соответственно  $n_0$  и  $n_u$ . Тип переплетения определим параметром  $\chi$ :  $\chi=0$  — полотняное,  $0,5$  — полусаржевое,  $1$  — саржевое. Рисунки различных типов переплетения приведены в [6]. Наряду с размерными будем использовать и безразмерные исходные параметры сетки:  $\delta_0 = d_0/d_u$ ,  $v_0 = n_0 d_u$ ,  $v_u = n_u d_u$ ,  $\xi = v_0(\delta_0 + 1)$ . Назовем утки, идущие параллельно срединной плоскости сетки, утками первого типа, их число на единицу длины обозначим  $n_1$ , длину их осевой линии на шаге между двумя основами —  $l_1$ . Для утков, пересекающих срединную плоскость сетки на шаге между двумя основами, введем соответствующий термин и обозначения: утки второго типа,  $n_2$ ,  $l_2$ . Отметим, следующие, легко

устанавливаемые соотношения:

$$n_2 = n_u / (1 + \kappa), \quad n_1 = \kappa n_2 \quad (4)$$

Обозначим шаг между основами  $l_u$ . Очевидно,  $l_u = 1/n_u$ . Ниже требуется отношение  $l_2/l_u$ , которое обозначим  $\tau$ . Приведем для него формулу [6]

$$\tau = \xi \Phi + \sqrt{1 - \varepsilon^2}, \quad \Phi = \arcsin \xi$$

Заметим, что утки сеток саржевого и полусаржевого переплетений имеют некоторый регулярный скос в плоскости сетки. Величина скоса невелика и ее влиянием на  $\tau$  пренебрегаем. Отношение  $l_1/l_u$  будет равно единице, если скосом утков также пренебречь. Этот результат используется ниже.

Перепишем (1) в следующем виде:

$$\mathbf{f}_i = \mu (\varphi_n \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} + \varphi_t \mathbf{t} \otimes \mathbf{t}) \cdot \mathbf{u} \quad (5)$$

Здесь символ  $\otimes$  обозначает тензорное произведение, так что величины  $\mathbf{n} \otimes \mathbf{n}$  и  $\mathbf{t} \otimes \mathbf{t}$  являются тензорами. Первый из них обозначим  $\mathbf{N}$ , второй —  $\mathbf{T}$ . Произведение  $\mathbf{N}\mathbf{u}$  равно, очевидно,  $n u_n$ ,  $\mathbf{T}\mathbf{u} = t u_t$ . Применим соотношение (5) к уткам второго типа. В силу криволинейности их осевой линии переменными вдоль утка будут векторы  $\mathbf{n}$  и  $\mathbf{t}$ , а следовательно, и тензоры  $\mathbf{N}$  и  $\mathbf{T}$ . Поэтому для вычисления силы, действующей на уток второго типа, необходимо проинтегрировать (5) вдоль утка. Введем следующую операцию усреднения:

$$a^{**} = l_u^{-1} \int a \, dl \quad (6)$$

где  $a$  — некоторая скалярная, векторная или тензорная величина. Интеграл берется вдоль осевой линии утка второго типа на шаге между двумя основами. Таким образом, верхний индекс  $**$  будет символом введенной операции. Используя (6), для силы, действующей на уток второго типа на шаге  $l_u$ , получим выражение  $l_u \mathbf{f}_i^{**}$ . По аналогии с (6) введем операцию усреднения вдоль утка первого типа

$$a^* = l_u^{-1} \int a \, dl \quad (7)$$

где интеграл берется вдоль осевой линии утка на шаге между двумя основами. Тогда для соответствующей силы получим  $l_u \mathbf{f}_i^*$ .

Отношение общей реакции потока на утки обоих типов в выделенном из сетки прямоугольнике к его площади будет равно

$$\mathbf{f}_{\Sigma u} = n_2 \mathbf{f}_i^{**} + n_1 \mathbf{f}_i^* \quad (8)$$

Выражение (8) можно записать в тензорном виде:  $\mathbf{f}_{\Sigma u} = \mathbf{F}_{\Sigma u} \mathbf{u}$ , где

$$\mathbf{F}_{\Sigma u} = \mu n_2 (\varphi_n \{ \mathbf{N}^{**} + \kappa \mathbf{N}^* \} + \varphi_t \{ \mathbf{T}^{**} + \kappa \mathbf{T}^* \}) \quad (9)$$

Таким образом, для расчета  $\mathbf{F}_{\Sigma u}$  необходимо определить четыре тензора:  $\mathbf{N}^{**}$ ,  $\mathbf{N}^*$ ,  $\mathbf{T}^{**}$ ,  $\mathbf{T}^*$ . Для этого отнесем сетку к декартовой системе координат. Ось  $x$  направим вдоль основ, ось  $z$  — перпендикулярно срединной плоскости, в которой поместим начало координат. Из геометрической структуры сетки следует, что когда скорость потока направлена вдоль любой из осей координат, то сила  $\mathbf{f}_{\Sigma u}$  имеет то же направление. Этот факт позволяет сделать вывод, что во введенной системе координат матрица тензора  $\mathbf{F}_{\Sigma u}$  имеет диагональный вид. Следовательно, при вычислении компонент тензоров, входящих в правую часть (9), достаточно ограничиться диагональными компонентами. (Следует иметь в виду, что для сеток саржевого и полусаржевого переплетений в силу скоса утков в плоскости сетки недиагональные компоненты тензора  $\mathbf{F}_{\Sigma u}$ , вообще говоря, отличны от нуля. Однако угол скоса весьма мал и так же малы недиаго-

нальные компоненты. Этот факт позволяет считать введенную систему координат собственной для тензора  $F_{zu}$ , а его матрицу в ней — строго диагональной.) Диагональ тензора  $T$  состоит из элементов  $t_x^2, t_y^2, t_z^2$ , диагональ  $N$  — из  $n_x^2, n_y^2, n_z^2$ . Здесь нижние индексы означают проекцию векторов  $t$  и  $n$  на соответствующую ось координат. Заметим, что при вычислении, например,  $n_x^{2**}, n_x^{2*}$  по формулам (6), (7) следует иметь в виду, что  $n_x$  — координата вектора, удовлетворяющего условию  $[nut]=0$ , где  $u$  направлен вдоль оси  $x$ . Не останавливаясь на деталях, приведем результаты расчета

$$\begin{aligned} t_x^{2**} &= 0, \quad t_y^{2**} = 0,5\xi(\Phi + 0,5 \sin 2\Phi) + \sqrt{1-\xi^2} \cos^2 \Phi \\ t_z^{2**} &= 0,5\xi(\Phi - 0,5 \sin 2\Phi) + \sqrt{1-\xi^2} \sin^2 \Phi \\ t_x^{2*} &= 0, \quad t_y^{2*} = 1, \quad t_z^{2*} = 0, \quad n_x^{2*} = 1, \quad n_y^{2*} = 0 \\ n_z^{2*} &= 1, \quad n_x^{2**} = \tau, \quad n_y^{2**} = t_z^{2**}, \quad n_z^{2**} = t_y^{2**} \end{aligned}$$

Полученные формулы позволяют определить диагональные компоненты тензоров  $T^{**}, T^*, N^*, N^{**}$ .

Отношение реакции потока на проволочки основ в выделенном из сетки прямоугольнике к его площади, как и для утков, можно записать в тензорном виде

$$f_{z0} = F_{z0}u, \quad F_{z0} = \mu n_0 (\varphi_n N_0 + \varphi_t T_0)$$

В силу прямолинейности основ диагональные компоненты  $N_0$  и  $T_0$  будут равны соответственно 0, 1, 1 и 1, 0, 0. Остальные компоненты этих тензоров равны нулю.

Остановимся на одном важном моменте. Рассматриваемые сетки саржевого и полусаржевого переплетений характеризуются столь плотной подбивкой утков, что в области касания с основой между утками отсутствуют просветы. Это приводит к тому, что часть площади утков и основ экранируется, т. е. попадает в зону течения, где силы трения потока о стенку практически равны нулю. Для приближенного учета этого эффекта введем коэффициенты экранирования  $\psi_1, \psi_2, \psi_0$  так, чтобы произведение  $\psi_2 l_u f_l^{**}$  было равно с учетом экранирования силе, действующей со стороны потока на уток второго типа на шаге между двумя основами, произведение  $\psi_1 l_u f_l^*$  — соответствующей силе, действующей на уток первого типа, а  $\psi_0 f_{z0}$  было пропорционально силе, действующей на основы с учетом экранирования. Определим коэффициенты экранирования как частное от деления разности общей и экранированной площадей соответствующих проволочек на общую величину площади

$$\begin{aligned} \psi_2 &= (\Sigma_2 - \Sigma_2') / \Sigma_2, \quad \psi_1 = (\Sigma_1 - \Sigma_1') / \Sigma_1 \\ \psi_0 &= (\Sigma_0 - \Sigma_0') / \Sigma_0 \end{aligned}$$

Здесь величины  $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_0$  — отношения суммарных площадей поверхностей утков первого и второго типов и основ в выделенном из сетки прямоугольнике к его площади. Величины  $\Sigma_1', \Sigma_2', \Sigma_0'$  равны соответствующим отношениям экранированных площадей. Исходя из фиг. 1, для экранированных площадей утков первого и второго типов на шаге  $l_u$  приближенно примем

$$\begin{aligned} S_1' &= r\Psi d_u \pi, \quad S_2' = \kappa r \Phi d_u \pi \\ r &= 0,5(d_0 + d_u), \quad \Psi = \arccos [\delta_0 / (\delta_0 + 1)] \\ z_\Psi &= 0,5d_0 \geq z_\Phi = r \cos \Phi \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} S_1' &= (r\Phi + l) d_u \pi, \quad S_2' = \kappa S_1', \quad l = r \operatorname{tg} (\Psi - \Phi) \\ \Psi &= \operatorname{arctg} \{ [\xi^2 + (\xi \cos \Phi - \delta_0 v_0) \operatorname{ctg} \Phi] / \delta_0 v_0 \}, \quad z_\Psi < z_\Phi \end{aligned} \quad (11)$$

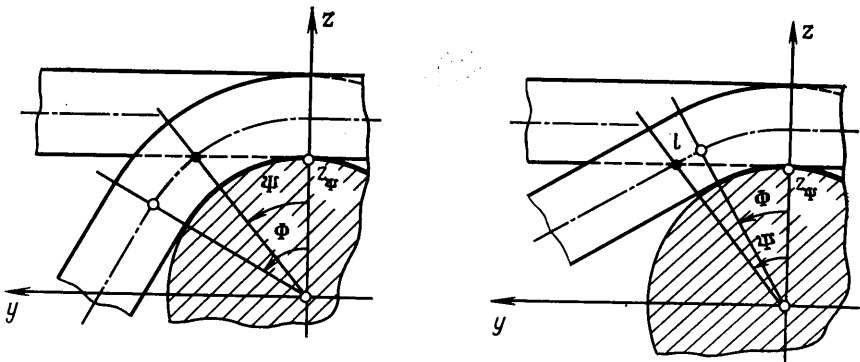
Тогда для величин  $\Sigma_1', \Sigma_2'$  получим соответственно при  $z_{\Psi} \geq z_{\Phi}$  и  $z_{\Psi} < z_{\Phi}$

$$\begin{aligned}\Sigma_1' &= 0,5\pi\xi\Psi v_1, & \Sigma_2' &= 0,5\pi\xi\Phi v_1 \\ \Sigma_1' = \Sigma_2' &= 0,5\pi\xi v_1 [\Phi + \operatorname{tg}(\Psi - \Phi)] \\ v_1 &= n_1 d_u, & v_2 &= n_2 d_u, & v_1 &= \kappa v_2\end{aligned}$$

Для экранированной утктами первого и второго типов площади основы примем

$$S_{10}' = d_u d_0 \Psi, \quad S_{20}' = d_u d_0 \kappa \Gamma, \quad \Gamma = \max(\Psi, \Phi)$$

Тогда для  $\Sigma_0'$  получим  $\Sigma_0' = v_0 v_1 (\Gamma + \Psi)$ .



Фиг. 1

Приведем формулы для расчета знаменателей в выражениях для коэффициентов экранирования (они выводятся из результатов работы [6])

$$\Sigma_1 = \lambda v_1, \quad \Sigma_2 = \lambda v_2 \tau, \quad \Sigma_0 = \lambda \delta_0 v_0$$

Полученные соотношения позволяют приблизительно рассчитать коэффициенты экранирования, которые используются ниже.

Общая реакция потока на проволочки в сетке будет характеризоваться суммой тензоров  $F_{zu}$  и  $F_{zo}$ . Обозначим ее  $F_z$ :

$$F_z = \varphi_n N_z + \varphi_t T_z$$

$$N_z = [\psi_2 N^{**} + \kappa \psi_1 N^*] v_2 + \psi_0 N_0 v_0$$

$$T_z = [\psi_2 T^{**} + \kappa \psi_1 T^*] v_2 + \psi_0 T_0 v_0$$

Тензоры  $F_z$ ,  $N_z$ ,  $T_z$  приведены к безразмерному виду путем умножения на  $d_u/\mu$ . Диагональные компоненты  $F_z$  равны

$$F_{zx} = \varphi_n [\psi_2 \tau + \kappa \psi_1] v_2 + \varphi_t \psi_0 v_0$$

$$F_{zy} = \varphi_n [\psi_2 n_y^{2**} v_2 + \psi_0 v_0] + \varphi_t [\psi_2 t_y^{2**} + \kappa \psi_1] v_2$$

$$F_{xz} = \varphi_n [(\psi_2 n_z^{2**} + \kappa \psi_1) v_2 + \psi_0 v_0] + \varphi_t \psi_2 t_z^{2**} v_2$$

Отношение силы, действующей со стороны потока на проволочки в сетке, к площади выделенного из сетки прямоугольника определяется выражением  $f_z = F_z u$ . Здесь величина  $f_z$  обезразмерена путем умножения на  $d_u^2 \rho \mu^{-2}$ ,  $u$  — умножением на  $d_u \rho \mu^{-1}$ . Введем безразмерную толщину сетки в пакете:  $h = H/N$ , где  $H$  — размерная толщина пакета, отнесенная к  $d_u$ ,  $N$  — число слоев. Тогда сила, действующая на единицу объема пакета сеток, будет равна

$$f_v = F_v u \quad (12)$$

где  $F_v = F_z/h$ . При этом, очевидно,  $\varphi_t$  и  $\varphi_n$  для  $F_z$  следует вычислять по пористости пакета, а не отдельной сетки.

Выражение (12) позволяет сформулировать уравнения гидродинамики для пространства, заполненного сетками. В частности, если пренебречь инерционными силами, то уравнение движения примет вид

$$\text{grad } p = -\mathbf{F}_V \mathbf{u}$$

Здесь давление  $p$  предварительно нормировано на  $d_u^2 \rho u^{-2}$ , а координаты, вдоль которых вычисляются компоненты градиента, отнесены к  $d_u$ . Как показывают вычисления, диагональные компоненты  $\mathbf{F}_V$  в общем случае не равны друг другу. Этот факт позволяет утверждать, что пакет сеток (и, в частности, одна сетка) представляет собой анизотропную пористую среду. Гидравлическая анизотропия сеток, приводящая к несовпадению направлений градиента давления и вектора  $\mathbf{f}_V$  с направлением скорости потока, имеет ряд интересных следствий. В частности, можно утверждать, что сетка, расположенная в неограниченном потоке, будет отклонять вектор его скорости, если скорость набегающего потока не перпендикулярна плоскости сетки. В этом смысле сетка подобна решетке профилей.

Рассмотрим пакет сеток, помещенный в трубе. Площадь поперечного сечения трубы обозначим  $S$ , объем пакета —  $V$ , его протяженность вдоль оси трубы —  $L$ . Заметим, что для пакета, расположенного под углом к оси трубы,  $L \neq H$ . Очевидно, разность сил давления в потоке до и после пакета  $\Delta p S$  должна равняться соответствующей проекции силы сопротивления пакета, которая выражается взятым со знаком минус скалярным произведением  $(\mathbf{f}_V, \mathbf{e}) V$ , где  $\mathbf{e}$  — единичный вектор, направленный вдоль оси трубы по потоку. Учитывая, что  $V/S=L$ , для  $\Delta p$  получим

$$\Delta p/L = -(\mathbf{e}, \mathbf{F}_V \mathbf{e}) u \quad (13)$$

Здесь использовано равенство  $\mathbf{u} = eu$ . Величина  $\Delta p$  безразмерна так же, как выше давление  $p$ ,  $L$  отнесена к  $d_u$ .

Введем безразмерную удельную поверхность либо пакета сеток  $a$ , равную размерной величине, умноженной на  $d_u$ . Если тензор  $\mathbf{F}_V$  поделить на  $a^2/\epsilon^3$ , то диагональные компоненты полученного тензора  $\mathbf{K}$  будут константами Козени [4] по направлениям:  $k_x, k_y, k_z$ . Обозначим координаты вектора  $\mathbf{e}$  во введенной системе координат  $e_x, e_y, e_z$ . Это будут, очевидно, косинусы соответствующих углов. Используя введенные обозначения, формулу (13) можно переписать в виде

$$\Delta p/L = -(a^2/\epsilon^3) (k_x e_x^2 + k_y e_y^2 + k_z e_z^2) \quad (14)$$

Выражение (14) представляет собой окончательный результат. Оно позволяет рассчитать гидравлическое сопротивление пакета сеток в любом направлении, задаваемом вектором  $\mathbf{e}$ . Как видно из (13), (14), сопротивление пакета в общем случае зависит от направления  $\mathbf{e}$  и выражается квадратичной формой  $(\mathbf{e}, \mathbf{F}_V \mathbf{e})$ , принимающей в системе  $xyz$  канонический вид.

Заметим, что при выводе (14) неявно предполагалось, что сетки в пакете ориентированы одинаковым образом. Это ограничение снимается ниже.

Исходными параметрами сетки, от которых зависят ее безразмерная удельная поверхность, пористость и константы Козени, могут быть, например, следующие;  $\kappa, \delta_0, \nu_2, \xi$ . Вместо  $\xi$  будем использовать пористость сетки  $\epsilon$ . Можно утверждать, что  $a, k_x, k_y, k_z$  являются функциями аргументов  $\kappa, \delta_0, \nu_2, \epsilon$ . Рассчитанные по полученным выше формулам зависимости констант Козени от  $\kappa, \delta_0, \epsilon$  представлены на фиг. 2—4 соответственно для сеток полотняного, полусаржевого и саржевого переплетений. При вычислениях было принято  $\nu_2=1$ , т. е. рассматривалась «идеальная» сетка, у которой вследствие отсутствия деформации утков при подбивке шаг между утками равен их диаметру. Пористость и удельная поверхность

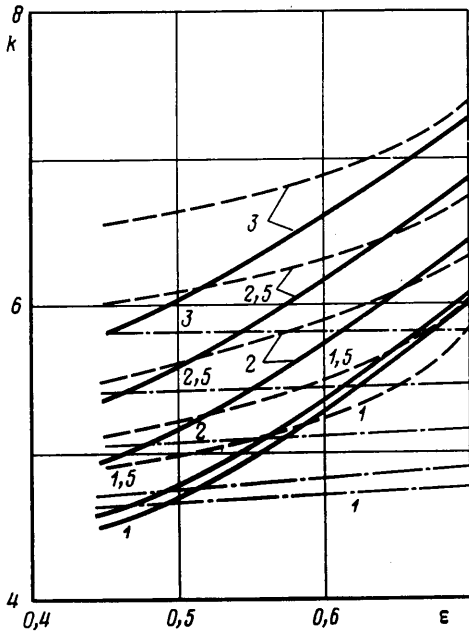
$n_o \times n_u$	$\kappa$	$\delta_0$	$\varepsilon'$	$a$	$k_z$	$k'_z$	Источник
24×110	0	1,43	0,575	1,76	5,17	6,43 <sup>1</sup>	[7]
			0,572	1,57	5,16	6,40	[10]
30×150	0	1,28	0,624	1,53	5,43	6,98 <sup>1</sup>	[7]
50×250	0	1,23	0,592	1,73	5,20	6,62 <sup>1</sup>	[7]
			0,611	1,55	5,31	10,3	[10]
165×800	0,5	1,40	0,426	2,07	3,96	1,83	[10]
			0,310	2,35 <sup>2</sup>	3,21	0,23	[8]
			0,426	2,07	3,96	1,83	[9]
			0,387 <sup>3</sup>	2,17 <sup>3</sup>	3,65	3,87 <sup>1</sup>	[1]
200×600	0,5	1,75	0,562	1,42	5,18	5,04	[9]
80×700	1	1,32	0,425	2,22	4,68	4,76 <sup>1</sup>	[7]
			0,416	2,28 <sup>2</sup>	4,59	3,85	[8]
			0,403 <sup>3</sup>	2,31 <sup>3</sup>	4,43	6,39	[8]
			0,369	2,42	4,13	2,49	[9]
200×1400	1	1,75	0,358	2,36	3,88	4,01 <sup>1</sup>	[7]
			0,256	2,60 <sup>2</sup>	2,98	1,35	[8]
			0,275 <sup>3</sup>	2,52 <sup>3</sup>	3,14	2,59	[8]
			0,267	2,54	3,07	2,99 <sup>1</sup>	[8]
			0,248	2,48	2,83	1,39	[8]
			0,275 <sup>3</sup>	2,52 <sup>3</sup>	3,14	3,34 <sup>1</sup>	[1]
			0,248	2,62	2,83	1,35	[10]
325×2300	1	1,40	0,350	2,37	3,87	3,92 <sup>1</sup>	[7]
325×2300	1	1,52	0,297	2,55	3,32	3,32 <sup>1</sup>	[8]
			0,245	2,76	2,89	1,37	[8]
			0,245	2,76	2,89	1,02	[10]
			0,262 <sup>3</sup>	2,69 <sup>3</sup>	3,05	2,06 <sup>1</sup>	[1]
375×2300	1	1,40	0,261	2,72	3,02	2,92 <sup>1</sup>	[8]
250×1370	1	1,36	0,226	2,86	2,70	2,53 <sup>1</sup>	[8]
			0,226 <sup>3</sup>	2,86 <sup>3</sup>	2,70	2,29 <sup>1</sup>	[1]
720×140	0	3,03	0,514	1,17	6,16	7,35	[10]

определялись по формулам, приведенным в [6]. На фиг. 2–4 штриховая линия соответствует  $k_x$ , штрихпунктирная —  $k_y$ , сплошная —  $k_z$ . Цифры около кривых обозначают величину  $\delta_0$ . Фигура 2 соответствует  $\kappa=0$ , фиг. 3 —  $\kappa=0,5$ , фиг. 4 —  $\kappa=1$ .

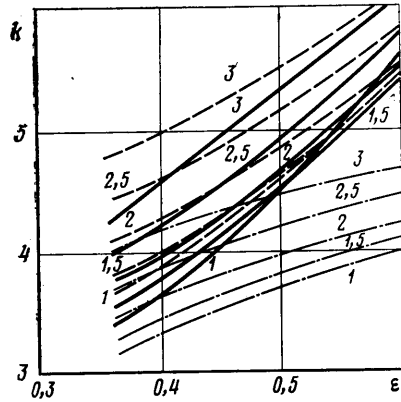
Насколько известно авторам, экспериментально исследованы гидравлические характеристики сеток только в нормальном к их плоскости направлении, т. е. в направлении оси  $z$  введенной системы координат. Таким образом, сравнение полученных выше результатов с экспериментальными данными может быть осуществлено только для величины  $k_z$ . В таблице приведены экспериментальные значения констант Козени  $k'_z$  и их теоретические значения  $k_z$ , определенные с помощью фиг. 2–4 по измеренной пористости сетки  $\varepsilon'$ . Цифровыми индексами обозначены: 1 — наиболее надежные и используемые на практике данные, 2 — данные, вычисленные по стандартным исходным параметрам сетки по формулам работы [6], 3 — данные, полученные как среднее арифметическое других значений, приведенных в таблице и относящихся к данной сетке. На фиг. 5 дано сравнение величин  $k'_z$  и  $k_z$ , а также приведена эмпирическая зависимость Армора — Кэннона [7]  $k_z=11,2 \varepsilon$  и теоретические значения  $k_z$  без учета экранирования. Здесь 1 — теоретические значения  $k_z$ , 2 — экспериментальные, 3 — наиболее надежные экспериментальные, 4 — теоретические без учета экранирования, сплошная линия — уравнение Армора — Кэннона. Негладкий характер поведения теоретических значений  $k_z$  объясняется тем, что  $k_z$  — функция нескольких аргументов и представление ее в зависимости только от пористости довольно условно.

Анализ таблицы и фиг. 5 позволяет сделать следующие выводы.

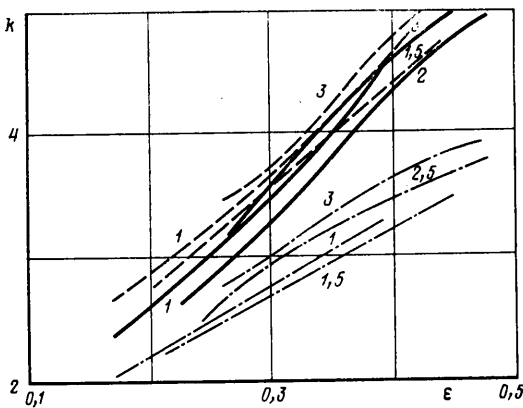
1. Теоретические значения  $k_z$  удовлетворительно согласуются с экспериментальными. Наилучшее согласие наблюдается с данными Армора и Кэннона [7] и данными фирмы «Мартин Мариетта», приведенными в [1, 8], т. е. самыми надежными и широко используемыми на практике.



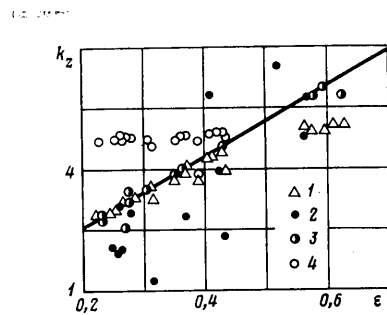
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

2. Зависимость для  $k_z$ , полученная в [7], хорошо согласуется с теоретическими значениями в диапазоне пористости примерно от 0,6 до 0,2 для небольших  $\delta_0$ . Однако, как видно из фиг. 2–4, рост  $\delta_0$  при фиксированном  $\epsilon$  приводит к росту  $k_z$ . Следовательно, для больших  $\delta_0$  ( $\delta_0 \geq 4$ ) разница между  $k_z$ , вычисленным по уравнению Армора – Кэннона, и теоретическим значением может быть существенной. По-видимому, для больших  $\delta_0$  величина  $k_z$ , рассчитанная по формулам данной работы, будет лучше соответствовать действительности. Обоснованием этому утверждению служит то, что для больших  $\delta_0$  зависимость Армора – Кэннона, вообще говоря, неприменима, ибо это – чисто эмпирическая корреляция, построенная в области малых  $\delta_0$  ( $1,28 \leq \delta_0 \leq 1,75$ ).

3. Как видно из фиг. 5, учет экранирования проволочек необходим. Этот вывод особенно относится к сеткам с малой пористостью ( $\epsilon < 0,4$ ).

4. Учитывая удовлетворительное согласие с экспериментом величины  $k_z$ , можно предположить применимость полученных в работе соотношений для расчета гидравлического сопротивления сетки в направлении осей  $x$  и  $y$ , а следовательно, и в произвольном направлении.

Как было отмечено выше, при выводе (13), (14) предполагалось, что сетки в пакете уложены специальным образом, а именно так, что система координат для некоторой сетки  $xuz$  отличается от системы для любой другой сетки только положением своего центра. Другими словами, предполагалась одинаковая ориентация всех систем координат. Избавимся от этого ограничения. Рассмотрим пакет сеток с произвольной ориентацией систем координат в нем. В качестве общей системы координат выберем систему первой по потоку сетки. Тогда положение системы координат  $i$ -й сетки будет задаваться углом  $\theta_i$  между осями  $x$  общей системы и системы  $i$ -й сетки. Угол будем отсчитывать против часовой стрелки. Очевидно, всегда  $\theta_1=0$ . Переход от специальной ориентации сеток в пакете к произвольной не изменяет основного соотношения (13), если вместо тензора  $F_V$  использовать некоторый другой тензор. Как легко установить, это будет «средний» тензор

$$\langle F_V \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N F_{V_i}$$

где  $F_{V_i}$  — тензор  $i$ -й сетки. Таким образом, замена в (13)  $F_V$  на  $\langle F_V \rangle$  делает это соотношение справедливым для пакета с произвольной ориентацией сеток. Что касается формулы (14), то она изменяет свой вид

$$\Delta p/L = -a^2 e^{-3} \langle \mathbf{K} \rangle e \quad (15)$$

Заметим, что матрицы тензоров  $\langle \mathbf{K} \rangle$  и  $\langle F_V \rangle$  в общем случае не имеют диагональной структуры, и соответствующие квадратичные формы не приводятся к каноническому виду.

Получим формулы для вычисления матриц  $\langle \mathbf{K} \rangle$  и  $\langle F_V \rangle$ . Обозначим матрицу, например, тензора  $K_i$   $i$ -й сетки в ее системе координат  $K_i'$ , в общей системе —  $K_i$ . Тогда, как известно, эти матрицы будут связаны следующим соотношением (здесь  $T_i$  означает транспонированную матрицу):

$$K_i = T_i \circ K_i', T_i = \begin{vmatrix} \cos \theta_i & \sin \theta_i & 0 \\ -\sin \theta_i & \cos \theta_i & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (16)$$

Специальная структура последних строки и столбца матрицы  $T_i$  отражает условие параллельности осей  $z$  систем координат всех сеток, т. е. условие параллельности слоев сеток в пакете. Из (16) следует, что такую же структуру будут иметь последние строки и столбец матриц  $\langle K \rangle$  и  $\langle F_V \rangle$ , т. е. это будут нули, за исключением диагональных элементов. Причем эти диагональные элементы будут такими же, как и для пакета с одинаковой ориентацией сеток. В частности, последний диагональный элемент  $\langle K \rangle$  будет равен  $k_z$ . Вычислим другие элементы матрицы  $\langle K \rangle$ . Так как эта матрица симметрична, то достаточно вычислить три ее элемента. Из (16) для двух диагональных элементов получим

$$\langle k_x \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (k_x \cos^2 \theta_i + k_y \sin^2 \theta_i) \quad (17)$$

$$\langle k_y \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (k_x \sin^2 \theta_i + k_y \cos^2 \theta_i)$$

Для недиагонального элемента имеем

$$\langle k_{xy} \rangle = \langle k_{yx} \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (k_x - k_y) \cos \theta_i \sin \theta_i \quad (18)$$

Аналогично выглядят выражения для элементов  $\langle F_V \rangle$ .

Формулы (17), (18) решают поставленную задачу, позволяя определить матрицы  $\langle K \rangle$  и  $\langle F_V \rangle$  по заданной ориентации сеток в пакете.

Остановимся на одном практически интересном случае, когда число сеток в пакете  $N$  достаточно велико и сетки ориентированы случайным образом, т. е. угол  $\theta_i$  может принимать с равной вероятностью любое значение между 0 и  $2\pi$ . В этом случае средние арифметические случайных функций справа в (17), (18) можно приближенно заменить их математическими ожиданиями

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin^2 \theta_i \approx M \sin^2 \theta = 0,5$$



$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos^2 \theta_i \approx M \cos^2 \theta = 0,5$$

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \cos \theta_i \sin \theta_i \approx M \cos \theta \sin \theta = 0$$

С учетом этих равенств (17), (18) можно переписать в виде

$$\langle k_x \rangle \approx \langle k_y \rangle \approx 0,5 (k_x + k_y)$$

$$\langle k_{xy} \rangle = \langle k_{yx} \rangle \approx 0$$
(19)

Из формул (19) следует, что для случайно собранного пакета достаточно большого числа сеток матрицы  $\langle K \rangle$  и  $\langle F_V \rangle$  практически не отличаются от диагональных, причем первые два элемента равны друг другу. Этот результат в свою очередь приводит к выводу о приближенной гидравлической изотропии такого пакета в плоскости сеток.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. SS/RCS Surface tension propellant acquisition/Expulsion Tancage Technology.— NASA CR 144 412, 1978. 278 p.
2. Blatt M. H., Aydelott J. C. Capillary device passive thermal conditioning.— J. Spacecraft and Rockets, 1978, v. 15, № 4, p. 236–241.
3. Ханпель Дж., Бреннер Г. Гидродинамика при малых числах Рейнольдса. М.: Мир, 1976. 630 с.
4. Аэров М. Э., Годес О. М. Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим зернистым слоем. Л.: Химия, 1968. 510 с.
5. Eninger J. E. Capillary flow through heat-pipe wicks.— AIAA Pap., 1975, № 661. 10 p.
6. Курпатенков А. В., Поляев В. М., Синцов А. Л. Коэффициент теплообмена в пакете сеток. Геометрическая модель сетки. Пористость, удельная поверхность.— Изв. вузов. Сер. машиностроение, 1983, № 11, с. 45–49.
7. Armour J. C., Cannon J. N. Fluid flow through woven screens.— AIChE Journal, 1968, v. 14, № 3, p. 415–420.
8. Ludewig M., Omori S., Rao G. L. Pressure drop woven screens under uniform and nonuniform flow conditions. NASA CR 120 559, 1974. 143 p.
9. Dodge F. T., Ricker R. E. Flow of liquid jets through closely woven screens.— J. Spacecraft and Rockets, 1978, v. 15, № 4, p. 213–218.
10. Kady E. Study of thermodynamic vent and screen baffle integration for orbital storage transfer of liquid hydrogen.— NASA CR 134 748, 1974, p. 11–15.

Москва

Поступила в редакцию  
27.VII.1984