МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 • 1985

УДК 532.529+532.517.4

О СЛОИСТЫХ СТРУКТУРАХ НА КОНЕЧНОЙ СТАДИИ ВЫРОЖДЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В СТРАТИФИЦИРОВАННЫХ ЖИДКОСТЯХ

ГОРОДЦОВ В. А.

Структурообразование в сплошных средах, как правило, связано с нелинейными процессами и происходит в результате потери устойчивости исходного состояния [1]. В частности, в неоднородных (стратифицированных) жидкостях с плотностью, увеличивающейся в направлении силы тяжести, таким способом могут формироваться слоистые, ступенчатые структуры при ламинарной «двойной» диффузии [2–4], при развитии турбулентного перемешивания [5, 6] и т. п. Однако и на линейной стадии вырождения турбулентности в устойчиво стратифицированной жидкости могут выявляться слоистые структуры. Это может происходить за счет более быстрого «вымирания» большей части степеней свободы и слабой изменчивости остальных почти горизонтальных движений, мало искажающих основную стратификацию.

В однородной вязкой жидкости затухание турбулентных возмущений на конечной стадии вырождения ($\sim\exp(-\nu k^2t+i\mathbf{kr})$ [7]) не зависит от направления волнового вектора возмущения $\mathbf{k}$ и при больших временах выживают наиболее крупномасштабные возмущения ($k\to0$). В статифицированных жидкостях благодаря ориентирующему влиянию силы тяжести и возможности почти безынерционного баланса вязких и плавучих сил наряду с подобными изотропно затухающими возмущениями долгоживущими оказываются также более мелкомасштабные движения с почти вертикальными волновыми векторами (слоистые структуры).

Ниже анализируется поведение возмущений экспоненциально стратифицированной жидкости на конечной линейной стадии их затухания в пределе больших времен ($t\to\infty$). При этом говорится о турбулентных движениях в том смысле, что в начале линейной стадии имеется достаточно представительный набор разнообразных возмущений. В п. 1 оценивается роль в эволюции этих возмущений одного вязкого процесса переноса, в п. 2 – двух процессов переноса (вязкости с теплопроводностью или диффузией), в п. 3 – трех (вязкости с теплопроводностью и диффузией или с двумя типами диффузии). Проведенные упрощения анализа опираются на интерес к наиболее медленно затухающим возмущениям и на большие величины чисел Прандтля для обычных жидкостей.

1. Затухание возмущений при учете вязкости. Уравнения малых линейных возмущений несжимаемой вязкой однородно стратифицированной (с постоянной частотой плавучести N) жидкости в приближении Буссинеска, пренебрегая другими процессами переноса, можно записать в виде [2]

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t}=-\nabla p+\rho g\mathbf{e}+\nu\Delta\mathbf{v},\quad \nabla\mathbf{v}=0 \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{N^2}{g}\mathbf{ev} \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{v}$, p, ρ — возмущения скорости, давления и плотности (плотность основного состояния принята за единицу), x, y, z, t — пространственные переменные и время, $\nabla=(\partial/\partial x,\ \partial/\partial y,\ \partial/\partial z)$, $g\mathbf{e}$ — вектор ускорения силы тяжести ($\mathbf{e}^2=1$).

Показатель затухания σ для элементарного возмущения с фиксированным волновым вектором $\sim\exp(\sigma t+i\mathbf{kr})$ определяется в соответствии с уравнениями (1.1), (1.2) из дисперсионного соотношения

$$\sigma(\sigma+\nu k^2)=-\omega_0^2, \qquad \omega_0=Nk_h/k, \qquad k_h^2=k^2-(\mathbf{ke})^2 \tag{1.3}$$

и все возмущения по характеру их затухания можно разбить на два класса. Крупномасштабные возмущения с волновыми числами $k<k_0=(2\omega_0/\nu)^{1/2}$ затухают с осцилляциями ($\operatorname{Re}\sigma=-\nu k^2/2$, $\operatorname{Im}\sigma=\pm\omega_0(1-k^4/k_0^4)^{1/2}$), причем при $k<0{,}4k_0$ частоты осцилляций практически не отличаются от частот незатухающих внутренних волн $\omega_0=\omega_0(\mathbf{k})$ [2], а амплитуды падают менее чем в e раз за один период колебаний. Мелкомасштабные возмущения ($k>k_0$) отличает монотонный характер их затухания ($\operatorname{Im}\sigma=0$; $2\sigma/(\nu k^2)=$ $=-1\pm(1-k_0^4/k^4)^{1/2}$). Возмущения с $k=k_0$ также затухают без осцилляций по типу $(c_1+c_2t)\exp(-\omega_0 t)$ (случай вещественного кратного корня $\sigma=-\omega_0$).

На конечной стадии вырождения (при $t\to\infty$) среди возмущений с фиксированным направлением волнового вектора, т. е. с $\theta=\arcsin\omega_0/N=\mathrm{const}$, выживают наиболее медленно затухающие длинные ($k\ll k_0$) внутренние волны $\sim\exp(\pm i\omega_0 t+i\mathbf{kr})\exp(-\nu k^2t/2)$ и очень мелкомасштабные ($k\gg k_0$) апериодически затухающие возмущения $\sim\exp(-\omega_0^2k^{-2}\nu^{-1}t+i\mathbf{kr})$. Причем последние затухают медленнее в более вязкой жидкости. Такая особенность обязана возможности безынерционного баланса между силами плавучести и вязкого трения при $\sigma\approx\omega_0^2/(\nu k^2)\ll\nu k^2$.

Для рассматриваемых элементарных возмущений в силу (1.1), (1.2) имеются взаимосвязи между характеристиками возмущений (из-за линейности задачи одна из амплитуд произвольна)

$$p=-ig\frac{\mathbf{ke}}{k^2}\rho, \qquad (\sigma+\nu k^2)\mathbf{ev}=\frac{g\omega_0^2}{N^2}\rho \tag{1.4}$$

$$-\mathbf{k}_h\mathbf{v}_h=(\mathbf{ke})(\mathbf{ev}), \qquad (\sigma+\nu k^2)[\mathbf{ke}]\mathbf{v}=0 \tag{1.5}$$

так что пульсации давления всегда в противофазе, а скорости мелкомасштабных движений с $\sigma\ll\nu k^2$ в фазе с пульсациями плотности. Одна из горизонтальных компонент скорости $[\mathbf{ke}]\mathbf{v}/k$ затухает независимо от пульсаций плотности, т. е. как в однородной вязкой жидкости. Поскольку $[\mathbf{ke}]\mathbf{v}=-\mathbf{e}[\mathbf{k}_h\mathbf{v}_h]$, это фактически относится к поведению завихренных движений в горизонтальной плоскости.

Показатель затухания мелкомасштабных движений $\omega_0^2/(\nu k^2)=$ $=N^2\sin^2\theta/(\nu k^2)$ особенно мал у возмущений с малым наклоном волнового вектора к вертикали ($\theta\to0$). В пределе $\theta\to0$ и $k_0=(2\omega_0/\nu)^{1/2}\to0$, так что все возмущения с вертикальными волновыми векторами попадают в класс мелкомасштабных монотонно затухающих.

В итоге на конечной стадии вязкого вырождения турбулентности сохранившиеся возмущения будут состоять из длинных внутренних волн (всех направлений, за исключением вертикального) и мелкомасштабных монотонно затухающих движений. Причем чем больше масштаб последних, тем вертикальнее их волновые векторы.

Этот вывод относится к периоду вязкого затухания $t\sim(\nu k_m^2)^{-1}$. Здесь характерное минимальное волновое число k_m определяется начальными размерами пятна возмущений и размерами бассейна L ($k_m\sim1/L$). При больших временах нужно принимать во внимание и более медленные, чем вязкий (ν), процессы переноса, а именно теплопроводность ($\varkappa$) и диффузию (D).

2. Затухание возмущений при учете двух процессов переноса. Если стратификация создается одним таким фактором, как тепло или соль, и принимается во внимание диффузия последних, то линейная эволюция возмущений будет описываться уравнениями (1.1) и уравнением

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}=-\frac{N^2}{g}\mathbf{ev}+\varkappa\Delta\rho \tag{2.1}$$

вместо (1.2). В этом пункте под $\varkappa$ подразумевается коэффициент температуропроводности при термической стратификации и коэффициент диффузии — при солевой (обычно $\nu>\varkappa$).

Для коэффициента затухания элементарных возмущений теперь имеем дисперсионное уравнение

$$(\sigma+\varkappa k^2)(\sigma+\nu k^2)=-\omega_0^2 \tag{2.2}$$

которое остается квадратичным по σ и по-прежнему включает зависимость от направления волновых векторов через скалярную характеристику $\omega_0=\omega_0(\mathbf{k})$.

Возмущения с фиксированным направлением волнового вектора опять делятся на два класса: затухающие крупномасштабные внутренние волны ($k<k_0\equiv(2\omega_0)^{1/2}(\nu-\varkappa)^{-1/2}$) и мелкомасштабные возмущения с апериодическим характером затухания. Для длинных ($k\ll k_0$) внутренних волн $\sigma\approx\approx\pm i\omega_0-(\nu+\varkappa)k^2/2$, а для наиболее медленно затухающих мелкомасштабных возмущений (отбирается меньший по модулю корень уравнения (2.2))

$$\sigma=-\frac{\nu+\varkappa}{2}k^2\left\{1-\frac{\nu-\varkappa}{\nu+\varkappa}\left(1-\frac{k_0^4}{k^4}\right)^{1/2}\right\},\quad k>k_0 \tag{2.3}$$

В отличие от результатов предыдущего пункта здесь среди мелкомасштабных возмущений минимальную скорость затухания имеют возмущения с конечной величиной волнового числа $k=k_{m1}$

$$k_{m1}^2=k_0^2\frac{\nu+\varkappa}{2\sqrt{\nu\varkappa}}=\frac{\omega_0}{\sqrt{\nu\varkappa}}\frac{\nu+\varkappa}{\nu-\varkappa},\quad \sigma_{m1}=-\frac{2\omega_0}{\nu-\varkappa}\sqrt{\nu\varkappa} \tag{2.4}$$

Таким образом, наиболее медленно затухающими оказываются длинные внутренние волны с показателем затухания $|\mathrm{Re}\,\sigma|=(\nu+\varkappa)k^2/2$ и монотонно затухающие мелкомасштабные движения с волновым числом $k_{m1}>k_0$ и декрементом σ_{m1} (отметим здесь, что в аналогичном исследовании вырождения турбулентности с учетом двух процессов переноса [8] класс медленно затухающих крупномасштабных волн выпал из рассмотрения). Поскольку $\sigma_{m1}\sim\omega_0=N\sin\theta$, то среди мелкомасштабных наиболее долгоживущими будут возмущения с почти вертикальными волновыми векторами ($\theta\to0$). Их пространственный масштаб $\sim k_{m1}^{-1}$ фактически уже не так мал, и внешние геометрические ограничения будут существенны для медленно затухающих возмущений обоих классов.

Чтобы как-то учесть роль таких ограничений в процессе вырождения турбулентных движений, предположим, следуя [8], что для возможных значений горизонтальных компонент волновых векторов возмущений имеет место неравенство

$$k_h\geqslant k_L=2\pi/L \tag{2.5}$$

В [8] оно связывается с конечной горизонтальной протяженностью бассейна L. Еще меньшими могут быть начальные размеры пятна турбулентности, но при этом следует помнить об изменении размеров пятна при его коллапсе еще до наступления конечной стадии вырождения турбулентности.

Если искать экстремум функции (2.3) при условии $k_h=k_L=\mathrm{const}$, то с учетом соотношения $(\nu-\varkappa)k_0^2=2Nk_h/k$ находим для волнового числа k_{m2}, при котором достигается минимум $|\sigma|$, и соответствующего декремента затухания формулы

$$k_{m2}^{-6}=\frac{\nu^2+\varkappa^2}{N^2k_L^2}\left(\sqrt{1+\nu\varkappa\left(\frac{\nu-\varkappa}{\nu^2+\varkappa^2}\right)^2}-1\right)\approx\frac{\nu\varkappa}{2N^2k_L^2}\frac{(\nu-\varkappa)^2}{\nu^2+\varkappa^2}$$

$$\sigma_{m2}\approx-(\nu+\varkappa-\sqrt{\nu^2-\nu\varkappa+\varkappa^2})\left[\frac{2N^2k_L^2}{\nu\varkappa}\cdot\frac{\nu^2+\varkappa^2}{(\nu-\varkappa)^2}\right]^{1/3} \qquad (2.6)$$

Приближенное выражение для k_{m2} обладает достаточной точностью, поскольку точное подкоренное выражение отличается от единицы не более чем на 1/8.

В частном случае больших чисел Прандтля ($\nu/\varkappa\gg1$), который часто реализуется в лабораторных и природных условиях (в воде для тепла ~10, для соли $\sim10^3$), формулы (2.6) упрощаются и переходят в формулы, полученные в работе [8]

$$k_{m2}\approx1{,}12\left(\frac{N^2k_L^2}{\nu\varkappa}\right)^{1/6},\quad \sigma_{m2}\approx-1{,}89\varkappa\left(\frac{N^2k_L^2}{\nu\varkappa}\right)^{1/3} \qquad (2.7)$$

В силу монотонно растущего характера зависимости k_{m2} от k_L ясно, что формулы (2.6), (2.7) будут описывать точку минимума зависимости $|\sigma|$ от k^2 из (2.3) при условии (2.5).

Таким образом, на этапе вырождения, на котором существенны два процесса переноса (ν, $\varkappa$), выявляется мелкомасштабная структура возмущений с почти горизонтальными полосками с характерным вертикальным размером $\sim2\pi/k_{m2}$ (горизонтальный размер $\sim L$). Эта тонкая структура слабо искажается длинными внутренними волнами с частотами $\omega_0=N\sin\theta$. Ввиду последнего обстоятельства здесь уместно подчеркнуть, что присутствие длинных внутренних волн в бассейне конечных размеров само может приводить к ограничениям типа $\theta\geqslant\theta_0$, или $\omega_0\geqslant N\theta_0$, на возможные направления мелкомасштабных возмущений (θ_0 может оказаться выражающимся через L). Но при таком условии масштаб микроструктуры должен находиться из (2.4) при подстановке $\omega_0\to N\theta_0$. Тем самым получается несколько другое предсказание для зависимости размеров полосок от параметров. Однако из сравнения (2.6), (2.7) с (2.4) ясно, что различия не велики.

3. Затухание возмущений при стратификации, создаваемой двумя факторами. Пусть градиент плотности основного состояния создается градиентами двух характеристик (например, температуры и солености), причем каждый из факторов в отдельности ведет к гидростатически устойчивому распределению плотности ($N^2=N_1^2+N_2^2$, $N_{1,2}^2=gd\ln\rho_{1,2}/dz>0$). Последним рассматриваемый случай отличается от случая конвекции с «двойной диффузией» [2]. Пренебрежем перекрестными термодинамическими эффектами [9]. Тогда для малых возмущений основного состояния с $N=\mathrm{const}$ в приближении Буссинеска при учете диффузии обеих характеристик будем иметь в дополнение к (1.1)

$$\frac{\partial\rho_{1,2}}{\partial t}=-\frac{N_{1,2}^2}{g}\mathbf{ev}+\varkappa_{1,2}\Delta\rho_{1,2},\quad \rho=\rho_1+\rho_2 \qquad (3.1)$$

Из этих уравнений для элементарных возмущений $\sim\exp(\sigma t+i\mathbf{kr})$ следуют связи между характеристиками вида (1.4), (1.5) и

$$(\sigma+\nu k^2)(\sigma+\varkappa_{1,2}k^2)\rho_{1,2}=-\frac{N_{1,2}^2}{N^2}\omega_0^2\rho,\quad \rho=\rho_1+\rho_2 \qquad (3.2)$$

условие совместности которых оказывается теперь уравнением третьей степени относительно σ

$$(\sigma+\nu k^2)(\sigma+\varkappa_1 k^2)(\sigma+\varkappa_2 k^2)+\omega_0^2(\sigma+\gamma k^2)=0$$
$$\varkappa_1>\gamma\equiv\varkappa_2\frac{N_1^2}{N^2}+\varkappa_1\frac{N_2^2}{N^2}>\varkappa_2 \tag{3.3}$$

Причем приведенное неравенство отражает предположение $\nu>\varkappa_1>\varkappa_2$.

Нетрудно убедиться, что полином третьей степени в (3.3) является гурвицевым [10], т. е. вещественные части всех его корней отрицательны ($\mathrm{Re}\,\sigma<0$) и, следовательно, возмущения являются затухающими при любых соотношениях между параметрами.

Один из корней уравнения нечетной степени (3.3) обязательно вещественный, а комплексные корни — комплексно-сопряженные в силу вещественности коэффициентов.

При малых и больших k^2 для этих корней соответственно имеем

$$\sigma_1\approx-\gamma k^2,\quad \sigma_{2,3}\approx\pm i\omega_0-\frac{\nu+\varkappa_1+\varkappa_2-\gamma}{2}k^2$$
$$\sigma_1\approx-\varkappa_2 k^2,\quad \sigma_2\approx-\varkappa_1 k^2,\quad \sigma_3\approx-\nu k^2 \tag{3.4}$$

Наиболее медленное затухание возмущений теперь обеспечивает корень, являющийся вещественным во всем диапазоне изменения k^2 (ср. п. 1 и 2)

$$-\varkappa_2 k^2\gtrless\sigma_1\gtrless-\gamma k^2 \tag{3.5}$$

При больших числах Прандтля $\nu\gg\varkappa_1>\varkappa_2$ (далее анализируется только такой случай) «медленный» корень σ_1 описывает безынерционные движения, для которых инерционные силы пренебрежимо малы по сравнению с вязкими ($|\sigma_1|<\gamma k^2\ll\nu k^2$). При этом он удовлетворяет упрощенному квадратичному дисперсионному уравнению, следующему из (3.3), и может быть представлен в виде

$$\sigma=-\frac{k^2}{2}\left\{\varkappa_1+\varkappa_2+\frac{\omega_0^2}{\nu k^4}-\sqrt{\left(\varkappa_1-\varkappa_2-\frac{\omega_0^2}{\nu k^4}\right)^2+4(\varkappa_1-\gamma)\frac{\omega_0^2}{\nu k^4}}\right\} \tag{3.6}$$

Здесь опущен индекс у σ, поскольку в дальнейшем внимание сосредоточено на этом корне.

При $\varkappa_1\gg\varkappa_2$ (для термохалинной стратификации воды $\varkappa_1/\varkappa_2\sim10^2$) коэффициент затухания σ становится особенно малым по величине при малых волновых числах ($k^2\to0$)

$$\sigma=-\gamma k^2+\frac{\nu(\varkappa_1-\gamma)(\gamma-\varkappa_2)}{\omega_0^2}k^6+\ldots \tag{3.7}$$

и при $k\approx k_m$ вблизи ярко выраженного (если дополнительно $\gamma\gg\varkappa_2$) экстремума

$$k_m^4\approx\frac{\omega_0^2}{\nu\varkappa_1}\frac{\gamma}{\varkappa_2},\quad \sigma_m\approx-2\varkappa_2 k_m^2=-2\omega_0\left(\frac{\gamma\varkappa_2}{\nu\varkappa_1}\right)^{1/2} \tag{3.8}$$

Таким образом, при $\nu\gg\varkappa_1>\gamma\gg\varkappa_2$ наиболее живучими оказываются два типа апериодически затухающих возмущений: крупномасштабные движения с $k^2\ll\omega_0/\sqrt{\nu\varkappa_1}$ и коэффициентом затухания $|\sigma|\approx\gamma k^2$ и мелкомасштабные движения с $k^2\approx k_m^2\gg\omega_0/\sqrt{\nu\varkappa_1}$ и коэффициентом $\sigma\approx\sigma_m$ из (3.8). Уже здесь видны как сходства, так и различия с результатами предыдущих пунктов. Деление на два класса медленно затухающих возмущений остается, но теперь все они апериодические. Что касается длинных внутренних волн, то их декремент $\sim(\nu+\varkappa_1+\varkappa_2-\gamma)k^2/2\approx\nu k^2/2$ гораздо больше, чем у крупномасштабных апериодических возмущений ($\sim\gamma k^2$). Из возмущений указанных двух классов медленностью затухания особенно выделяются крупномасштабные движения с немалыми углами наклона волновых векторов к вертикали и относительно более мелкомасштабные движения с почти вертикальными волновыми векторами. Последние и представляют собой горизонтальные слоистые структуры, несколько искажаемые первыми. Для их вертикального масштаба можно аналогично изложенному в п. 2 получить оценки типа (2.4), (2.7) с заменой $\varkappa \to \varkappa_1\varkappa_2/\gamma$.

Указанная ситуация с $\nu \gg \varkappa_1 > \gamma \gg \varkappa_2$ может реализоваться, если стратификация в равной мере создается температурой и соленостью, когда $N_T^2 \sim N_S^2$, $\varkappa_1 \equiv \varkappa \gg \varkappa_2 \equiv D$, $\gamma = \varkappa N_S^2/N^2 + DN_T^2/N^2 \approx \varkappa N_S^2/N^2 \gg D$. Следует здесь отметить, что к моменту формирования обсуждаемых мелкомасштабных анизотропных структур плотностные возмущения в них ρ_T, обязанные пульсациям температуры, успевают затухнуть и слоистые структуры целиком связаны с сохранением пульсаций солености. В этом можно убедиться, анализируя (3.8) и (3.2), и соотношения (3.8) можно переписать через одни солевые характеристики $k_m^2 = N_S \sin\theta/\sqrt{\nu D}$, $\sigma_m = -2N_S \sin\theta \sqrt{D/\nu}$. С другой стороны, из анализа (1.4), (1.5), (3.8) видно, что даже малые возмущения плотности должны сопровождаться интенсивными движениями в горизонтальном направлении и лишь слабыми по вертикали.

Совершенно другая ситуация возникает, если различие между $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ не очень велико, как, например, при стратификации в растворах соли и сахара ($\varkappa_1/\varkappa_2 \approx 3$). Тогда σ из (3.6) оказывается, за исключением случая $\varkappa_1 - \gamma \ll \varkappa_2$, монотонной функцией k^2. Но и в предельном случае $\gamma \to \varkappa_1$ экстремальные точки остаются слабо выраженными, пока отношения $\varkappa_1/\varkappa_2$, $\gamma/\varkappa_2$ невелики. В итоге наиболее стойкими (при $t \to \infty$) оказываются только наиболее крупномасштабные возмущения ($k \to 0$), затухающие изотропным образом ($|\sigma| \sim \gamma k^2$). Возможность образования слоистых структур на конечной стадии вырождения можно было бы попытаться здесь связать с поведением другого корня σ_2 для уравнения (3.3), имеющего минимум $|\sigma_2|$ в области $k^2 > \omega_0/\nu$. Однако подробно обсуждавшийся корень σ_1 имеет меньшую величину, и потому на конечной стадии определяющую роль будут играть возмущения с соответствующим ему более медленным затуханием. Слоистая структура вырождается быстрее.

Таким образом, возможность выявления слоистых структур на конечной линейной стадии затухания турбулентности в стратифицированной жидкости с несколькими диффузионными процессами зависит от величины отношения их коэффициентов диффузии.

В приведенном выше анализе предполагалось, что в начале конечной стадии представлены возмущения с достаточно широким спектральным и угловым составами. Однако некоторые выделенные анизотропные структуры могут образовываться и на нелинейной стадии эволюции турбулентности [5, 6] и оказывать влияние на ее последующее вырождение [11]. Поэтому заслуживает также внимания вопрос о перестройке структур на конечной стадии.

4. Сравнение с реальной тонкой структурой. Многочисленными наблюдениями [12, 13] установлено, что почти во всей толще океана гидрофизические поля (распределения температуры, концентрации примеси, скорости течения и т. п.) имеют тонкую вертикальную структуру (иногда ее наиболее мелкомасштабную часть именуют микроструктурой). Причем при всем ее разнообразии разброс в отношениях вертикального и горизонтального масштабов длины относительно невелик, и в большинстве случаев $H/L \sim 10^{-2} - 10^{-4}$ [12].

Из обсуждавшихся выше представлений для такой структуры следует (см. (2.7))

$$\frac{H}{L} = \frac{k_L}{k_{m2}} \approx 3\left(\frac{\nu\varkappa}{N^2 L^4}\right)^{1/6} \tag{4.1}$$

так что для типичной температурной ($\varkappa \sim 10^{-7}$ м^2/с) стратификации $N \sim$ $\sim 10^{-3}$ с$^{-1}$ воды ($\nu \sim 10^{-6}$ м^2/с) при горизонтальном масштабе неоднородности $L \sim 10^3$ м, обязанном, например, внутренним волнам, будем иметь $H/L \sim 2 \cdot 10^{-3}$. Того же порядка это отношение и при солевой стратификации ($\varkappa \sim 10^{-9}$ м^2/с), и, следовательно, в обоих случаях $H \sim 1$ м. Слои такой толщины характерны для наблюдаемой тонкой структуры. Оценка по формуле (2.7) времен релаксации структуры в десятки суток также не противоречит результатам наблюдений [12, 13].

Исследования океанической тонкой структуры показали, что зачастую расслоение по температуре и солености сопровождается расслоением поля скоростей течения и интенсивными внутренними волнами. Это следует и из приведенного выше рассмотрения. В соответствии с (1.4), (1.5)

$$\frac{|\mathbf{ve}|}{|\mathbf{v}|} = \frac{k_h}{k} \sim \frac{H}{L} \tag{4.2}$$

т. е. движения в слоях должны быть практически горизонтальными. С другой стороны, из (1.4), (1.5) следует также соотношение связи кинетической (K) и потенциальной (П) энергий для затухающих элементарных возмущений.

$$\Pi = \left|\frac{\sigma + \nu k^2}{\omega_0}\right|^2 K, \quad K = \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2, \quad \Pi = \frac{g^2}{2N^2}|\rho|^2 \tag{4.3}$$

На конечной стадии затухания при преобладании температурной или солевой стратификации (п. 2) выживают возмущения двух типов: крупномасштабные ($k^2(\nu - \varkappa) \ll \omega_0$) внутренние волны и мелкомасштабные ($k^2(\nu - \varkappa) \gg \omega_0$) слоистые структуры. Для этих волн $\sigma \approx \pm i\omega_0 - (\nu + \varkappa) k^2/2$ и (4.3), как и следовало ожидать, согласуется с утверждением о равнораспределении потенциальной и кинетической энергий ($\Pi \approx K$). В случае слоистых структур (4.3) в силу (2.4) можно упростить до соотношения

$$\Pi \approx K\nu/\varkappa \tag{4.4}$$

которое позволяет заключить, что при температурной стратификации пульсации плотности $\sim 10^{-5}$ в слоях должны сопровождаться слоистыми течениями со скоростями $\sim 10^{-2}$ м/с ($v \sim \rho g N^{-1} \mathrm{Pr}^{-1/2}$). Таким же колебаниям плотности при солевой стратификации будут отвечать на порядок более медленные течения.

В океанических условиях наряду со стратификацией важную роль может играть вращение Земли. При его учете дисперсионное уравнение (2.2) заменяется на уравнение

$$(\sigma + \varkappa k^2)\left[(\sigma + \nu k^2)^2 + 4\Omega^2\left(\frac{\mathbf{ke}}{k}\right)^2\right] + \omega_0^2(\sigma + \nu k^2) = 0$$

Из анализа последнего следует, что при больших числах Прандтля вращение слабо сказывается на затухании рассмотренных медленно затухающих волновых и слоистых возмущений.

В лабораторных экспериментах при размерах бассейна $L \sim 1$ м и стратификации $N \sim 1$ с для слоистой структуры, согласно (4.1), должно быть $H/L \sim 10^{-2}$. Для времен существования слоев, согласно (2.7), получаются минуты или часы в зависимости от типа стратификации (температурной или солевой). Это подтверждается наблюдениями [8, 14].

Наблюдаемое искажение слоистой структуры внутренними волнами на конечной стадии затухания турбулентности соответствует обсуждавшемуся выводу о двух типах медленно затухающих возмущений. Причем в обычных условиях можно ожидать более медленного затухания волновых мод. Согласно п. 2, для декремента затухания волн имеем $|\sigma| \approx (\nu + \varkappa) k^2/2$ и для больших чисел Прандтля, полагая горизонтальные и вертикальные компоненты волновых чисел сопоставимыми с k_L, для декремента имеем оценку $|\sigma|\approx\nu k_L^2$. Такой декремент окажется больше декремента затухания слоистой структуры (2.7) лишь при ограничении сверху на размер бассейна

$$L\leqslant L_0=4\nu/\sqrt{\varkappa N}$$

Критический размер L_0 составляет 10^{-1} м (10^{-2} м) при солевой (температурной) стратификации $N\sim1$ с$^{-1}$.

Таким образом, приведенные оценки показывают, что процесс образования слоистой структуры при затухании возмущений может играть определенную роль в формировании реальной тонкой структуры. Однако важнее то, что выявлена общая тенденция к формированию структур на линейной стадии эволюции стратифицированных сред. Подобная склонность может, в частности, приводить к увеличению времени существования подходящей тонкой структуры, сформировавшейся на более ранней нелинейной стадии эволюции.

В заключение отметим, что недавно появилось еще одно исследование конечной стадии вырождения турбулентности в стратифицированной среде [15]. В препринте [15] для долгоживущих возмущений несколько иначе получены результаты, согласующиеся с приведенными в п. 2 и 4. Автор благодарен А. М. Франку за предоставленную возможность своевременно ознакомиться с его результатами.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хакен Г.* Синергетика. М.: Мир, 1980. 404 с.
2. *Тернер Дж.* Эффекты плавучести в жидкостях. М.: Мир, 1977. 431 с.
3. *Хапперт Г., Тернер Дж.* Конвекция, обусловленная двойной диффузией.— В кн.: Современная гидродинамика. М.: Мир, 1984, с. 412–453.
4. *Тупицын В. С., Чашечкин Ю. Д.* Свободная конвекция над точечным источником тепла в стратифицированной жидкости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1981, № 2, с. 27–36.
5. *Ivey G. N., Corcos G. M.* Boundary mixing in a stratified fluid.— J. Fluid Mech., 1982, v. 121, p. 1–26.
6. *Thorpe S. A.* On the layers produced by rapidly oscillating a vertical grid in a uniformly stratified fluid.— J. Fluid Mech., 1982, v. 124, p. 391–409.
7. *Бэтчелор Дж. К.* Теория однородной турбулентности. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 198 с.
8. *Pearson H. J., Linden P. F.* The final stage of decay of turbulence in stably stratified fluid.— J. Fluid Mech., 1983, v. 134.
9. *McDougall T. J.* Double-diffusive convection caused by coupled molecular diffusion.— J. Fluid Mech., 1983, v. 126, p. 379–397.
10. *Курош А. Г.* Курс высшей алгебры. М.: Гостехиздат, 1955. 380 с.
11. *Weinstock J.* Effect of gravity waves on turbulence decay in stratified fluids.— J. Fluid Mech., 1984, v. 140, p. 11–26.
12. *Федоров К. Н.* Тонкая термохалинная структура вод океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1976, 184 с.
13. *Gregg M. C.* Internal waves, finestructure, microstructure and mixing in the ocean.— Rev. Geophys. Space Phys., 1979, v. 17, № 7, p. 1524–1548.
14. *Pao Y.-H.* Measurements of internal waves and turbulence in two-dimensional stratified shear flows.— In: Boundary-Layer Meteorol., 1973, v. 5, № 1–2, p. 177–193.
15. *Франк А. М.* Вырождающаяся турбулентность в стратифицированной жидкости. Препринт № 18. Красноярск: ВЦ СО АН СССР, 1984, 22 с.

Москва

Поступила в редакцию
11.VII.1984