

УДК 532.528

ОБ ОБТЕКАНИИ СУПЕРКАВИТИРУЮЩЕГО КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА ОГРАНИЧЕННЫМ ПОТОКОМ

МАКАСЕЕВ М. В.

Теоретическому исследованию влияния границ потока на кавитационное обтекание крыла конечного размаха посвящены работы [1–5]. Ввиду сложности численного решения исходных систем двумерных сингулярных интегральных уравнений получены только отдельные результаты для частных случаев, систематические исследования отсутствуют. Необходимость учета границ усложняет решение одной из основных проблем кавитационной теории крыльев конечного размаха — определение формы каверны в плане. Указанная проблема связана с трудностями, обусловленными нелинейностью зависимости функции, описывающей форму каверны в плане, от числа кавитации и других параметров течения. Большинство авторов, исходя из предположения, что форма хвостовой части каверны большой протяженности оказывает незначительное влияние на коэффициенты гидродинамических сил, считали линию замыкания каверны заданной, а число кавитации неизвестным. Это предположение, которое можно считать справедливым только для достаточно малых чисел кавитации, значительно упрощает решение исходной задачи, давая возможность свести ее к решению систем линейных алгебраических уравнений. В общем же случае применение известных численных методов приводит к нелинейным системам.

При заданном числе кавитации и неизвестной форме каверны для безграничного потока расчеты проводились в работах [6–8], с учетом свободной поверхности — в [4]. Приближенная форма каверны в плане определялась в ходе итерационного процесса с последовательным уточнением числа кавитации в [8] и выполнимости условия геометрической замкнутости каверны в [4]. В [6] на основе принципа минимума кавитационного сопротивления и открытой линейной кавитационной модели формулируется вариационная задача, решаемая затем симплекс-методом.

Решение исходной системы сингулярных интегральных уравнений с использованием численного метода дискретных особенностей в [7] сводится к решению задачи нелинейного программирования. В настоящей работе применяется аналогичный подход, однако сформулированная здесь задача нелинейного программирования значительно отличается от задачи в [7]. Предложенный численный метод позволяет проводить расчеты по заданному числу кавитации и легко распространяется на широкий класс задач линейной теории суперкавитации, решение которых основано на интегральных уравнениях. Достаточная практическая точность, универсальность подхода к различным задачам, простота алгоритмизации могут служить основанием для его использования в инженерных расчетах и для создания на его основе пакетов прикладных программ.

1. Рассмотрим суперкавитационное обтекание крыла конечного размаха произвольной формы в плане под свободной поверхностью невесомой идеальной несжимаемой жидкости или над твердым плоским дном. Крыло будем считать тонким, расположенным под малым углом атаки и имеющим острую переднюю кромку, форма в плане которой описывается уравнением $x=x_0(y)$, форма задней кромки — $x=x_1(y)$, причем $x_i(y)=x_i(-y)$, $i=0, 1$; $y \in [-b, b]$, b — полуразмах. Отстояние середины передней кромки от границы обозначим через h . Будем рассматривать такие режимы течения, при которых каверна начинается на всей кромке $x_0(y)$ и замыкается за крылом. В качестве кавитационной модели примем модель геометрической замкнутости каверны. Линия замыкания в плане описывается функцией $x=l(y)$, которая зависит от числа кавитации и формы крыла, заранее неизвестна и должна быть найдена в ходе решения задачи.

Система сингулярных интегральных уравнений, полученная по теории везущей поверхности, при сделанных предположениях имеет вид [1, 2]

$$\begin{aligned}
 & \int_{-b}^b \int_{x_0(\eta)}^{x_1(\eta)} \gamma(\xi, \eta) K_1(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta - \frac{1}{2} q(x, y) + \\
 & + \int_{-b}^b \int_{x_0(\eta)}^{l(\eta)} q(\xi, \eta) K_3(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta = \frac{\partial}{\partial x} f(x, y), \quad (x, y) \in S \\
 & \gamma(x, y) - \int_{-b}^b \int_{x_0(\eta)}^{x_1(\eta)} \gamma(\xi, \eta) K_3(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta + \\
 & + \int_{-b}^b \int_{x_0(\eta)}^{l(\eta)} q(\xi, \eta) K_2(x-\xi, y-\eta) d\xi d\eta = \sigma, \quad (x, y) \in C \\
 & \int_{x_0(y)}^{l(y)} q(x, y) dx = 0, \quad y \in [-b, b] \\
 & K_1(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{y^2} \left(1 + \frac{x}{r_0} \right) - \nu \left[\frac{y^2 - 4h^2}{(y^2 + 4h^2)^2} \left(1 + \frac{x}{r} \right) - \frac{4h^2 x}{(y^2 + 4h^2) r^3} \right] \right\} \\
 & K_2(x, y) = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{x}{r_0^3} + \nu \frac{x}{r^3} \right), \quad K_3(x, y) = \frac{h}{2\pi r^3} \\
 & r_0 = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + 4h^2}
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где $\gamma(x, y)$ и $q(x, y)$ — неизвестные функции, имеющие физический смысл соответственно гидродинамической нагрузки на крыле и производной по x от функции, описывающей толщину каверны; S и C — проекции крыла и каверны на плоскость $z=0$; σ — число кавитации; $z=f(x, y)$ — форма смачиваемой поверхности крыла; $\nu=-1$ для свободной поверхности, $\nu=1$ для твердой стенки. Последнее уравнение в (1.1) выражает условие геометрической замкнутости каверны.

Численное решение системы (1.1) будем искать модифицированным методом дискретных особенностей [2, 9, 10]. Для этого делим крыло и каверну вдоль размаха на $2M$ равных полос и полагаем, что на каждой полосе неизвестные функции γ и q являются постоянными (ступенчатое представление). Выполняя затем интегрирование по η , преобразуем исходную систему к одномерным интегральным уравнениям с ядрами типа Коши. Далее в соответствии с особенностями функций γ и q применяется модифицированный «метод 3/4», т. е. в системе одномерных интегральных уравнений производится замена переменных $\xi=t^2$, $x=\tau^2$, затем интегралы заменяются конечными суммами по формулам прямоугольников, при этом участки крыла и каверны разбиваются соответственно на N и K отрезков. В результате система (1.1) с учетом симметрии течения относительно плоскости $y=0$ заменяется системой нелинейных алгебраических уравнений вида

$$\begin{aligned}
 & \sum_{m=1}^M \delta x_m \sum_{j=1}^N \gamma_{jm} G_1(\tau_{ik}, t_{jm}; y_k, \eta_m) - \frac{1}{2} q_{ik} + \\
 & + \sum_{m=1}^M \delta x_m \sum_{n=1}^N q_{nm} G_3(\tau_{ik}, \tau_{nm}; y_k, \eta_m) +
 \end{aligned}$$

$$+ \sum_{m=1}^M \delta l_m \sum_{n=1}^K g_{nm} G_3(\tau_{ik}, \mu_{nm}; y_k, \eta_m) = f_{x'}(\tau_{ik}, y_k), \quad i=1, 2, \dots, N;$$

$$k=1, 2, \dots, M$$

$$\gamma_{pk} - \sum_{m=1}^M \delta x_m \sum_{j=1}^N \gamma_{jm} G_3(t_{pk}, t_{jm}; y_k, \eta_m) +$$

$$+ \sum_{m=1}^M \delta x_m \sum_{n=1}^N q_{nm} G_2(t_{pk}, \tau_{nm}; y_k, \eta_m) +$$

(1.2)

$$+ \sum_{m=1}^M \delta l_m \sum_{n=1}^N g_{nm} G_2(t_{pk}, \mu_{nm}; y_k, \eta_m) = \sigma, \quad p=1, 2, \dots, N; \quad k=1, 2, \dots, M$$

$$- \sum_{m=1}^M \delta x_m \sum_{j=1}^N \gamma_{jm} G_3(s_{pk}, t_{jm}; y_k, \eta_m) + \sum_{m=1}^M \delta x_m \sum_{n=1}^N q_{nm} G_2(s_{pk}, \tau_{nm}; y_k, \eta_m) +$$

$$+ \sum_{m=1}^M \delta l_m \sum_{n=1}^K g_{nm} G_2(s_{pk}, \mu_{nm}; y_k, \eta_m) = \sigma, \quad p=1, 2, \dots, K; \quad k=1, 2, \dots, M$$

$$\delta x_m = \frac{\sqrt{x_1(y_m)} - \sqrt{x_0(y_m)}}{N}, \quad \delta l_m = \frac{\sqrt{l(y_m)} - \sqrt{l_1(y_m)}}{K}$$

$$t_{jm} = \sqrt{x_0(y_m)} + (j-3/4)\delta x_m, \quad \tau_{ik} = \sqrt{x_0(y_k)} + (i-1/4)\delta x_m$$

(1.3)

$$s_{nm} = \sqrt{x_1(y_m)} + (j-3/4)\delta l_m, \quad \mu_{pk} = \sqrt{x_1(y_k)} + (p-1/4)\delta l_m$$

$$\eta_m = m \frac{b}{M}, \quad y_k = \left(k - \frac{1}{2}\right) \frac{b}{M}$$

$$\gamma_{jm} = \gamma(t_{jm}, y_m), \quad q_{nm} = q(\tau_{nm}, y_m), \quad g_{nm} = q(\mu_{nm}, y_m)$$

$$G_i(\tau, t; y, \eta_m) = 2t \int_{\eta_{m-1}}^{\eta_m} [K_i(\tau^2 - t^2, y - \eta) + K_i(\tau^2 - t^2, y + \eta)] d\eta, \quad i=1, 2, 3$$

Выбор точек дискретизации (1.3) на каждой полосе обеспечивает [10] отыскание $\gamma(x, y_m)$ в классе функций, имеющих интегрируемую особенность на левом конце отрезка интегрирования и ограниченных на правом. Последнее соответствует выполнимости условия Жуковского — Чаплыгина в выходной кромке крыла.

Систему (1.2) можно записать в матричной форме:

$$A_{11}\gamma + A_{12}q + A_{13}g = b_1, \quad A_{21}\gamma + A_{22}q + A_{23}g = b_2$$

(1.4)

$$A_{31}\gamma + A_{32}q + A_{33}g = b_3, \quad A_{42}q + A_{43}g = b_4$$

где γ и q здесь и далее обозначают векторы-столбцы размерности NM неизвестных γ_{jm} и q_{nm} , g — вектор размерности KM неизвестных g_{nm} ; b_1 , b_2 , b_3 — вектора правых частей размерности соответственно NM , NM и KM ; b_4 — нулевой вектор размерности M . Матрицы A_{11} , A_{12} , A_{21} , A_{22} и A_{42} состоят из известных числовых коэффициентов системы (1.2), элементы матриц A_{13} , A_{23} , A_{31} , A_{32} и A_{33} являются функциями неизвестных δl_m .

Рассмотрим функцию

$$F(\Delta) = \min_x (AX - b)^T (AX - b) \quad (1.5)$$

$$X = (\gamma^T, q^T, g^T)^T; \quad \Delta = (\delta l_1, \delta l_2, \dots, \delta l_m)^T, \quad \bar{b} = (b_1^T, b_2^T, b_3^T, b_4^T)^T$$

где A — матрица, блоками которой являются матрицы A_{ij} , $i=1..4$, $j=1, 2, 3$ (A_{i1} — нулевая матрица, а индекс t обозначает транспонирование).

При любом Δ из допустимой области функция F определена однозначно как принимающая значения экстремума выпуклой функции и неотрицательная. Очевидно, что вектор $\Delta=\Delta^*$ и соответствующий ему $X=X^*$, при которых $F=0$, будут решениями системы (1.4). Приходим таким образом к задаче нелинейного программирования: найти

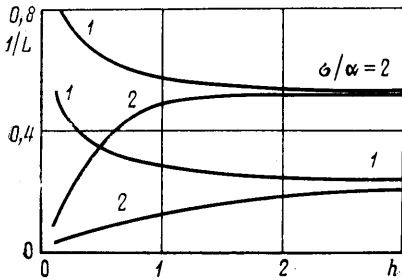
$$\arg \min F(\Delta) \quad (\Delta \in \Omega) \quad (1.6)$$

где область Ω задается из физических соображений.

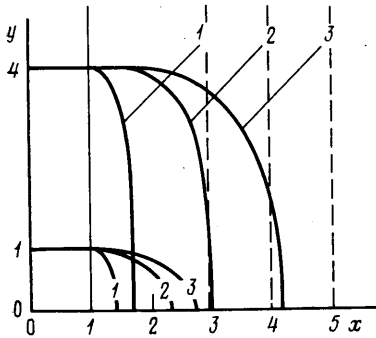
Для минимизации $F(\Delta)$ целесообразно применять методы поиска, не использующие производных, например метод деформируемых многогранников [11]. Он не накладывает практически никаких жестких ограничений на целевую функцию и для его реализации требуется только уметь вычислять функцию в любой точке допустимой области.

Отметим, что при вычислении функции (1.5) в соответствии с методом наименьших квадратов всякий раз необходимо решать нормальную систему линейных алгебраических уравнений $A^*AX=A^*b$. Учитывая блочную структуру матрицы A и симметричность произведения A^*A , решение нормальной системы можно ускорить, если находить последовательно g , затем q и γ . При этом, вычисляя F в каждой новой точке Δ , необходимо пересчитывать только те блоки матрицы A , которые зависят от Δ , и обращать одну матрицу размерности $N \times M$ и одну $M \times M$.

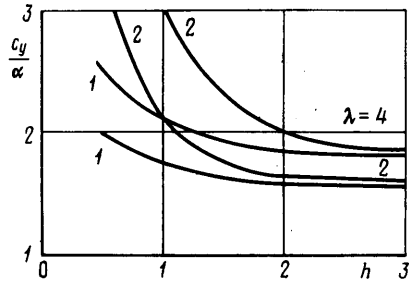
2. С использованием метода деформируемых многогранников, модифицированного под специфику задач, а для одномерного поиска — параболическую



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

интерполяцию в сочетании с методом золотого сечения, были составлены алгоритмы и написаны машинные программы расчета гидродинамических и геометрических характеристик тонких суперкавитирующих профилей и крыльев в ограниченном потоке по заданному числу кавитации.

С целью выяснения характера зависимости поведения решения от числа точек дискретизации проделаны численные эксперименты по определению длины каверны L и коэффициента подъемной силы c_y/α суперкавитирующего профиля в безграничном потоке. Результаты при различных N и K и сравнение с точными значениями (последняя строчка), посчитан-

ными по формулам известного аналитического решения, при $\sigma/\alpha=1$ представлены в таблице.

Влияние границ потока на длину каверны при постоянном числе кавитации для крыла бесконечного размаха представлено на фиг. 1 (1 — свободная поверхность, 2 — плоское дно).

Изменение формы каверны в плане за прямоугольным крылом конечного размаха при $\sigma/\alpha=1$ в зависимости от удлинения и отстояния от свободной поверхности показано на фиг. 2. Кривые 1—3 соответствуют отстояниям $h=0,5; 2; \infty$. Изображена только одна половина симметричного течения. Штриховые прямые — каверны за крылом бесконечно большого удлинения.

Близость твердого дна приводит в отличие от свободной поверхности к увеличению относительных размеров каверны. Подъемная сила в

N	K	c_y/α	L	N	K	c_y/α	L
4	5	1,9517	4,7894	12	10	1,8513	4,8094
5	5	1,9103	4,7403	12	12	1,8694	4,8619
5	6	1,9300	4,8117	15	15	1,8640	4,8826
10	10	1,8794	4,8921	20	10	1,7886	4,6988
10	12	1,8936	4,8986	20	20	1,8590	4,9055
				—	—	1,8541	5,0

обоих случаях увеличивается, однако более сильно вблизи твердого дна. Пример теоретической зависимости c_y/α от h для удлинений $\lambda=2$ и 4 при $\sigma/\alpha=1$ приведен на фиг. 3 (1 — свободная поверхность, 2 — плоское дно). При малых h и λ расчетные значения коэффициентов гидродинамических сил оказываются завышенными по сравнению с экспериментальными данными [5], что объясняется, по-видимому, имеющими место в реальных условиях нелинейными и волновыми эффектами, которые не учитываются в рамках принятой линейной модели. Все расчеты проводились при $N=5, K=5, M=5$. Минимальное значение невязки исходной системы (функции (1.5)) не превышало $0,1 \cdot 10^{-4}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Роман В. М. Обтекания тонкого крыла обмеженным потоком на режиме розгорнутой кавитации. — Доп. АН УРСР, сер. А, 1970, № 1, с. 75—79.
2. Ефремов И. И., Роман В. М. Влияние свободной поверхности и твердых стенок на кавитационное течение. — В кн.: Неуставившиеся течения воды с большими скоростями. Тр. Междунар. симп., Ленинград, 1971. М.: Наука, 1973, с. 165—172.
3. Furuja O. Three-dimensional theory of supercavitating hydrofoils near a free surface. — J. Fluid Mech., 1975, v. 71, № 2, p. 339—359.
4. Verrou J. Ecoulements cavitants autour d'ailes d'envergure finie en présence d'une surface libre. — J. Mec., 1979, v. 18, № 4, p. 745—773.
5. Басин М. А., Шадрин В. П. Гидроаэродинамика крыла вблизи границы раздела сред. Л.: Судостроение, 1980. 304 с.
6. Ачкинадзе А. Ш. Принцип минимума кавитационного сопротивления как метод численного решения линейной задачи о движении кавитирующего крыла конечного размаха. — В кн.: Гидромеханика и теория корабля. Л., 1979, с. 86—92.
7. Роман В. М. Расчет СК-крыла по теории несущей поверхности. — В кн.: Гидродинамика больших скоростей. Красноярск, 1981, с. 49—58.
8. Frydenlund O., Persson B. Application of a discrete vortex, source distribution model to propeller cavitation. — J. Ship Res., 1981, v. 25, № 4, p. 264—270.
9. Ефремов И. И., Роман В. М. Расчет суперкавитационного обтекания тонких профилей вблизи границы раздела. — ПМТФ, 1969, № 3, с. 65—70.
10. Ефремов И. И. Линеаризованная теория кавитационного обтекания. Киев: Наук. думка, 1974. 156 с.
11. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование. М.: Мир, 1975. 534 с.

Киев

Поступила в редакцию
26.VI.1984