

УДК 532.527.4:532.529.5

ОСАЖДЕНИЕ ЧАСТИЦ НА СТЕНКУ КАНАЛА В ГРАДИЕНТНОМ ТУРБУЛЕНТНОМ ДИСПЕРСНОМ ПОТОКЕ

КРОШИЛИН А. Е., КУХАРЕНКО В. Н., НИГМАТУЛИН Б. И.

Из кинетических представлений о движении ансамбля частиц (капель) в градиентном турбулентном потоке газа для случая достаточно крупных частиц (более нескольких микрон) выведено уравнение типа Фоккера — Планка, описывающее процесс осаждения их на стенку канала. Получено удовлетворительное согласование результатов численного решения этого уравнения по скорости осаждения с экспериментальными данными, опубликованными в литературе. В рамках предположения о достаточно медленном характере изменения параметров несущего газового потока выведено обобщенное уравнение диффузии частиц в турбулентном потоке, учитывающее градиент интенсивности поперечных пульсаций скорости несущего газового потока.

В настоящее время опубликовано значительное число работ, посвященных осаждению твердых частиц или капель из турбулентного газового потока в каналах различной геометрии, обзор которых приводится в монографиях [1—3]. Взаимодействие турбулентных вихрей с частицами имеет определяющее значение для описания процесса осаждения их на стенки канала. Анализ этого взаимодействия затруднен отсутствием замкнутой теории анизотропного турбулентного потока газа, позволяющей получить достаточно полную информацию о микромасштабах турбулентности и спектральных характеристиках потока, а также сложностью описания взаимодействия большого числа частиц, имеющих случайные значения и направления скоростей, с полем турбулентных вихрей.

Большинство работ, в частности [2—7], описывающих осаждение частиц или капель из градиентного турбулентного потока, основано на использовании нелинейного уравнения диффузии. Использование моделей диффузионного типа правомерно только для частиц, длина торможения которых существенно меньше характерного пространственного масштаба течения, в данном случае — толщины пограничного слоя. Для частиц, у которых величина свободного пробега соизмерима с толщиной промежуточного слоя градиентного турбулентного потока, необходимо использовать кинетические уравнения, описывающие распределение частиц в пространстве и по скоростям. Например, в приближении Фоккера — Планка такой подход использован в [9]. В этой работе приведено без вывода уравнение типа Фоккера — Планка лишь в случае изотропной турбулентности. В настоящей работе выводится уравнение Фоккера — Планка для общего случая анизотропной турбулентности и исследуются его решения.

Рассмотрим движение сферической частицы в турбулентном газовом потоке в направлении, нормальном к поверхности канала. Поперечная составляющая скорости частицы v определяется уравнением

$$\dot{v}(t) = 3\pi\rho_g d v (V - v) / m \quad (1)$$

где m — масса частицы, V — нормальная составляющая скорости газового потока, ν — коэффициент кинематической вязкости газа, ρ_g — плотность газа. При этом принято, что определяющей силой, действующей на частицу, является сила вязкого трения и для случая небольших поперечных скоростей частиц относительно газа, когда число $Re_p = d|V - v|/\nu \leq 2$, где d — диаметр частицы, сила трения описывается законом Стокса. Из решения уравнения движения частицы в невозмущенной жидкости определим время торможения частицы

$$\tau = 1/\beta = d^2 \rho_p / (18\nu\rho_g)$$

где ρ_p — плотность частицы.

Тогда уравнение движения частицы (1) в поле случайных поперечных скоростей газа $V(y, t)$ запишется в виде

$$\dot{v}(t) = \beta [V(y, t) - v(t)] \quad (2)$$

Решение уравнения (2) имеет вид

$$v(t) = v_0 \exp(-\beta t) + \int_0^t \beta \exp[\beta(\tau - t)] V(y, t) d\tau \quad (3)$$

$$y(t) = y_0 + \int_0^t v(t) dt$$

где y_0 и v_0 — начальные значения координаты и скорости частицы. Ниже будет рассмотрено движение крупных частиц за время, удовлетворяющее неравенству $\tau \gg \Delta t \gg T$, где T — интегральный временной масштаб турбулентности, т. е. за время Δt частицы изменяют свою скорость достаточно мало и в то же время успевают провзаимодействовать с несколькими вихрями. Оценки τ и T показывают, что для газовых потоков с числами Рейнольдса основного потока $Re = 10^4 - 10^5$, диаметром канала $D = 10^{-2}$ м и отношением плотности частицы к плотности газа $\rho_p/\rho_g = 10^3$ указанному условию удовлетворяют частицы с диаметром более 1 мкм.

Пусть w — плотность вероятности перехода частицы из точки фазового пространства (y, v) в точку (y', v') за время Δt , а f — плотность вероятности нахождения частицы в точке y со скоростью v в момент времени t .

Плотность вероятности f удовлетворяет очевидному тождеству (4), которое можно преобразовать в следующее уравнение [11]:

$$f(y', v', \Delta t) = \iint_{-\infty}^{+\infty} f(y, v, \Delta t) w(y, v, y', v', \Delta t) dy dv \quad (4)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial y} (I_v f) - \frac{\partial}{\partial v} (I_y f) - \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} (I_{vv} f) - \frac{\partial^2}{\partial y \partial v} (I_{yv} f) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} (I_{yy} f) \quad (5)$$

$$I_i(y, v) = \frac{1}{\Delta t} \iint_{-\infty}^{+\infty} (i' - i) w(y, v, y', v', \Delta t) dy' dv' \quad (i=y, v; j=y, v) \quad (6)$$

$$I_{ij}(y, v) = \frac{1}{\Delta t} \iint_{-\infty}^{+\infty} (i' - i) (j' - j) w(y, v, y', v', \Delta t) dy' dv' \quad (7)$$

При вычислении (6) и (7) используется полученное ранее выражение для скорости движения частицы в поле турбулентных вихрей.

Рассмотрим вывод одного из интегралов (6) — I_v

$$I_v(y, v) = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} (v' - v) w(y, v, y', v', \Delta t) dv' = \frac{1}{\Delta t} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[v(1 - e^{-\beta t}) + \right. \quad (8)$$

$$\left. + \beta \int_0^{\Delta t} e^{\beta(\xi - \Delta t)} V(y, \xi) d\xi \right] w(y, v, y', v', \Delta t) dv' = \beta v + I$$

$$I = \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \beta e^{\beta(\xi - \Delta t)} \int_{-\infty}^{+\infty} w(y, v, y', v', \Delta t) V(y, \xi) dv' d\xi$$

При выводе этого равенства учтено, что для каждого значения величина вероятности $w(y, v, y', v', \Delta t)$ определяется вероятностью реализации функции $V(y, \xi)$, $0 \leq \xi \leq \Delta t$, такой, чтобы значение скорости изменилось от v до v' за время Δt , согласно уравнению движения частицы в поле случайных значений скорости газа. В (6) и (7) рассматриваются все возможные значения v' . Таким образом, величина I определяет среднее значение $\langle V \rangle$ по всевозможным функциям $V(y, \xi)$, причем каждая из этих функций учитывается с весом, равным вероятности ее реализации. Следовательно, интеграл I равен среднему значению пульсаций поперечной составляющей скорости жидкости и $I \sim \langle V \rangle = 0$.

Аналогичным образом с учетом (8) можно получить выражения для всех интегралов (6) и (7)

$$I_v = v, \quad I_v = \beta v, \quad I_{vv} = 0, \quad I_{vv} = 0; \quad I_{vv} = \beta^2 / 2 \langle V^2 \rangle \Gamma(\Delta t); \quad \Gamma(\Delta t) = \int_{-\Delta t}^{+\Delta t} K(t) dt \quad (9)$$

где $K(t)$ — коэффициент корреляции турбулентных пульсаций скорости газа. В [12] показано, что $K(t) \sim \exp(-t)$, если $\Delta t \gg T$, и при этом $\Gamma(\Delta t)$ приближенно равно лагранжеву масштабу турбулентности

$$\Gamma(\Delta t) = \Gamma_l = \int_{-\infty}^{+\infty} K(t) dt \quad (10)$$

С учетом (9) и (10) уравнение (5) примет вид

$$\frac{\beta^2 \langle V^2 \rangle \Gamma_l}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} + \beta v \frac{\partial f}{\partial v} + \beta f - v \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (11)$$

Уравнение (11) в случае изотропной турбулентности, когда $\partial f / \partial y = 0$, имеет простое аналитическое решение

$$f_l = \text{const} \exp[-v^2 / v_0^2] \quad (12)$$

$$v_0^2 = \beta \langle [V(R)]^2 \rangle \Gamma_l$$

Отметим, что полученное решение (12) хорошо согласуется с распределением частиц, полученным в [9]. В самом деле, в [9] получено следующее распределение:

$$w(u) = \frac{C_0}{J(u)} \exp\left(-\frac{1}{\beta_0} \int_0^u \frac{\xi d\xi}{J(\xi)}\right) \quad (13)$$

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \langle v(0, 0) v(u\alpha, \alpha) \rangle d\alpha$$

где C_0 — коэффициент. Заметим, что перемещение частицы l за характерный временной масштаб турбулентности $l = v_0 T \sim L_T \sqrt{T/\tau}$, где $L_T = \langle \sqrt{V^2} \rangle T$ — пространственный масштаб турбулентности. С учетом приведенной выше оценки для характерного времени движения частицы этим перемещением частицы можно пренебречь, т. е. величину $u\alpha$ можно принять равной нулю. После чего $J = \frac{1}{2} \Gamma_l \langle V^2 \rangle$ и формула (13) полностью совпадает с (12).

В общем случае неизотропной турбулентности для решения уравнения (11) необходимо задание граничных условий. При $v=\pm\infty f=0$, т. е. отсутствуют частицы с очень большими скоростями. На стенке канала $y=0$ при $v>0 f(v)=Kf(-v)$, т. е. принимается условие отражения частиц с коэффициентом K . На оси канала для частиц, движущихся к стенке $v<0$, необходимо задать распределение $f=f_1(v)$, где в качестве f_1 можно использовать (12).

Уравнение (11) в безразмерных переменных запишется в виде

$$A \frac{\partial^2 f}{\partial W^2} + W \frac{\partial f}{\partial W} + f - BW \frac{\partial f}{\partial Y} = 0 \quad (14)$$

$$W = \frac{v}{v_0}, \quad Y = \frac{y}{R}, \quad B = \frac{v_0}{\beta R}; \quad A = \frac{I_{v_0}(y)}{2I_{v_0}(R)} = \frac{\langle V^2(y) \rangle}{2\langle V^2(R) \rangle}$$

Аналитическое решение уравнения (14) возможно получить в случае достаточно медленного изменения концентрации частиц и коэффициента A в зависимости от расстояния от стенки канала Y , т. е. когда характерный масштаб задачи много больше линейного масштаба, характеризующего изменение турбулентности. Уравнение (14) приведено подстановкой $f = e^{\varphi}$ к более удобному виду

$$A \frac{\partial^2 \varphi}{\partial W^2} + A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial W} \right)^2 + W \frac{\partial \varphi}{\partial W} + 1 = BW \frac{\partial \varphi}{\partial Y} \quad (15)$$

Решение уравнения (15) получено в виде суммы двух функций: $\varphi_0 = C(Y) - W^2/2A$ — общего решения уравнения для случая изотропной турбулентности, где $C(Y)$ — произвольная функция от Y , и функции φ_1 — функции, обусловленной медленным изменением концентрации частиц и коэффициента A . Функция φ_1 при построении приближенного аналитического решения уравнения (15) принята не зависящей от Y . При этом величины $\partial A/\partial Y$ и $m = \partial C/\partial Y$ будут малыми возмущающими параметрами, накладываемыми на уравнение (15) в случае изотропной турбулентности.

Приближенное решение уравнения (15), если пренебречь членами второго порядка малости, имеет вид $\varphi = \varphi_0 + \varphi_1$, где

$$\varphi_1 = -B \frac{\partial C}{\partial Y} W - \left(\frac{BW^3}{2A^2} + \frac{BW}{A} \right) \frac{\partial A}{\partial Y} \quad (16)$$

Интегрирование полученного решения по спектру скоростей частиц позволяет получить число частиц N и поток J , а также связь между ними

$$N = \int_{-\infty}^{+\infty} f dW; \quad J = \int_{-\infty}^{+\infty} fW dW \quad (17)$$

$$J = -D_p^+ \frac{dN}{dY} - \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right) BN \frac{dA}{dY}, \quad D_p^+ = BA$$

В отличие от общепринятой формы уравнений диффузии в уравнении (17) содержится член, пропорциональный градиенту характеристики турбулентности A , т. е. возможен поток частиц, обусловленный градиентом характеристик турбулентного потока при постоянной концентрации частиц.

Такой член был введен в рассмотрение в [3] на основании осреднения движения частицы в моногармоническом поле турбулентных пульсаций. Значение этого члена можно проиллюстрировать следующим примером. Задано распределение коэффициента A в виде, приведенном на фиг. 1. На границах заданы два одинаковых распределения частиц (12), т. е.

принято, что отсутствует градиент концентрации частиц. На фиг. 1 приведено распределение числа частиц для этого случая, полученное при численном решении уравнения (14). Происходит накопление частиц в области со сниженной турбулентностью. Это позволяет использовать закон диффузии в форме (17) для объяснения накопления частиц в пристенной области потока.

Коэффициент диффузии в уравнении (17) в размерной форме имеет вид

$$D_p = \Gamma_1 \langle V^2 \rangle \quad (18)$$

Коэффициент D_p может быть получен иным способом. Действительно, согласно [3, 12], коэффициент турбулентной диффузии частиц равен $D_p = \langle \Delta x^2 \rangle / 2t$, где Δx — длина диффузионного шага, t — время, затраченное на этот шаг. Эта формула после использования в качестве характерного времени $\tau = 1/\beta$ и уравнения (12) для характерной скорости частиц приобретает вид (18).

Размерный поток частиц, обусловленный вторым слагаемым в (17), имеет вид

$$J_M = \frac{1}{2} \left(3 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right) \Gamma_1 N \frac{d \langle V^2 \rangle}{dY} \quad (19)$$

Для сравнения можно привести формулу для «миграционного» потока [3], полученного для колебаний с частотой ω

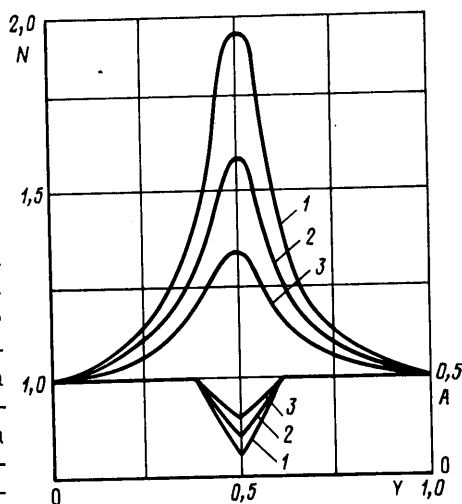
$$J_M = \frac{1}{4\omega} \frac{d \langle V^2 \rangle}{dY} N \quad (20)$$

Для моногармонических колебаний величина Γ_1 не определена, однако если ее определить по положению первого нуля корреляционной функции, то формулы (19) и (20) будут различаться лишь численным множителем. Последнее связано с учетом в формуле (19) всех частот турбулентного потока. На основании (17) может быть построен алгоритм расчета радиального потока частиц в сдвиговом турбулентном потоке в случае малого размера частиц.

Построить аналитическое решение уравнения (14) затруднительно, так как оно сильно нелинейно (коэффициент диффузии D_p изменяется на несколько порядков в расчетной области). Уравнение (14) является уравнением параболического типа, у которого корректно поставленные граничные условия задаются на не связанных друг с другом частях границы (при $Y=1$, $W < 0$ и при $Y=0$, $W > 0$). Последнее обстоятельство не позволяет использовать стандартные численные методы интегрирования параболических уравнений для построения решения уравнения (14).

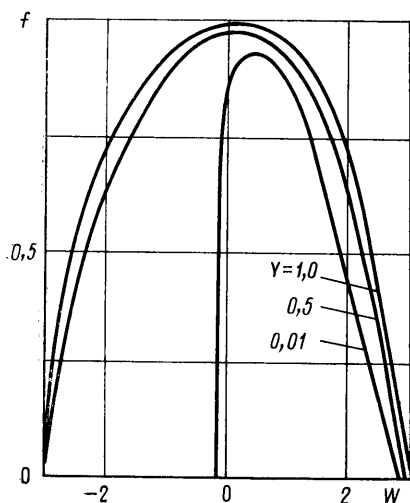
Поэтому был разработан новый численный метод, основная идея которого состоит в следующем. Введены вспомогательные функции Ψ^+ и Ψ^- , такие, что Ψ^+ удовлетворяют уравнению (14) при $W > 0$; $\Psi^+|_{w=0} = \Psi_0(Y)$, $\Psi^+ = 0$ при $W < 0$, $\Psi^+ = 0$ при $W \rightarrow +\infty$, $\Psi^+ = \Psi_0$ при $Y=0$, $W > 0$. Аналогично Ψ^- удовлетворяет уравнению (14) при $W < 0$; $\Psi^- = \Psi_0$ при $W \rightarrow -\infty$ и $Y=1$, $\Psi^-|_{w=0} = \Psi_0$, $\Psi^- = 0$ при $W > 0$. Тогда Ψ^+ и Ψ^- удовлетворяют параболическим уравнениям со стандартно заданными граничными условиями.

Единственной особенностью этих уравнений является то, что коэффициенты при производной по Y стремятся к нулю при $W \rightarrow 0$. Однако эта особенность не мешает построить Ψ^+ и Ψ^- численно, используя обычные неявные численные методы. Тогда функция $\Psi = \Psi^+ + \Psi^-$ удовлетворяет уравнению (14) при $W \neq 0$ и всем необходимым граничным условиям при произвольной $\Psi_0(Y)$. Если теперь потребовать, чтобы уравнение (14) удовлетворялось также при $W=0$, то это условие позволяет однозначно определить Ψ_0 и, следовательно, Ψ .

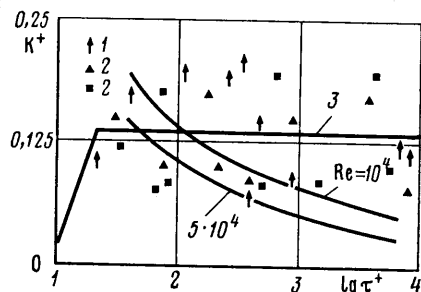


Фиг. 1

Результат расчета функции распределения частиц приведен на Фиг. 2 для $d=10^{-5}$ м, $Re=5 \cdot 10^4$, $D=10^{-2}$ м. Характерно, что максимум распределения частиц по скоростям смещен в область $W>0$ тем больше, чем ближе рассматриваемая точка к стенке канала. При $Y=1$ в ядре потока распределение принимает вид, близкий к распределению частиц в случае изотропной турбулентности, что правильно отражает физическую картину явления.



Фиг. 2



Фиг. 3

Распределения частиц вблизи стенки ($Y=0$) отражают отсутствие частиц с большими скоростями, движущихся от стенки. Отметим, что даже на достаточно малых расстояниях от стенки концентрация частиц не равна нулю и, следовательно, используемое в диффузионном приближении в качестве граничного условия равенство нулю концентрации частиц у стенки является приближенным.

Для сравнения с экспериментальными данными были выполнены расчеты скоростей осаждения частиц в условиях, близких к тем, в которых были выполнены эксперименты: вертикальные восходящие воздушные потоки в трубах диаметром 1–5 см при числе Рейнольдса воздушного потока $Re=10^4$. Для сравнения результатов расчета с экспериментальными данными использованы общепринятые безразмерные критерии: скорость осаждения K^+ и время торможения частиц τ^+

$$K^+ = \frac{J}{\rho_r C v_*}; \quad \tau^+ = \frac{\tau v_*^2}{\nu}$$

На Фиг. 3 приведена зависимость безразмерной скорости осаждения от безразмерного времени торможения τ^+ , рассчитанная по уравнению (14), и экспериментальные данные из [5, 7, 13] (1 – точки из работы [7], 2 – точки из работы [13]). На Фиг. 3 приведена выполненная в [5] аппроксимация экспериментальных данных $K^+(\tau^+)$ (линия – 3). Видно удовлетворительное согласование с экспериментальными данными. Отметим, что в данной модели не использованы эмпирические соотношения, тогда как в диффузионных моделях для согласования с экспериментальными данными используются эмпирические соотношения или нереалистические предположения [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Соу С. Гидродинамика многофазных систем. М.: Мир, 1971. 536 с.
2. Шрайбер А. А., Миллюгин В. Н., Яценко В. П. Гидромеханика двухкомпонентных потоков с твердым полидисперсным веществом. Киев: Наук. думка, 1980. 249 с.
3. Медников Е. П. Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей. М.: Наука, 1981. 174 с.
4. Sehmel G. A. Particle Deposition from turbulent air flow. – J. Geophys. Res., 1970, v. 75, № 9, p. 1766–1781.

5. McCoy D. D., Hanratty T. J. Rate of deposition of droplets in annular two-phase flow.— Internat. J. Multiphase Flow, 1977, v. 3, № 4, p. 319–331.
6. Kitamoto A., Takashima Y. Transport Theory of Aerosol in Turbulent Flow.— Bull. Tokyo Inst. Technol., 1974, № 121, p. 41–65.
7. Forney L. J., Spielman L. A. Deposition of coarse aerosols from turbulent flow.— J. Aerosol Sci., 1974, v. 5, № 3, p. 257–271.
8. Рожайнен, Сташевич. Об осаждении частиц небольших размеров из турбулентных потоков.— Тр. амер. о-ва инж.-мех. Теплопередача, 1970, т. 92, № 1, с. 118–127.
9. Вознякевич Е. В., Номофилов Е. В. Диффузия тяжелых сферических частиц в турбулентном потоке.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 6, с. 142–144.
10. Hutchinson P., Hewitt G. F., Dukler A. E. Deposition liquid or solid dispersions from turbulent gas streams' a stochastic model.— Chem. Eng. Sci., 1971, v. 26, № 3, p. 419–439.
11. Левич В. Г., Вдовин Ю. А., Мямлин В. А. Курс теоретической физики. Т. 2. М.: Наука, 1971. 936 с.
12. Ибрагимов М. Х., Субботин В. И., Бобков В. П., Сабелев Г. И., Таранов Г. С. Структура турбулентного потока и механизм теплообмена в каналах. М.: Атомиздат, 1978. 296 с.
13. Liu B. Y. H., Agarwall J. K. Experimental observation of aerosol deposition in turbulent flow.— J. Aerosol Sci., 1974, v. 5, № 2, p. 145–155.

Москва

Поступила в редакцию:
31.X.1983.