МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1985

УДК 532.526.011

К АСИМПТОТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ КВАЗИСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

ТРИГУБ В. Н.

Выяснению характера неединственности решений различных краевых задач для уравнений Эйлера в несжимаемой жидкости, а также поиску дополнительных условий, делающих задачу корректной, посвящено множество исследований, начиная с работ Кутта и Жуковского. Прандтль [1] обратил внимание на функциональный произвол, возникающий в задачах о течениях невязкой жидкости в тех случаях, когда линии тока не проходят через границу области и, следовательно, распределение завихренности на них не может быть взято из граничных условий на входе в область. Такая ситуация характерна для течений, периодических по координате, в частности для течений с замкнутыми поверхностями тока. Оказалось, что распределение завихренности может быть найдено, если привлечь к рассмотрению малые, но отличные от нуля силы вязкости. Исходя из равенства нулю работы сил вязкости, совершаемой за период (в противном случае действие малых сил вязкости будет накапливаться и изменять течение), в [1] было получено распределение завихренности по линиям тока, в частности $\Omega=\text{const}$ в плоской области с замкнутыми поверхностями тока и $\Omega=\text{const}\,r$ в случае осевой симметрии (Ω – завихренность, r – расстояние до оси).

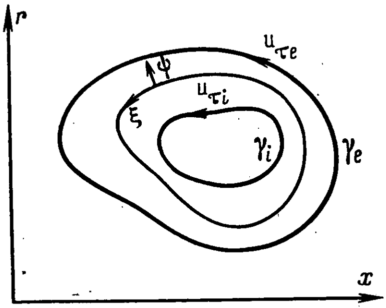
Бэтчелор в работе [2] детально рассмотрел предельный переход к малой вязкости в уравнениях Навье – Стокса, полагая поверхности тока строго замкнутыми, а течение строго стационарным. В результате было подтверждено, что в пределе $\text{Re}\to\infty$ при указанных предположениях течение действительно должно удовлетворять условиям [1] (Re – число Рейнольдса). Кроме того, впервые было рассмотрено осесимметричное течение при наличии аксиальной компоненты завихренности.

В дальнейшем условия, полученные Прандтлем и Бэтчелором, нашли широкое применение при построении моделей течений жидкости в отрывных зонах и кавернах. Однако вопросы о том, как происходит процесс перестройки течения внутри каверны при выходе на предельное состояние Прандтля – Бэтчелора и какими уравнениями описывается этот процесс в пределе при $\text{Re}\to\infty$, остались открытыми. Условия стационарности решений уравнений Эйлера и Навье – Стокса при $\text{Re}\to\infty$ различны. Например, плоское течение, если существует решение уравнения $\nabla^2\psi=G(\psi)$ с замкнутыми линиями тока, удовлетворяющее условиям непротекания на границе области, в рамках уравнений Эйлера будет стационарным (здесь ψ – функция тока, $G(\psi)$ – некоторое распределение завихренности). В действительности же будет идти медленное перераспределение завихренности и соответствующая перестройка течения под влиянием малых факторов, исчезающих при $\text{Re}\to\infty$. Такой процесс перестройки естественно назвать квазистационарным, так как любое промежуточное состояние в нем является стационарным решением уравнений Эйлера. Исследование квазистационарных течений позволило бы выяснить, возможен ли гладкий переход от определенного начального состояния к предельному стационарному или же в процессе перестройки возникают такие явления, как неустойчивость, отрыв пограничного слоя, приводящие к изменению структуры течения.

Отметим также, что утверждения о предельном состоянии получены в [1, 2] при предположении о строгой замкнутости линий тока. Они не распространяются на течения с линиями тока, замыкающимися лишь в пределе $\text{Re}\to\infty$ (т. е. течения, представляющиеся при $\text{Re}\to\infty$ асимптотическими разложениями, в которых замкнуты лишь линии тока для главного приближения). В таких течениях линии тока проходят через границу области, но находятся внутри нее столь долго, что под влиянием малой диффузии начальное распределение завихренности существенно изменяется. Малые при $\text{Re}\to\infty$ возмущения, размыкающие замкнутые линии тока,— особые для рассматриваемого класса течений и могут приводить к предельным стационарным состояниям, отличным от указанных в [1, 2].

Целью настоящей работы является получение уравнений, описывающих при $\text{Re}\to\infty$ квазистационарные течения вязкой несжимаемой жидкости с поверхностями тока, замыкающимися лишь в пределе $\text{Re}\to\infty$, а также рассмотрение простейших следствий из этих уравнений.

1. Постановка задачи. Пусть имеется плоская, в общем случае двусвязная область D с гладкими границами. Рассмотрим осесимметричное течение жидкости в тороидальной области R пространства, ограниченной поверхностями γ_i, γ_e, получающимися в результате вращения границ области D вокруг оси x (фигура). Границы области γ_i, γ_e считаются подвижными и проницаемыми, на них заданы скорости жидкости $\mathbf{u}_{\tau e}+u_{ne}$, $\mathbf{u}_{\tau i}+\mathbf{u}_{ni}$, где скорость $\mathbf{u}_\tau$ направлена по касательной к границе, а $\mathbf{u}_n$ — по нормали к ней. При этом расход жидкости, вдуваемой через одну поверхность, должен быть равен расходу, отсасываемому через другую (жидкость несжимаема). Даже если жидкость в области R в начальный момент покоилась, а вдув не производился, силы вязкости вовлекут ее в движение, причем скорости движения во внутренних точках будут сравнимы со скоростями движения стенок. Обезразмерим длины по характерному размеру области L, скорость $\mathbf{u}$ — по характерной скорости течения в аксиальной плоскости U, давление p — по ρU^2, время t — по L/U. Введем число Рейнольдса $\mathrm{Re}=UL/\nu=1/\varepsilon^2$ и характерное время диффузии $T=\varepsilon^2 t$ (здесь ρ — плотность, ν — коэффициент вязкости). Течение в области R описывается уравнениями Навье — Стокса



$$\frac{\partial u}{\partial t}+\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{u}=-\operatorname{grad}\left(p+\frac{\mathbf{u}^2}{2}\right)-\varepsilon^2\operatorname{rot}\boldsymbol{\Omega}$$

$$\Omega=\operatorname{rot}\mathbf{u},\quad \operatorname{div}\mathbf{u}=0 \tag{1.1}$$

Для течения во внутренних точках области имеется два характерных масштаба времени: за время $t=O(1)$ частица жидкости совершает движение, близкое к циклическому, а за время $T=O(1)$ происходит общая перестройка течения под действием сил вязкости. Решение уравнений (1.1) при $\varepsilon\to0$ во внутренних точках области будем искать в виде следующих асимптотических разложений с двумя масштабами времени:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}(\mathbf{r},t,\varepsilon)&=\mathbf{u}_0(\mathbf{r},T)+\varepsilon\mathbf{u}_1(\mathbf{r},T)+\varepsilon^2\mathbf{u}_2(\mathbf{r},T,t)+O(\varepsilon^3)\\
p(\mathbf{r},t,\varepsilon)&=p_0(\mathbf{r},T)+\varepsilon p_1(\mathbf{r},T)+\varepsilon^2 p_2(\mathbf{r},T,t)+O(\varepsilon^3)\\
\boldsymbol{\Omega}(\mathbf{r},t,\varepsilon)&=\mathbf{G}_0(\mathbf{r},T)+\varepsilon\mathbf{G}_1(\mathbf{r},T)+\varepsilon^2\mathbf{G}_2(\mathbf{r},T,t)+O(\varepsilon^3)
\end{aligned}\tag{1.2}$$

Вид главных членов предполагает существование однопараметрического семейства стационарных решений уравнений Эйлера, на котором происходит медленная перестройка течения под действием малой вязкости. Поверхности тока в главном приближении считаем замкнутыми. Наличие членов $O(\varepsilon)$ связано с существованием в общем случае вблизи границ пограничных слоев, которые здесь также предполагаются квазистационарными. Члены $O(\varepsilon^2)$ присутствуют в любом случае из-за вязкости, причем характерное время их изменения $t=O(1)$. Подставляя (1.2) в (1.1) и совершая предельный переход $\varepsilon\to0$, получим

$$\mathbf{G}_0\times\mathbf{u}_0=-\operatorname{grad}\,(p_0+{}^1/{}_2\mathbf{u}_0{}^2),\quad \operatorname{div}\mathbf{u}_0=0 \tag{1.3}$$

$$\mathbf{G}_0\times\mathbf{u}_1+\mathbf{G}_1\times\mathbf{u}_0=-\operatorname{grad}\,(p_1+\mathbf{u}_0\mathbf{u}_1),\quad \operatorname{div}\mathbf{u}_1=0 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial\mathbf{u}_2}{\partial t}+\mathbf{G}_0\times\mathbf{u}_2+\mathbf{G}_2\times\mathbf{u}_0+\mathbf{G}_1\times\mathbf{u}_1+$$
$$+\operatorname{grad}\left(p_2+\mathbf{u}_0\mathbf{u}_2+\frac{\mathbf{u}_1{}^2}{2}\right)=-\frac{\partial\mathbf{u}_0}{\partial T}-\operatorname{rot}\mathbf{G}_0,\quad \operatorname{div}\mathbf{u}_2=0 \tag{1.5}$$

При решении уравнений (1.3)—(1.5) появляются неопределенные функции. Идея метода многих масштабов заключается в том, что требование равномерности разложений (1.2) (ограниченности $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{u}_3\ldots$ для всякого значения T при $t\to\infty$) приводит к дополнительным условиям для определения этих функций. Так, для определения главного приближения следует требовать существования ограниченного при $t\to\infty$ решения (1.5).

2. Необходимые условия ограниченности. Осевая симметрия дает возможность ввести в аксиальном сечении функцию тока ψ. Выберем подвижную, связанную с поверхностями тока ψ ортогональную систему координат (ψ, ξ, φ) так (фигура), что скорость $\mathbf{u}_0=(0,\ q_0,\ w_0)$, а элементы длины вдоль координатных линий имеют вид

$$dl_\psi=\frac{d\psi}{q_0r},\quad dl_\xi=ds=h(\psi,\xi,T)\,d\xi,\quad dl_\varphi=r\,d\varphi,\quad \mathbf{u}_i=(v_i,q_i,w_i),\quad i=1,2\ldots$$

При этом решение для плоской области может быть получено как частный случай при $r\equiv1$, $w_0\equiv0$.

Из (1.3) следует (штрих означает дифференцирование по ψ)

$$p_0\pm\frac{q_0^2}{2}=H_0(\psi,T),\quad w_0r=\Gamma_{20}(\psi,T)$$

$$\mathbf{G}_0=(0,\ -q_0\Gamma_{20}',\ rH_0'-\Gamma_{20}\Gamma_{20}'/r) \tag{2.1}$$

Функция скоростного напора H_0 и циркуляция Γ_{20} уравнениями (1.3) никак не определяются и в этом смысле произвольны. Расход, протекающий сквозь границы области, выражается через

$$Q_1(T)=\oint rv_1\,ds,\quad Q_2(T,t)=\oint rv_2\,ds$$

интегрирование проводится по произвольному замкнутому контуру ψ=const, φ=const. Считаем, что в приближении $O(\varepsilon)$ жидкость через границы не протекает: $Q_1\equiv0$. Как будет показано далее, нарушение этого условия полностью меняет характер перестройки течения. Условие $Q_1\equiv0$ позволяет ввести однозначную функцию тока ψ_1 для приближения $O(\varepsilon)$

$$q_1=q_0\frac{\partial\psi_1}{\partial\psi},\quad v_1hr=-\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi}$$

Выразим решение (1.4) через ψ_1

$$p_1+q_0q_1+w_0w_1=H_0'\psi_1+H_1(\psi,T),\quad w_1r=\Gamma_{20}'\psi_1+\Gamma_{21}(\psi,T)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_1=(-v_1\Gamma_{20}',\ -q_0(\Gamma_{21}+\Gamma_{20}'\psi_1)',\ & r(H_0''\psi_1+H_1')-\\ &-[(\Gamma_{20}\Gamma_{21})'+(\Gamma_{20}\Gamma_{20}')'\psi_1]/r)\end{aligned} \tag{2.2}$$

Здесь, как и в (2.1), появляются две новые произвольные функции H_1 и Γ_{21}. Умножим (1.5) скалярно на $d\mathbf{l}_1=(0,\ ds,\ w_0ds/q_0)$, $d\mathbf{l}_2=(0,\ 0,\ rds/q_0)$, используя при этом (2.1), (2.2). Выполнив интегрирование получающихся выражений по замкнутым контурам φ=const, ψ=const, получим

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\oint\left(q_2+w_2\frac{\Gamma_{20}}{rq_0}\right)ds=-H_0'Q_2-\oint\left(\frac{\partial q_0}{\partial T}\right)_r ds-\\ -\oint\left(\frac{\partial w_0}{\partial T}\right)_r\frac{\Gamma_{20}}{rq_0}ds-\oint(\operatorname{rot}\mathbf{G}_0\,d\mathbf{l}_1)\end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\oint\frac{w_2r}{q_0}ds=-\Gamma_{20}'Q_2-\oint\left(\frac{\partial w_0}{\partial T}\right)_r\frac{r}{q_0}ds-\oint(\operatorname{rot}\mathbf{G}_0\,d\mathbf{l}_2)$$

Будем считать, что для всяких значений T, t_0 существует предел

$$a(T)=\lim_{t\to\infty}\left[\frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} Q_2(t,T)\,dt\right]$$

Интегрируя (2.3) по t и устремляя $t\to\infty$, получим, что для ограниченности интегралов в левых частях (2.3) необходимо выполнение условий [1]

$$\oint\left(\frac{\partial q_0}{\partial T}\right)_{\mathbf{r}} ds+\oint\left(\frac{\partial w_0}{\partial T}\right)_{\mathbf{r}}\frac{\Gamma_{20}}{q_0 r}ds=-aH_0'+2H_0'\oint q_0 r\left(\frac{\partial r}{\partial\psi}\right)ds+$$
$$+H_0''\oint q_0 r^2\,ds-\Gamma_{20}'^2\oint q_0\,ds+\Gamma_{20}'\Gamma_{20}\left(H_0'\oint\frac{ds}{q_0}-\Gamma_{20}\Gamma_{20}'\oint\frac{ds}{q_0 r^2}\right) \tag{2.4}$$
$$\oint\left(\frac{\partial w_0}{\partial T}\right)_{\mathbf{r}}\frac{r}{q_0}ds=-a\Gamma_{20}'+\Gamma_{20}''\oint q_0 r^2\,ds+$$
$$+\Gamma_{20}'\left(H_0'\oint\frac{r^2}{q_0}ds-\Gamma_{20}\Gamma_{20}'\oint\frac{ds}{q_0}\right)$$

для каждого замкнутого контура $\varphi=\mathrm{const}$, $\psi=\mathrm{const}$.

Заметим, что если пограничные слои квазистационарны и $Q_1\equiv0$, то функции из приближения $O(\varepsilon)$ в условиях для определения функций главного приближения (2.4) не присутствуют.

3. Преобразование переменных. Выражения (2.4) неудобны для анализа, так как содержат производные по времени под знаком интеграла по контуру, зависящему от времени. Кроме того, границы области по координате ψ будут со временем изменяться. Свяжем с каждой поверхностью тока функцию $V(\psi(\mathbf{r},T),T)$ — объем, охватываемый этой поверхностью, деленный на 2π. Преобразуем левые части условий (2.4) к виду

$$\oint\left(\frac{\partial q_0}{\partial T}\right)_{\mathbf{r}} ds+\oint\left(\frac{\partial w_0}{\partial T}\right)_{\mathbf{r}}\frac{\Gamma_{20}}{q_0 r}ds=\left(\frac{\partial\Gamma_{10}}{\partial T}\right)_V+\alpha\left(\frac{\partial\Gamma_{20}}{\partial T}\right)_V$$
$$\oint\left(\frac{\partial w_0}{\partial T}\right)_{\mathbf{r}}\frac{r}{q_0}ds=\tau\left(\frac{\partial\Gamma_{20}}{\partial T}\right)_V,\quad \Gamma_{10}=\oint q_0\,ds \tag{3.1}$$
$$\tau=\frac{\partial V}{\partial\psi}=\oint\frac{ds}{q_0},\quad \alpha=\Gamma_{20}\oint\frac{ds}{q_0 r^2}$$

Функция Γ_{10} в (3.1) является циркуляцией в аксиальной плоскости, τ — время обхода частицей контура, α — азимутальный угол, проходимый частицей за время τ. Переходя в (2.4) от переменной ψ к V и используя (3.1), получим уравнения для двух циркуляций (здесь и далее штрих означает дифференцирование по V, индекс 0 опущен)

$$\frac{\partial\Gamma_1}{\partial T}=-a\Gamma_1'+\mu\Gamma_1''+\Gamma_2'[\tau^2(\Gamma_1'\Gamma_2-\Gamma_2'\Gamma_1)+\mu\alpha'-\alpha\mu']$$
$$\frac{\partial\Gamma_2}{\partial T}=-a\Gamma_2'+(\mu\Gamma_2')',\quad \mu=\tau\oint q_0 r^2\,ds \tag{3.2}$$

где величина μ является эффективным коэффициентом диффузии. Если коэффициенты μ, τ, α заданы, то уравнения (3.2) можно отнести к нелинейным уравнениям параболического типа, для решения которых необходимо знать начальное распределение циркуляций $\Gamma_1^\circ(V)$, $\Gamma_2^\circ(V)$ и значе-

[1] Во время подготовки данной статьи к печати вышла работа *Гиро Ж. П., Зейтунян Р. Х.* О вовлечении в движение вязкой жидкости внутри двумерной полости.— Журн. вычисл. матем. и матем. физики, 1984, № 7, с. 1106—1109, в которой для случая плоского течения было найдено условие, вытекающее из (2.4) при $\Gamma_{20}\equiv0$, $r\equiv1$, $a\equiv0$.

ния циркуляций на границах области $\Gamma_{ij}(T)$, $i, j=1, 2$. Коэффициенты μ, τ, α в свою очередь определяются из решения уравнения для функции тока

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right)+\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}=r^2\Gamma_1'+\Gamma_2\Gamma_2'\left(r^2\oint\frac{ds}{q_0r^2}-\tau\right) \tag{3.3}$$

с условиями непротекания на границах области. Значения циркуляций на границах должны выбираться из условия существования вблизи границ квазистационарных циклических пограничных слоев, в которых скорость изменяется от значений скорости на внешней границе $\mathbf{u}_{\tau e\,1}$, $\mathbf{u}_{\tau e\,2}$, полученных из (3.3), до заданных значений $\mathbf{u}_{\tau W1}$, $\mathbf{u}_{\tau W2}$. Можно, однако, ограничиться рассмотрением более простой обратной задачи — задав распределение циркуляций на границах $\Gamma_{ij}(T)$, находить из совместного решения (3.2), (3.3) скорости $\mathbf{u}_{\tau e\,1}$, $\mathbf{u}_{\tau e\,2}$, считая, что $\mathbf{u}_{\tau Wj}=\mathbf{u}_{\tau ej}$, а пограничный слой не образуется. В случае плоской области ($\Gamma_2=0$, $r=1$, $\Gamma_1=\Gamma$) уравнения (3.2), (3.3) переходят в

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial T}=-a\frac{\partial\Gamma}{\partial A}+\tau\Gamma\frac{\partial^2\Gamma}{\partial A^2},\quad \nabla^2\psi=\frac{\partial\Gamma}{\partial A} \tag{3.4}$$

где $A(\psi, T)$ — площадь, ограниченная линией тока. Даже обратная задача для плоской неосесимметричной области оказывается очень трудоемкой в основном из-за необходимости решать на каждом шаге по времени нелинейное интегродифференциальное уравнение для функции тока.

4. Стационарные состояния и режим сильного вдува. Из второго уравнения системы (3.2) для установившихся течений следует

$$\Gamma_2=\exp\left(a\int\limits_{V_0}^{V}\frac{dV}{\mu}\right)\left[C_1\int\limits_{V_0}^{V}\frac{1}{\mu}\exp\left(-a\int\limits_{V_0}^{V}\frac{dV}{\mu}\right)dV+C_2\right] \tag{4.1}$$

Если внутренние границы отсутствуют, то $a=0$, $\mu=O(V)$ при $V\to0$ и для того, чтобы избежать особенности вида $\Gamma_2=O(\ln V)$ при $V\to0$, необходимо положить $C_1=0$, $\Gamma_2=C_2=\mathrm{const}$. Это означает, что скорость $w_0=C_2/r$ индуцирована вихрем, расположенным на оси. Тогда $\Gamma_1=C_3+C_4V$ и, следовательно, $\mathbf{G}_0=(0,\ 0,\ C_4r)$ (в случае двумерного течения $\mathbf{G}_0=(0,\ C_4)$). Таким образом, из уравнений (3.2) восстанавливаются все результаты работы [2]. Наличие расхода $O(\varepsilon^2)$ через границы области приводит к стационарным распределениям циркуляций, отличным от указанных в [1, 2]. Рассмотрим, например, задачу о стационарном течении в двумерной области при больших значениях $|a|$

$$-\frac{\partial\Gamma}{\partial A}+\frac{1}{a}\tau\Gamma\frac{\partial^2\Gamma}{\partial A^2}=0,\quad A_i<A<A_e$$
$$\Gamma(A_i)=\Gamma_i,\qquad \Gamma(A_e)=\Gamma_e,\qquad \Gamma_i\Gamma_e>0 \tag{4.2}$$

При $|a|\to\infty$, $A=O(1)$ решение (4.2) имеет вид $\Gamma=\mathrm{const}+o(1)$. Такое решение соответствует потенциальному течению и не может удовлетворить всем граничным условиям. Чтобы удовлетворить граничным условиям, необходимо ввести пограничный слой толщиной $\delta A=O(|a|^{-1})$ вблизи границы A_i при $a<0$ или вблизи A_e при $a>0$ (из асимптотического анализа (4.2) следует, что любое иное положение пограничного слоя не позволяет удовлетворить условиям сращивания). Следовательно, при $|a|\to\infty$, $A=O(1)$ течение будет потенциальным с циркуляцией, равной циркуляции на границе, через которую производится вдув, а вблизи границы, через которую жидкость отсасывается, формируется пограничный слой толщиной $\delta A=O(|a|^{-1})$, в котором циркуляция изменяется от ее значения внутри области до заданного на границе. Для нестационарных течений с расходом $O(\delta)$, $\delta\gg\varepsilon^2$ вязкость во внутренних точках области перестает играть роль, время перестройки $T_1=\delta t$. Производя вновь вывод уравнений для циркуляций, получим

$$\frac{\partial\Gamma_1}{\partial T_1}=-a\frac{\partial\Gamma_1}{\partial V},\quad \frac{\partial\Gamma_2}{\partial T_1}=-a\frac{\partial\Gamma_2}{\partial V} \tag{4.3}$$

Решение уравнений переноса (4.3) представляется в виде волны, распространяющейся в направлении протекания расхода и полностью определяется заданием $\Gamma_{1i}(T)$, $\Gamma_{2i}(T)$ при $T>0$ на границе, через которую происходит вытекание и $\Gamma_i^\circ(V)$, $\Gamma_2^\circ(V)$ в начальный момент. Влияние вязкости будет существенным только вблизи границы, через которую производится отсос.

5. Двумерные осесимметричные течения. Рассмотрим область течения, ограниченную двумя соосными круговыми цилиндрами. Полагая течение двумерным и осесимметричным, получим $\tau=4\pi A/\Gamma$, первое из уравнений (3.4) становится линейным, а необходимость в решении второго отпадает. Пусть задано начальное распределение циркуляции $\Gamma^\circ(A)$ и постоянные значения циркуляции на границах Γ_i, Γ_e.

$$\frac{\partial\Gamma}{\partial T}=-a\frac{\partial\Gamma}{\partial A}+4\pi A\frac{\partial^2\Gamma}{\partial A^2},\qquad A_i<A<A_e,\qquad T>0$$

$$\Gamma(A,0)=\Gamma^\circ(A),\quad \Gamma(A_i,T)=\Gamma_i,\quad \Gamma(A_e,T)=\Gamma_e \tag{5.1}$$

Задача (5.1) допускает единственное стационарное решение

$$\Gamma_s(A)=\Gamma_i\frac{1-(A/A_e)^\theta}{1-(A_i/A_e)^\theta}+\Gamma_e\frac{(A/A_i)^\theta-1}{(A_e/A_i)^\theta-1}$$

$$\theta=1+a/4\pi=1+Q/4\pi\nu,\quad -\infty<\theta<+\infty \tag{5.2}$$

где Q — размерная величина расхода, протекающего через границы. Общее решение (5.1) может быть получено методом разделения переменных

$$\Gamma(A,T)=\Gamma_s(A)+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\exp(-\lambda_k^2T)g_k(A) \tag{5.3}$$

$$C_k=\frac{1}{\|g_k\|^2}\int_{A_i}^{A_e}[\Gamma^\circ(A)-\Gamma_s(A)]g_k(A)A^{-\theta}\,dA,\qquad \sigma=|\theta|$$

$$g_k(A)=A^{\theta/2}\left[Y_\sigma\left(\lambda_k\sqrt{\frac{A_i}{\pi}}\right)J_\sigma\left(\lambda_k\sqrt{\frac{A}{\pi}}\right)-Y_\sigma\left(\lambda_k\sqrt{\frac{A}{\pi}}\right)J_\sigma\left(\lambda_k\sqrt{\frac{A_i}{\pi}}\right)\right]$$

$$\|g_k\|^2=\frac{4}{\pi}\,\frac{J_\sigma^2(\lambda_k\sqrt{A_i/\pi})-J_\sigma^2(\lambda_k\sqrt{A_e/\pi})}{J_\sigma^2(\lambda_k\sqrt{A_e/\pi})}$$

Здесь Y_σ, J_σ — функции Бесселя порядка σ, а собственные значения λ_k являются корнями уравнения $g_k(A_e)=0$. Из (5.3) следует, что возмущения стационарного решения затухают экспоненциально, причем показатели экспоненты зависят от коэффициента θ, характеризующего интенсивность вдува.

В заключение отметим, что изложенный в настоящей работе подход применим только при отсутствии неустойчивости основного течения к бесконечно малым возмущениям (иначе условие ограниченности возмущений при $t\to\infty$ не может быть выполнено). Для двумерных течений достаточным условием устойчивости является $\partial^2\Gamma/\partial A^2>0$ во всем поле течения [3].

Автор благодарит В. Я. Нейланда за внимание, проявленное к работе, и обсуждение результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Prandtl L.* Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung.— Verhandlung 3 — Internat. Math. Kongr., Heidelberg, 1904. Leipzig: Teubner, 1905, S. 484–491.
2. *Batchelor G. K.* On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number.— J. Fluid. Mech., 1956, v. 1, pt 2, p. 177–190.
3. *Drazin P. G., Howard L. N.* Hydrodynamic stability of parallel flow of inviseid fluid.— Advances Appl. Mech. V. 9. New York — London: Acad. Press, 1966, p. 1–89.

Москва

Поступила в редакцию
24.X.1983