

УДК 532.5.522

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ СОСТАВНОЙ СТРУИ КАПЕЛЬНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

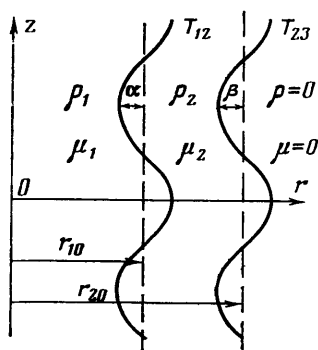
ШУТОВ А. А.

В линейной релеевской теории [1] степень устойчивости струи определяется вязкостными, инерционными характеристиками жидкостей и величиной межфазного поверхностного натяжения. Стабильность струи в неограниченной среде повышается при увеличении как вязкости струи, так и среды [2, 3]. Наличие двух границ раздела вызывает ряд особенностей развития неустойчивости такого жидкого слоя на твердой цилиндрической поверхности, в частности слой на внутренней поверхности цилиндра более неустойчив, чем на внешней [4]. В работах [5, 6] рассматривался распад жидкой цилиндрической оболочки во внешней среде. В данной работе рассмотрена в линейном приближении устойчивость составной струи несмешивающихся жидкостей к малым осесимметричным возмущениям поверхностей раздела. Приведены показатели неустойчивости струи с невязкой и очень вязкой оболочками. Найдены условия подавления быстро растущих неустойчивостей внутренней части струи (ядра) вязкой оболочкой.

1. Дисперсионное уравнение составной струи. Рассмотрим влияние внешнего коаксиального слоя конечной толщины (оболочки) на устойчивость внутренней жидкой нити (ядра). Малые осесимметричные возмущения цилиндрических поверхностей раздела несмешивающихся жидкостей имеют вид

$$r_j(z, t) = r_{j0} + \frac{\alpha}{\beta} \exp(i\omega t + ikz), \quad j=1, 2$$

Здесь r_{10} , r_{20} — радиусы невозмущенных цилиндров, амплитуды возмущений $\alpha \ll r_{10}$, $\beta \ll r_{20}$. Невозмущенные жидкости предполагаются покая-



Фиг. 1

щимися, параметры среды вне оболочки нулевые (фиг. 1). Ограниченные решения линеаризованных уравнений гидродинамики несжимаемых вязких жидкостей для функции тока ψ , определяемой соотношениями $V_r = -\partial\psi/r\partial z$, $V_z = \partial\psi/r\partial r$, для ядра и оболочки имеют соответственно вид [2, 4]

$$\begin{aligned} \psi_1 &= r[A_1 I_1(kr) + A_2 I_1(lr)] \exp(i\omega t + ikz) \\ \psi_2 &= r[A_3 I_1(kr) + A_4 I_1(mr) + A_5 K_1(kr) + A_6 K_1(mr)] \exp(i\omega t + ikz) \\ l^2 &= k^2 + i\omega\rho_1/\mu_1, \quad m^2 = k^2 + i\omega\rho_2/\mu_2 \end{aligned}$$

Здесь I_1, K_1 — функции Бесселя мнимого аргумента, ρ_1, ρ_2 — плотности, μ_1, μ_2 — вязкости ядра и оболочки соответственно. Линеаризованные граничные условия содержат условия непроницаемости и непроскальзывания, равенства касательных и нормальных напряжений и связь скоростей с амплитудами возмущений на соответствующих поверхностях раздела

$$\begin{aligned}
 r=r_1: \quad [V_r] &= [V_z] = [p_{rz}] = 0 \quad [p_{rr}] = p_{12}, \quad V_{r1} = \frac{dr_1}{dt} \\
 r=r_2: \quad [p_{rz}] &= 0, \quad [p_{rr}] = p_{23}, \quad V_{r2} = \frac{dr_2}{dt} \\
 p_{rz} &= \mu \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial V_r}{\partial z} \right), \quad p_{rr} = -p + 2\mu \frac{\partial V_r}{\partial r}, \quad p_{ij} = T_{ij} K
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь K — кривизна, T_{12} и T_{23} — коэффициенты поверхностного натяжения внутренней и внешней поверхностей раздела; квадратные скобки обозначают скачок величины на поверхности раздела. Подставив решения ψ_1, ψ_2 в систему (1.1) и исключив из нее малые амплитуды возмущений α и β , получим дисперсионное детерминантное уравнение размерности (6×6)

$$\det a_{ij} = 0 \tag{1.2}$$

$I_1(x)$	$I_1(y)$	$-I_1(x)$	$-I_1(q)$	$-K_1(x)$	$-K_1(q)$
$xI_0(x)$	$yI_0(y)$	$-xI_0(x)$	$-qI_0(q)$	$xK_0(x)$	$qK_0(q)$
$2\mu x^2 I_1(x)$	$\mu(x^2 + y^2) I_1(y)$	$-2x^2 I_1(x)$	$-(x^2 + q^2) I_1(q)$	$-2x^2 K_1(x)$	$-(x^2 + q^2) K_1(q)$
0	0	$2x^2 I_1(Rx)$	$(x^2 + q^2) I_1(Rq)$	$2x^2 K_1(Rx)$	$(x^2 + q^2) K_1(Rq)$
a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	a_{56}
0	0	a_{63}	a_{64}	a_{65}	a_{66}

$$\begin{aligned}
 a_{51} &= 2i\mu x^2 I_1'(x) - d_1 I_0(x) + 2ix\tau_{12} I_1(x) \\
 a_{52} &= 2i\mu xy I_1'(x) + 2ix\tau_{12} I_1(y), \quad a_{53} = d_2 I_0(x) - 2ix^2 I_1'(x) \\
 a_{54} &= -2ixq I_1'(q), \quad a_{55} = -d_2 K_0(x) - 2ix^2 K_1'(x), \quad a_{56} = -2ixq K_1'(q) \\
 a_{63} &= 2ix^2 I_1'(Rx) - d_2 I_0(Rx) + 2ixt_{23} I_1(Rx) \\
 a_{64} &= 2ixq I_1'(Rq) + 2ixt_{23} I_1(Rq) \\
 a_{65} &= 2ix^2 K_1'(Rx) + d_2 K_0(Rx) + 2ixt_{23} K_1(Rx) \\
 a_{66} &= 2ixq K_1'(Rq) + 2ixt_{23} K_1(Rq), \quad x = kr_{10}, \quad y = lr_{10}, \quad q = mr_{10}
 \end{aligned}$$

$$\tau_{12} = \frac{T_{12}(x^2 - 1)}{2\mu_2 r_{10} i \omega}, \quad t_{23} = \frac{T_{23}(R^2 x^2 - 1)}{2\mu_2 r_{10} i \omega R^2}$$

$$\mu = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad d_1 = \frac{\rho_1 \omega r_{10}^2}{\mu_2}, \quad d_2 = \frac{\rho_2 \omega r_{10}^2}{\mu_2}, \quad R = \frac{r_{20}}{r_{10}}$$

Дисперсионное уравнение (1.2) в пределе $R \rightarrow \infty$ переходит в дисперсионное соотношение работы [2] для струи в неограниченной среде, а при $R=1$ описывает свободную струю с эффективным коэффициентом поверхностного натяжения $T_e = T_{12} + T_{23}$. Рассмотрим уравнение (1.2) в случаях невязкой и очень вязкой оболочек.

2. Невязкая оболочка. При $\mu_2 \rightarrow 0$ вклад оболочки определяется ее инерцией и эффективным коэффициентом поверхностного натяжения. Если жидкость ядра также идеальная, то в безразмерных переменных получим следующее биквадратное уравнение:

$$\begin{aligned}
 a\Omega^4 + b\Omega^2 + c &= 0 \tag{2.1} \\
 \Omega^2 &= \rho_1 r_{10}^3 \frac{\omega^2}{T_{12}}, \quad P = \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad T = \frac{T_{23}}{T_{12}} \\
 a &= (1 - 1/P) I_0(x) K_0(Rx) + f(x) I_0(Rx)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b &= TPR^{-2}x(R^2x^2-1) [(1-1/P)I_0(x)K_1(Rx) - f(x)I_1(Rx)] - \\
 &\quad - x(x^2-1) [I_1(x)K_0(Rx) + K_1(x)I_0(Rx)] \\
 c &= TPR^{-2}x^2(x^2-1)(R^2x^2-1) [K_1(x)I_1(Rx) - I_1(x)K_1(Rx)], \\
 f &= \frac{I_0(x)K_1(x)}{I_1(x)} + \frac{K_0(x)}{P}
 \end{aligned}$$

Для толстой оболочки при $R \gg 1$ имеем

$$\Omega_1^2 \approx \frac{TP}{R^2} x(R^2x^2-1) \frac{I_1(Rx)}{I_0(Rx)} \quad (2.2)$$

$$\Omega_2^2 \approx x(x^2-1) \frac{I_1(x)}{I_0(x)} \frac{1}{1+K_0(x)I_1(x)/PK_1(x)I_0(x)} \quad (2.3)$$

Соотношение (2.2) соответствует свободной струе с параметрами ρ_2 , r_{20} , T_{23} , а второй корень описывает струю с ρ_1 , r_{10} , T_{12} в среде с плотностью ρ_2 [3]. В данном случае поверхности раздела ведут себя независимо и развитие возмущений границ происходит без влияния друг на друга. Для тонкой оболочки ($R \sim 1$) первое приближение по толщине оболочки $\delta < 1$ имеет вид

$$\begin{aligned}
 \Omega_1^2 &= \delta \frac{TP}{T+1} x^2(R^2x^2-1), \quad R=1+\delta=1+\frac{r_{20}-r_{10}}{r_{10}} \\
 \Omega_2^2 &= (x^2-1) \frac{xI_1}{I_0} \left[T+1+\delta \left(PT \frac{T+2}{T+1} - T - \frac{T+1}{P} \frac{xI_1}{I_0} \right) \right]
 \end{aligned}$$

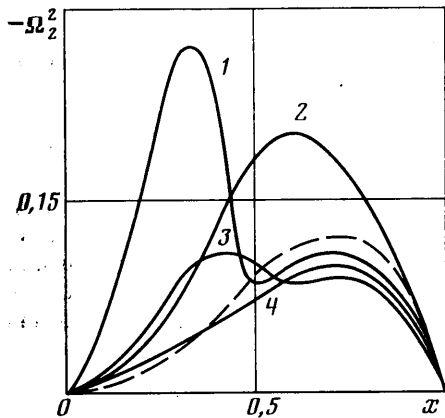
Здесь и далее функции Бесселя, у которых аргумент не указан, являются функциями x . Внешний слой дает малый вклад в показатель неустойчивости струи, пропорциональный толщине оболочки, причем ядро ведет себя как струя идеальной жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения $T_e = T_{12} + T_{23}$. При этом свободная струя может быть как более, так и менее устойчивой, чем струя с тонкой оболочкой, в зависимости от выполнения одного из неравенств $T_{13} \geq T_{12} + T_{23}$.

Для межфазного поверхностного натяжения двух жидкостей часто оказывается справедливым эмпирическое правило Антонова, согласно которому межфазное натяжение определяется как разность натяжений более полярной T_1 и менее полярной T_2 жидкостей, где коэффициенты T_1 и T_2 относятся к их взаимным насыщенным растворам [7]. Если снаружи менее полярная жидкость, то из правила Антонова имеем $T_{12} = T_1 - T_{23}$, где T_1 — поверхностное натяжение насыщенного раствора жидкости оболочки в более полярной жидкости ядра. Натяжение чистой жидкости превышает натяжение слабого раствора той же жидкости с менее полярной примесью, поэтому $T_{13} > T_{12} + T_{23}$ и струя с оболочкой из менее полярной жидкости более устойчива, чем свободная струя. Если снаружи более полярная жидкость, то в этих же условиях возможна как стабилизация, так и дестабилизация струи.

На фиг. 2 приведены некоторые дисперсионные кривые уравнения (2.1) при следующих значениях параметров (T, P, R): (5; 5; 2,1) — 1; (1; 5; 1,2) — 2; (5; 1; 2,1) — 3; (0,1; 1; 2) — 4. Штрихами нанесена релеевская кривая для свободной струи, ветвь Ω_1 при $x < 1$ лежит всегда ближе к оси x и на фигуре она не приведена. На фиг. 3 представлена зависимость максимального показателя неустойчивости $\text{Im } \Omega_{\max}$ по волновому числу k от относительной толщины оболочки R при различных значениях параметров: кривые, начинающиеся в точках A, B, C , имеют T , равные соответственно 0,1; 1; 5, и выходят на асимптоты D, E, F со значениями P , равными 5; 1; 0,1.

Аналогичная постановка задачи приведена в [6], где рассмотрен распад идеальной оболочки в среде идеальной жидкости.

Также мало стабилизирующее действие невязкой оболочки на очень вязкое ядро, т. е. в случае, когда можно пренебречь инерционными характеристиками ядра. Для тонких оболочек в безынерционном приближении, т. е. при $(T_{12}+T_{23})\rho_2 r_{10}/\mu_1^2 \ll 1$, показатель неустойчивости определяется соотношением $\omega = \omega_0 + \delta\omega_1$, где в нулевом порядке по толщине оболочки δ имеем спектр ω_0 очень вязкой струи [2, 3] с $T_e = T_{12} + T_{23}$, а максимальный вклад первого приближения в показатель неустойчивости равен $i\omega_m = \max i\omega_1$

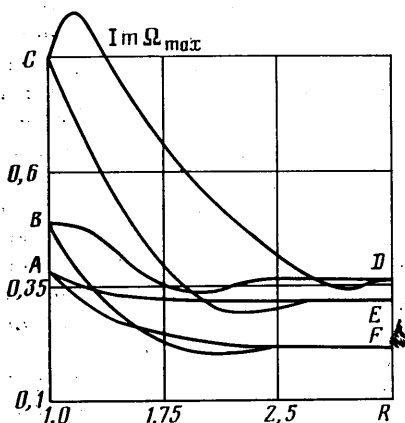


Фиг. 2

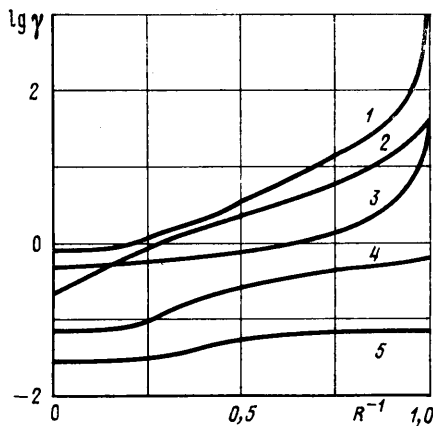
$$\omega_0 = \frac{(T_{12}+T_{23})(x^2-1)}{2i\mu_1 r_{10}} \times \frac{I_1^2}{(x^2+1)I_1^2 - x^2 I_0^2} \quad (2.4)$$

$$i\omega_m = \frac{T_{23}}{2\mu_1 r_{10}} + \frac{(T_{12}+T_{23})\rho_2 r_{10}}{36\mu_1^2} \times \frac{(T_{12}+T_{23})}{2\mu_1 r_{10}}$$

3. Очень вязкая оболочка. Вязкостные свойства жидкостей существенно изменяют стабильность струи [2, 3]. Оболочка, имеющая достаточ-



Фиг. 3



Фиг. 4

но большую вязкость, может настолько подавить быстро растущие неустойчивости ядра, что распад всей струи будет определяться параметрами оболочки, ее вязкостью и толщиной. Рассмотрим дисперсионное уравнение (1.2) в безынерционном приближении по жидкости оболочки, т. е. при $(T_{12}+T_{23})\rho_2 r_{10}/\mu_2^2 \ll 1$.

Для невязкого ядра, разлагая (1.2) по δ до второго порядка, получим уравнение для определения зависимости $\omega(x)$

$$d_1 I_0 - 2ix(\tau_{12} + \tau_{23})I_1 + \frac{\delta}{2}[-d_1 I_0 + 2ix(\tau_{12} + \tau_{23})I_1 - 2ixI_1 \left(3 + \tau_{23} \frac{3x^2+1}{x^2-1}\right) + (d_1 I_0 - 2ix\tau_{12}I_1)(3 + \tau_{23})] = 0 \quad (3.1)$$

При доминировании вязкости над инерцией жидкости максимум показателя неустойчивости расположен в области малых x (длинноволновое приближение) [2, 3]. Разлагая функции Бесселя и удерживая главные в длинноволновой области слагаемые, получим дисперсионное уравнение для невязкого ядра с вязкой оболочкой

$$\omega^2 - i\omega \frac{3\mu_2\delta}{2\rho_1 r_{10}^2} x^2 - \frac{(T_{12} + T_{23})(x^2 - 1)x^2}{2\rho_1 r_{10}^3} = 0 \quad (3.2)$$

Дифференцируя (3.2) и учитывая, что в точке максимума $d\omega/dx=0$, находим выражение для максимального показателя неустойчивости и его положение

$$i\omega_{\max} = \frac{T_{12} + T_{23}}{3\mu_2 r_{10} \delta} (1 - 2x^2), \quad \frac{1}{x^2} = 2 + \sqrt{\frac{9\mu_2^2 \delta^2}{2(T_{12} + T_{23})\rho_1 r_{10}}}$$

В длинноволновой области максимальный инкремент равен

$$i\omega_{\max} = \frac{T_{12} + T_{23}}{3\mu_2 r_{10} \delta}, \quad \delta^2 \gg \frac{2(T_{12} + T_{23})\rho_1 r_{10}}{9\mu_2^2} \quad (3.3)$$

При выполнении неравенства в (3.3) устойчивость всей струи определяется в основном вязкостью и толщиной оболочки и соответствующим подбором ее свойств, показатель неустойчивости можно сделать неограниченно малым.

Рассмотрим струю с вязким ядром, для которой безынерционное приближение справедливо и для жидкости ядра. В этом случае уравнение (1.2) с точностью до второго порядка по δ имеет вид

$$G_0(x) + \delta G_1(x) + \delta^2 G_2(x) = 0 \quad (3.4)$$

$$G_0(x) = \mu [\mu g_1 + (\tau_{12} + \tau_{23}) I_1^2] - \frac{1}{x}$$

$$G_1(x) = -G_0 - 2(\tau_{12} + \tau_{23}) g_2 + \mu \left[g_3 - 2(1 - \tau_{23}) g_4 + \right.$$

$$\left. + \left(2 + \tau_{23} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} \right) \frac{I_1^2}{x} + (\mu g_1 + \tau_{12} I_1^2) \frac{2}{x} \right]$$

$$G_2(x) = \left[-3 - 2\tau_{12} - 2\tau_{23} \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} - \tau_{12}\tau_{23} + o(\mu) \right] g_2, \quad g_1(x) = x^2 I_0^2 - (x^2 + 1) I_1^2$$

$$g_2(x) = x I_0^2 - x I_1^2 - 2I_0 I_1, \quad g_3(x) = 2(2x I_0^2 - x I_1^2 - 2I_0 I_1), \quad g_4(x) = x I_0^2 - x I_1^2 - I_0 I_1$$

Если оболочка очень тонка, либо ее вязкость недостаточно велика, т. е. $\mu \gg \delta$, то показатель неустойчивости составной струи содержит малые поправки по относительной толщине оболочки δ к инкременту (2.4). В обратном случае $\delta \gg \mu$ из (3.4) имеем

$$i\omega = \frac{T_{12} + T_{23}}{2\mu_2 r_{10} \delta} (1 - x^2) \frac{\mu + 2\delta h_1(x)}{2\mu h_2(x) + 3\delta h_1(x)} \quad (3.5)$$

$$h_1(x) = x^2 + 2x \frac{I_0}{I_1} - x^2 \frac{I_0^2}{I_1^2}, \quad h_2(x) = 1 + x^2 \frac{I_0^2}{I_1^2} - x \frac{I_0}{I_1}$$

Максимум (3.5) имеет место при $x_{\max} = (3\mu/\delta)^{1/4}$ и определяется, как и в случае невязкого ядра, выражением (3.3). Обозначая $\mu/\delta = \varepsilon < 1$ и используя выражение для x_{\max} , получим следующее выражение для инкремента $i\omega_{\max}$ в наинизшем порядке по μ , δ :

$$\frac{3\mu_2 r_{10} \delta i\omega_{\max}}{T_{12} + T_{23}} = \frac{(1 - \sqrt{3\varepsilon})(1 + \delta + \sqrt{\varepsilon/3}) - 2\delta T/(T+1)}{1 + 4\sqrt{\varepsilon/3}} \quad (3.6)$$

На фиг. 4 приведены некоторые зависимости безразмерного максимального показателя неустойчивости $\gamma = 2\mu_2 r_{10} i \omega_{\max} / T_{12}$ уравнения (1.2) в безынерционном приближении по обеим жидкостям от отношения r_{10}/r_{20} при следующих значениях параметров (T, μ) : $(10, 10^{-3}) - 1$; $(10, 10^{-1}) - 2$; $(10^{-1}, 10^{-2}) - 3$; $(1, 1) - 4$; $(10^{-1}, 5) - 5$. Соотношение (3.6) для тонких оболочек выполняется тем точнее, чем отношение ϵ меньше. Таким образом, и в случае вязкого ядра можно существенно снизить степень неустойчивости струи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стрелл Д. В. (Релей). Теория звука. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1955. 476 с.
2. Tomotika S. On the instability of a cylindrical thread of viscous liquid surrounded by another viscous fluid.— Proc. Roy. Soc. (London), 1935, v. A150, p. 322–337.
3. Meister B. J., Scheele G. F. Generalized solution of the Tomotika stability analysis for a cylindrical jet.— AIChE Journal, 1967, v. 13, № 4, p. 682–688.
4. Hasegawa E., Nakaya C. Stability of a liquid layer down the surface of a vertical cylinder.— J. Phys. Soc. Jap., 1970, v. 29, № 6, p. 1634–1639.
5. Лышевский А. С. Об устойчивости и распаде полой струи вязкой жидкости, движущейся с малыми скоростями.— Изв. вузов. Энергетика, 1958, № 3, с. 95–102.
6. Дитякин Ю. Ф., Клячко Л. А., Новиков Б. В., Ягодкин В. И. Распыливание жидкостей. М.: Машиностроение, 1977. 208 с.
7. Щукин Е. Д., Перцов А. В., Амелина Е. А. Коллоидная химия. М.: Изд-во МГУ, 1982. 352 с.

Обнинск

Поступила в редакцию
25.VI.1984