

УДК 532.517.4

ПРЕДТУРБУЛЕНТНОСТЬ В КОНЕЧНОМЕРНОЙ МОДЕЛИ КОНВЕКЦИИ

ШТЕРН В. Н., ШУМОВА Л. В.

Переход от ламинарного режима течения к турбулентному может быть мягким или жестким [1, 2]. В первом случае интегральные характеристики, такие, как сопротивление или тепловой поток, меняются непрерывно, а во втором — скачком. Жесткому переходу может предшествовать предтурбулентность [3], когда хаотические решения существуют, но турбулентный режим неустойчив. Анализ предтурбулентности важен для предсказания возможного катастрофического изменения режима.

Проследить зарождение турбулентности непосредственно в рамках уравнений гидродинамики и теплообмена весьма сложно. Здесь пока удалось выявить лишь простейшие бифуркации стационарных и периодических решений. Использование метода Галеркина и сведение задачи к эволюционной системе обыкновенных дифференциальных уравнений позволяет продвинуться по бифуркационному дереву значительно дальше. В частности, уже обнаружено несколько типов бифуркаций, ведущих к возникновению хаотического режима [4]: разрушение торов; касательная бифуркация циклов, порождающая перемежающуюся турбулентность; сгущение бифуркаций удвоения. В перечисленных «сценариях» интегральные характеристики меняются плавно, т. е. реализуется мягкий переход. Иная картина наблюдается при возникновении аттрактора Лоренца [5]. В результате разрушения петли сепаратрисы там рождается неприятягивающее хаотическое множество, которое с ростом числа Рэлея в результате граничного кризиса [6] становится аттрактором. При этом имеет место гистерезис и катастрофическая перестройка режима.

В настоящей работе описаны новые типы предтурбулентности, механизмы их возникновения и взаимной трансформации на примере системы Карри [7]. Эта система является маломодовым галеркинским приближением задачи Рэлея о конвекции в горизонтальном слое, подогреваемом снизу. Она обобщает систему Лоренца, имея порядок 14, а не 3. Выбор системы Карри связан не столько с тем, что она дает более реалистическую аппроксимацию задачи Рэлея, сколько с ее относительной многомерностью и более богатым набором бифуркационных явлений.

1. Отправной точкой является классическая задача естественной конвекции, описываемая уравнениями Буссинеска [8]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Delta \psi}{\partial t} &= - \frac{\partial (\psi, \Delta \psi)}{\partial (x, y)} + \sigma \Delta^2 \psi + \sigma \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta}{\partial t} &= - \frac{\partial (\psi, \theta)}{\partial (x, y)} + R \frac{\partial \psi}{\partial x} + \Delta \theta \\ \Delta \psi &= \psi = \theta = 0 \quad (y=0, \pi) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь ψ — функция тока рассматриваемого двумерного течения, θ — отклонение температуры от линейного профиля, σ и R обозначают соответственно числа Прандтля и Рэлея. Граничные условия позволяют искать решения в виде рядов по синусам и косинусам

$$\begin{aligned} \psi(x, y, t) &= \sum_{m, n} \psi_{mn}(t) \sin(amx) \sin(ny) \\ \theta(x, y, t) &= \sum_{m, n} \theta_{mn}(t) \cos(amx) \sin(ny) \end{aligned}$$

В реальных расчетах осуществляется конечномерный обрыв этих рядов. В модели Карри отличными от нуля считаются лишь следующие коэффициенты:

$$\psi_{11}, \psi_{13}, \psi_{31}, \psi_{22}, \psi_{33}, \psi_{24}, \theta_{11}, \theta_{13}, \theta_{31}, \theta_{22}, \theta_{33}, \theta_{24}, \theta_{02}, \theta_{04} \quad (1.2)$$

Для них методом Галеркина получается динамическая система обыкновенных дифференциальных уравнений.

Следует отметить, что, как показано в [9, 10], существуют определенные правила обрыва, при выполнении которых точно удовлетворяются некоторые интегральные свойства уравнений Буссинеска — условия баланса кинетической и тепловой энергии. Хотя система Карри этим требованиям не удовлетворяет, расчеты показывают, что все ее аттракторы расположены в ограниченной области фазового пространства, а бесконечно удаленная точка является отталкивающей. Это качественно соответствует тому, что диссипативные факторы ограничивают энергию. С другой стороны, достоинством системы Карри является то, что, будучи не слишком многомерной (а следовательно, обозримой), она богата новыми бифуркационными процессами и, в частности, новыми типами предтурбулентности.

Система Карри обладает симметрией относительно смены знака у переменных с нечетными индексами. Другими словами, фазовое пространство R_{14} может быть разложено на подпространства $RS: \{\psi_{11}, \psi_{13}, \psi_{31}, \psi_{33}, \theta_{11}, \theta_{13}, \theta_{31}, \theta_{33}\}$, в котором есть центральная симметрия, и $RA: \{\psi_{22}, \psi_{24}, \theta_{22}, \theta_{24}, \theta_{02}, \theta_{04}\}$, где такой симметрии нет. Как и в системе Лоренца, наличие симметрии существенно сказывается на бифуркационных свойствах. Задача содержит три параметра: волновое число a , определяющее пространственный период движения; число Прандтля σ , фиксированное здесь значением $\sigma=10$; число Рэлея, которое будет использоваться в нормированной форме $r=R/R_c$, где $R_c=6,75$ — критическое число Рэлея, при котором теряет устойчивость состояние покоя.

В пространстве параметров могут существовать поверхности, на которых происходит рождение (или исчезновение) новых стационарных, периодических и более сложных центральных (т. е. состоящих из предельных точек) траекторий. Такие поверхности называют бифуркационными пленками, построение и анализ которых является одной из основных задач теории устойчивости и теории ветвления. Часть бифуркационных пленок может быть найдена при помощи локальных методов, т. е. на основе анализа малых возмущений центральных траекторий. Главным инструментом тут служит изучение спектра линеаризованных уравнений. Некоторые результаты применения такого локального подхода к системе Карри изложены во втором разделе. Но обнаружение бифуркационных пленок, связанных с возникновением предтурбулентности, требует принципиально нелокального подхода. В качестве инструмента исследования здесь используется поиск гомоклинических контуров (петель сепаратрис) и изучение характера их трансформации при изменении параметров.

Система (1.1) допускает тривиальное решение $S_0: \psi=\theta=0$, отвечающее состоянию покоя и режиму теплопроводности. Линейный анализ устойчивости этого стационарного решения, выполненный Рэлеем [8], показывает, что спектр собственных значений веществен и собственные значения проходят через ноль при

$$r=(m^2 a^2 + n^2)^3 / (6,75 m^2 a^2) \quad (1.3)$$

Каждая из поверхностей (1.3) является бифуркационной пленкой, на которой от S_0 ответвляются стационарные конвективные режимы. В модели Карри таких поверхностей шесть, причем индексы m, n пробегает те же значения, что и у ψ в (1.2). Обозначив эти стационарные решения $S_i, i=1, \dots, 6$, упорядочим номера по возрастанию r при $a=1/\sqrt{2}$ (которое отвечает минимальному значению $r=1$ в (1.3) при $m=n=1$). Из-за транс-

ляционной симметрии (сдвиг начала координат по оси x) спектр (1.1) вырожден. В модели Карри это вырождение сводится лишь к упомянутой симметрии относительно смены знака у некоторых переменных. Поэтому на каждой поверхности (1.3) рождается пара физически эквивалентных (со сдвигом на полпериода) решений. Такую бифуркацию называют «вилочной».

2. Рассмотрим более подробно локальные бифуркации при $a=1/\sqrt{2}$, оставив свободной только величину r . Поскольку пространство параметров стало одномерным, карту режимов удобно изобразить на плоскости (Nu, r) , где число Нуссельта Nu , имеющее физический смысл отношения фактического теплового потока к теплового потоку в режиме теплопроводности, позволяет различать решения, одновременно существующие при фиксированных значениях r . Для модели Карри число Нуссельта связано с исходными переменными формулой

$$Nu=1-8(\theta_{02}+\theta_{04})/(27r)$$

Результаты приведены на фиг. 1. Устойчивым режимам соответствуют сплошные кривые, неустойчивым — штриховые, причем число параллельных штрихов равно числу положительных собственных значений, т. е. размерности неустойчивого многообразия. При $r < 1$ устойчив покой S_0 , затем устойчивость наследует стационарный конвективный режим S_1 . Его последующие бифуркации при $r > 43$ через циклы к стохастике исследованы Карри. Но уже при гораздо меньших r происходят интересные бифуркационные события.

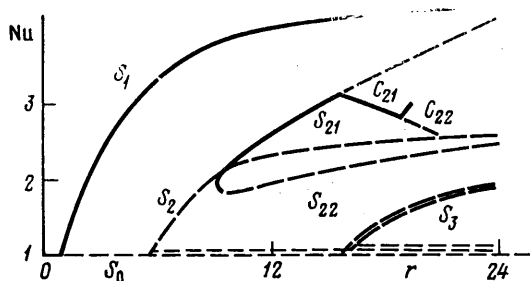
При $r \approx 5,78$ от основного ствола S_0 бифурцирует ветвь S_2 , которая соответствует мелкочаистой стационарной конвекции. В окрестности точки ветвления это неустойчивый режим. При $r \approx 9$ в результате бифуркации «рождение — смерть» возникает пара стационарных решений: неустойчивое S_{22} и устойчивое S_{21} . При $r \approx 9,1$ происходит двусторонняя бифуркация, в результате которой S_2 и S_{21} обмениваются свойствами устойчивости. Двусторонняя бифуркация, вообще говоря, является негрубой, но реализуется здесь благодаря специальным свойствам системы. Она допускает решения, имеющие отличными от нуля только переменные $\psi_{31}, \psi_{33}, \theta_{31}, \theta_{33}, \theta_{02}, \theta_{04}$. Именно этому классу принадлежит S_2 , в то время как у S_{21}, S_{22} отличны от нуля, вообще говоря, все 14 переменных. Поэтому решения легко различить и убедиться, что решение S_2 продолжимо и бифуркация — двусторонняя.

Таким образом, в определенном диапазоне r существуют два стационарных устойчивых в малом режима конвекции. (Аналогичный результат был получен Н. В. Петровской, причем она обнаружила, что это свойство сохраняется и в более многомерных моделях.) Если система находилась в состоянии S_2 , то с уменьшением числа Рэлея происходит катастрофический переход в состояние S_1 . Режимы отличаются масштабами конвективных ячеек. Для значения $r=13,5$ линии тока на одном полупериоде по r показаны на фиг. 2.

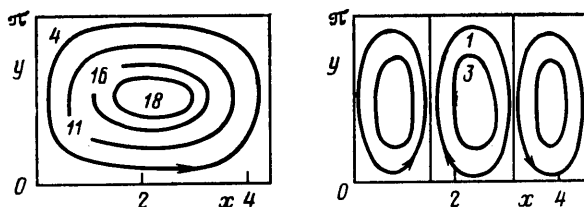
Правая часть отвечает S_2 , причем, когда r становится меньше точки двусторонней бифуркации, внешние линии тока перезамыкаются, образуя связанное целое.

Режим S_2 теряет устойчивость при $r \approx 16$, когда происходит бифуркация рождения цикла C_{21} , наследующего устойчивость. Конвективные ячейки начинают осциллировать, то уширяясь, то сужаясь в средней части. При $r=19,4$ цикл C_{21} теряет устойчивость, в результате бифуркации удвоения периода рождается устойчивый цикл C_{22} , с ростом r бифуркации удвоения сгущаются (были прослежены три такие бифуркации) и возникает метастабильный хаотический режим. Он прерывается окнами устойчивых циклов в определенных интервалах изменения r . Один из таких интервалов при $r > 43$ был обнаружен в [7].

Соответственно числу устойчивых режимов существует разделение фазового пространства на бассейны (области притяжения). При $r > 1$ таких бассейнов два, а при $r > 9$ уже четыре. Разделяющие бассейны сепаратрисы при небольших r являются гладкими поверхностями (многообразиями коразмерности 1). С увеличением r эти поверхности деформируются и при некотором r может произойти самокасание. Такое значение параметра является бифуркационным. Сепаратриса перестает быть многообразием, приобретает бесконечнолистную канторову структуру, т. е. становится фрактальным [11] множеством. С этим и связано возникновение пред-



Фиг. 1



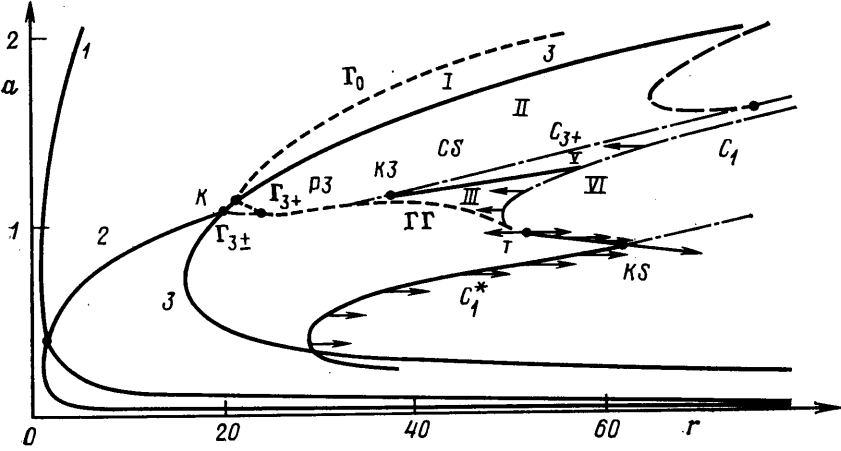
Фиг. 2

турбулентности. Исследуем эти принципиально нелокальные бифуркации на плоскости параметров (r, a) .

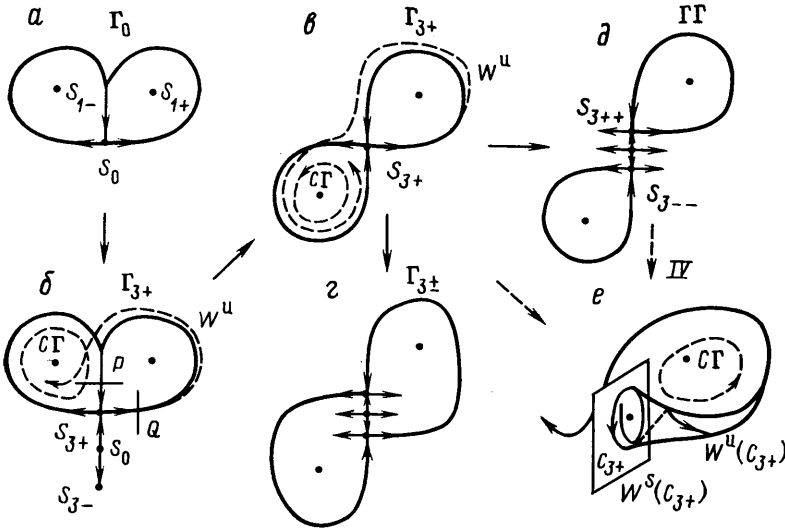
3. На фиг. 3 кривые 1–3 являются сечениями бифуркационных пленок ($\sigma=10$), отвечающих рождению стационарных режимов S_1 – S_3 соответственно. При достаточно больших a существует широкий диапазон значений r , когда система Карри обладает лишь тремя стационарными решениями: S_0 и $S_{1\pm}$. Эволюция структуры фазового пространства происходит в этом диапазоне качественно подобно случаю системы Лоренца [3, 7, 12]. Стационарные точки S_1 , рождаясь как узлы, затем становятся фокусами по некоторым переменным. Численные расчеты показывают, что неустойчивые многообразия S_0 при этом спиральными линиями навиваются на S_1 . При некотором r внешние витки спиралей замыкаются на S_0 , образуя гомоклинический контур Γ_0 . Качественно он изображен на фиг. 4, а в проекции на плоскость, касающуюся в точке S_0 двух первых собственных векторов линеаризованных на S_0 уравнений. Эти векторы отвечают положительному λ_1 и ближайшему к нулю отрицательному λ_2 собственным значениям. Заметим, что первый собственный вектор принадлежит центрально-симметричному подпространству RS , а второй принадлежит RA . Там же изображены проекции стационарных точек S_1 .

Бифуркационная пленка, на которой существует гомоклинический контур Γ_0 , представлена на фиг. 3 кривой Γ_0 . Пересечение этой пленки слева направо приводит к появлению предтурбулентности лоренцева типа. Анализ такой бифуркации, как и последующей, связанной с катастрофическим переходом от скрытой турбулентности к явной, может быть проведен в рамках одномерного отображения, которое будет рассмотрено в следующем разделе.

В точке пересечения бифуркационных пленок, соответствующих кривым β и Γ_0 на фиг. 3, происходит изменение структуры фазового пространства. Характер этого изменения отражается переходом от фиг. 4, а к 4, б. Седло S_0 , которое является ключевым для «гомоклинной бабочки» (фиг. 4, а), бифурцирует, порождая две седловые точки S_{3+} и S_{3-} . Собственный вектор, отвечающий проходящему через ноль собственному значению, принадлежит подпространству RA , поэтому структура фазового про-



Фиг. 3



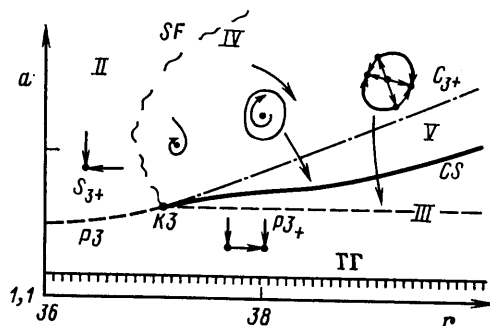
Фиг. 4

странства меняется несимметрично. Гомоклиная бабочка отходит от S_0 вместе с седлом S_{3+} , которое становится для нее ключевым. Это происходит вблизи точки K пересечения кривых 2 и 3.

При движении направо вдоль Γ_{3+} на фиг. 3 в спектре стационарного решения S_{3+} два ближайших к нулю отрицательных собственных значения, пройдя точку кратности, меняются местами. Новый ведущий собственный вектор оказывается принадлежащим центрально-симметричному подпространству. Это приводит к повороту крыльев гомоклиной бабочки (переход от фиг. 4, б к 4, в). При пересечении Γ_{3+} кривой $PЗ$ на фиг. 3 точка S_{3+} бифурцирует по центрально-симметричному направлению. Из точки пересечения выходят две бифуркационные пленки: $\Gamma_{3\pm}$, соот-

ветствующая гомоклиной «восьмерке» на фиг. 4, з, и ГГ, соответствующая двум разделенным гомоклиным контурам (фиг. 4, д). Пересечение Γ_{\pm} не связано с появлением предтурбулентности. Предтурбулентность появляется выше кривой ГГ на фиг. 3.

Ключевое седло, на котором замыкается гомоклиный контур, обеспечивает сильное разбегание траекторий, находящихся по разные стороны устойчивого многообразия седла. Другими словами, седловая точка является своеобразным реле. Это свойство определяющее и для бифурцирующей предтурбулентности. Неустойчивые многообразия обеспечивают возвращение и перемешивание траекторий. Поэтому реле вместе с их неустойчивыми многообразиями естественно назвать турбулизатором. Типы предтурбулентности можно классифицировать по их реле. Между



Фиг. 5

кривыми \mathcal{Z} и Γ_0 на фиг. 3 реализуется I тип (лоренцев), у которого роль реле играет S_0 , внутри области, ограниченной кривыми \mathcal{Z} , Γ_{\pm} , $P\mathcal{Z}$, реализуется II тип (тоже лоренцев) с седлом $S_{\mathcal{Z}+}$ в качестве реле. Наконец, между кривыми $P\mathcal{Z}$ и $\Gamma\Gamma$ существует III тип предтурбулентности, в котором в качестве реле служат два симметричных седла $S_{\mathcal{Z}++}$ и $S_{\mathcal{Z}+-}$.

При движении вдоль кривой $P\mathcal{Z}$ в сторону увеличения r приходим к точке K_3 , где спектр $S_{\mathcal{Z}+}$ становится двукратно вырожденным. Здесь появляется V тип предтурбулентности, у которого роль реле исполняет седловая цикл. Окрестность точки K_3 изображена на фиг. 5. При переходе через линию $C_{\mathcal{Z}+}$ слева направо происходит бифуркация рождения цикла $C_{\mathcal{Z}+}$ от стационарной точки $S_{\mathcal{Z}+}$. На линии $C\mathcal{S}$ в результате бифуркации рождения — смерть на цикле появляются две стационарные точки, а сам цикл исчезает. При движении далее по часовой стрелке вокруг K_3 в результате вилочных бифуркаций исчезают последовательно на линиях $P\mathcal{Z}+$ и $P\mathcal{Z}-$ симметричные пары стационарных точек. Характер бифуркаций поясняют диаграммы на фиг. 5. В секторе между линиями $C_{\mathcal{Z}+}$ и $C\mathcal{S}$ реализуется V тип предтурбулентности. Линия SF отвечает превращению стационарной точки $S_{\mathcal{Z}+}$ из узла в фокус по двум главным направлениям. Между SF и $C_{\mathcal{Z}+}$ расположен IV тип предтурбулентности, у которой роль реле исполняет седло-фокус.

Все типы предтурбулентности с увеличением числа Рэля либо переходят друг в друга, либо преобразуются в устойчивую турбулентность посредством так называемого граничного кризиса [6]. Суть его вкратце в следующем [5]. При разрушении гомоклиного контура рождается счетное множество различных циклов, но особую роль играет простейший цикл CT , который схематически изображен на фиг. 4, б, в. Этот цикл, а точнее, его устойчивое многообразие, лежит на границе области притяжения к стационарным решениям S_{1-} и S_{1+} (для симметричного цикла). При возникновении предтурбулентности неустойчивое многообразие W^u ключевого седла S_0 или другого реле, например цикла $C_{\mathcal{Z}+}$, попадает внутрь области притяжения (см. фиг. 4, б). В этом случае все хаотические траекто-

рии принадлежат сепаратрисной поверхности, не имея своей области притяжения, т. е. хаотический режим неустойчив.

Когда r возрастает, W_u проходит через устойчивое многообразие CG (переход от фиг. 4, б к 4, в). Момент перехода и является граничным кризисом. За кризисом у хаотического режима появляется собственная область притяжения — он становится устойчивым. Цикл CG лежит на границе, разделяющей области притяжения к стохастическому аттрактору и к стационарному решению $S_{1-}(S_{1+})$. Эти метастабильные режимы существуют в определенном диапазоне изменения параметров. При дальнейшем возрастании r цикл CG сжимается к точке S_{1-} и исчезает посредством обратной бифуркации, в результате чего S_{1-} теряет устойчивость. Соответствующая этим событиям бифуркационная пленка нанесена на фиг. 3 линией $C1$. Стрелками указано направление бифуркации цикла. Правее $C1$ в области VI существует лишь стохастический аттрактор, левее $C1$ расположена неширокая гистерезисная полоса, где одновременно устойчивы как хаотический режим, так и $S_{1\pm}$. При увеличении и уменьшении r имеет место катастрофическая смена режимов.

На кривой $C1$ есть точка T , где обратная бифуркация цикла сменяется прямой. При меньших a существует бифуркационная пленка $C1^*$, где также происходит прямая бифуркация цикла, но вызванная прохождением через мнимую ось уже другой комплексно-сопряженной пары собственных значений. В точке KS , где пленки пересекаются, через мнимую ось одновременно проходят две пары собственных значений. Это не точка кратности спектра, так как мнимые части не совпадают и, вообще говоря, несоизмеримы. Поэтому там происходит прямая бифуркация двумерного тора. Ниже точки KS тор бифурцирует уже не от стационарной точки S_{1-} , а от цикла $C1^*$. При $a=1/\sqrt{2}$ эту бифуркацию зарегистрировал Карри [7].

4. Возникновение и метаморфозы предтурбулентности можно проанализировать при помощи одномерного («ведущего») отображения. Принципиальная схема построения такого отображения вблизи петли сепаратрисы дана в [13]. Если координаты вдоль первых двух собственных направлений седла обозначить через u и v , то линеаризация в окрестности седла приводит к уравнениям $\dot{u}=\lambda_1 u$; $\dot{v}=\lambda_2 v$; $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$, откуда уравнение траекторий имеет вид $\lambda_1 \ln v = \lambda_2 \ln u + \text{const}$. Для сечений $P(v=\varepsilon_1)$ и $Q(u=\varepsilon_2)$, $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 \ll 1$ (см. фиг. 4, б), получим $v_Q = A_1 u_P^{1-\nu}$, $\nu = 1 + \lambda_2/\lambda_1$. При построении отображения $Q \rightarrow P$ вдоль потока линеаризацию можно осуществить около одной из характерных траекторий, например цикла CG . Тогда $u_P^* - u_C = A_2(v_Q - v_C)$, где u_C, v_C — координаты CG соответственно в сечениях P и Q . Отсюда получаем отображение $P \rightarrow P$

$$u_P^* = -A_3 + A_4 u_P^{1-\nu}$$

В численных расчетах удобнее использовать минимальное расстояние ρ от витка траектории до седла. Поскольку в окрестности минимума траектория практически касается плоскости (u, v) , то простые вычисления дают $u_P^* \sim \rho^{(2-\nu)/(1-\nu)}$, откуда

$$\rho^* = |-A_5 + A_6 \rho^{2-\nu}|^{(1-\nu)/(2-\nu)}. \quad (4.1)$$

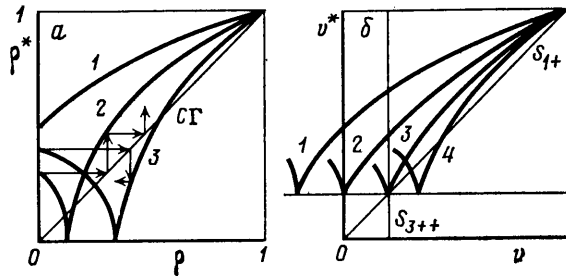
Здесь ρ^* — значение ρ для следующего витка. Можно нормировать ρ так, чтобы расстояние между седлом и устойчивым фокусом (S_0 и S_1 на фиг. 4, а) было равно единице. В этом случае $\rho=1$ должна быть неподвижной точкой отображения, которое можно переписать в виде

$$\rho^* = |1 - A + A \rho^{2-\nu}|^{(1-\nu)/(2-\nu)}.$$

Свойства итераций подобных отображений изучались в [14–17]. Они принципиально зависят от величины ν . Для системы Карри, как и для системы Лоренца, она положительна. Характер отображения для этого случая иллюстрирует фиг. 6, а. Если $A < 1$ (кривая 1), то отображение сжимающее, аттрактором является неподвижная точка $\rho=1$, она соответствует $S_{1\pm}$. В случае гомоклинной орбиты (фиг. 4, а) $\rho^*(0_+) = 0$, а при увеличении числа Рэля отображение принимает вид кривой 2. По-прежнему притягивающей является лишь точка $\rho=1$, но появляется счетное множество неустойчивых циклических точек. Две из них видны на фиг. 6, а: точки пересечения кривой 2 с биссектрисой $\rho^* = \rho$. Остальные проявляются при итерации отображения. Кроме того, как нетрудно убедиться (см., например, [14]), на интервале $0 < \rho < \rho^*(0_+)$ появляется инвариантное непритягивающее множество, имеющее канторову структуру. На уровне отображений это и есть предтурбулентность.

Граничный кризис, в результате которого скрытый хаос становится явным, происходит при $\rho^*(0_+) = \rho(C\Gamma)$. Кривые 2 и 3 отвечают соответственно знакам $>$ и $<$ в этом соотношении и показанные на фиг. 6, а траектории поясняют качественное различие до- и закритической динамики. В закритической области интервал $0 < \rho < \rho^*(0_+)$ становится инвариантным, там размещен хаотический аттрактор. Точка $C\Gamma$ является границей бассейнов двух аттракторов. С ростом A (что соответствует увеличению γ) $C\Gamma$ сливается с неподвижной точкой $\rho=1$. В фазовом пространстве это означает обратную бифуркацию цикла $C\Gamma$ из S_1 и потерю устойчивости S_1 .

Переход от одного типа предтурбулентности к другому принципиально не меняет характер ведущего отображения. Так, при переходе от I ко II типу (от фиг. 4, а к 4, б, в) в качестве ρ следует взять расстояние не до S_0 , а до S_{3+} , для



Фиг. 6

случая III – минимум расстояния до пары точек S_{3++}, S_{3+-} , а для случая V – минимум расстояния до цикла C_{3+} .

Поясним при помощи одномерного отображения, почему пересечение кривой $\Gamma_{3\pm}$ не связано с возникновением предтурбулентности, а пересечение $\Gamma\Gamma$ связано (фиг. 3). Будем обходить точку встречи кривых $\Gamma_{3\pm}, \Gamma_{3+}$ и $\Gamma\Gamma$ против часовой стрелки. Отображение будем строить для значений вертикальной координаты v на фиг. 4, в, д в точке минимума расстояния ρ до S_{3+} . Вообще говоря, этому отображению соответствует двузначная функция. В точке пересечения $\Gamma_{3\pm}$ это кривая 1 на фиг. 6, б и центрально-симметрична ей кривая. Видно, что все траектории после одного оборота попадают правее точки S_{3++} , после чего асимптотически приближаются к S_{1+} . Ситуация качественно не меняется (кривые 1, 2 на фиг. 6, б), пока не пересечем $\Gamma\Gamma$ (кривая 3), после чего возникает предтурбулентность, поскольку отображение сводится к предыдущему случаю (фиг. 6, а). То, что границей области предтурбулентности является кривая $\Gamma\Gamma$, но не $\Gamma_{3\pm}$, подтверждают и прямые численные расчеты [18].

В заключение сформулируем основные результаты. Катастрофическому переходу к турбулентности предшествует существование скрытого хаоса. Эта предтурбулентность бывает разных типов, различаясь своим главным стохастизирующим элементом. Таким элементом может служить седловая точка, пара седловых точек, седловой цикл. Возможна трансформация одного типа предтурбулентности в другой. Эволюция любого из этих типов предтурбулентности и превращение ее в стохастический аттрактор прослеживается при помощи единого одномерного отображения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольдштик М. А., Штерн В. Н. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977. 366 с.
2. Джозеф Д. Устойчивость движения жидкости. М.: Мир, 1981. 638 с.
3. Kaplan J. L., Yorke J. A. Preturbulence: a regime observed in a fluid flow model of Lorenz. — Commun. Math. Phys., 1979, v. 67, № 2, p. 93–108. (Рус. перев.: Каплан Д. Л., Йорке Дж. А. Предтурбулентность: режим, наблюдаемый в течении жидкости, описываемой моделью Лоренца. — В сб.: Странные аттракторы. М.: Мир, 1981, с. 213–238.)
4. Eckmann J.-P. Roads to turbulence in dissipative dynamical systems. — Rev. Modern Phys., 1981, v. 53, № 4, pt 1, p. 643–654.
5. Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. О возникновении и структуре аттрактора Лоренца. — Докл. АН СССР, 1977, т. 234, № 2, с. 336–339.
6. Grebogi C., Ott E., Yorke J. A. Chaotic attractors in crisis. — Phys. Rev. Lett., 1982, v. 48, № 22, p. 1507–1510.
7. Curry J. H. A generalized Lorenz system. — Commun. Math. Phys., 1978, v. 60, № 3, p. 193–204.
8. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
9. Treve Y. M., Manley O. P. Energy conserving Galerkin approximations for 2-D hydrodynamic and MHD Benard convection. — Physica 4-D, 1982, v. 4, № 3, p. 319–342.

10. *Петровская Н. В.* О применении метода Галеркина к исследованию переходов в задаче рэлеевской конвекции.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 2, с. 22–27.
11. *Mandelbrot B. B.* The fractal geometry of nature. San Francisco: Freeman, 1982. 468 p.
12. *Штерн В. Н.* Устройство и размерность аттракторов структурно-стохастического движения.— В сб.: Структурная турбулентность. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1982, с. 49–76.
13. *Шильников Л. П.* О рождении периодического движения из траектории, двояко-асимптотической к состоянию равновесия типа седло.— Мат. сб., 1968, т. 77, № 3, с. 461–472.
14. *Штерн В. Н.* Спектральный анализ аттрактора Лоренца. Препринт № 31. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1979.
15. *Arneodo A., Couillet P., Tresser C.* A possible new mechanism for the onset of turbulence.— Phys. Lett., 1981, v. 81A, № 4, p. 197–201.
16. *Закс М. А., Любимов Д. В.* О возможном механизме накопления бифуркаций в конечномерной аппроксимации уравнений конвекции.— В кн.: Бифуркационные переходы в некоторых задачах теории гидродинамической устойчивости. Свердловск, 1982, с. 40–70. (АН СССР. Уральск. науч. центр. Ин-т мех. сплошн. среды.)
17. *Штерн В. Н.* Возникновение и свойства хаоса в простых моделях тепловой конвекции. Препринт № 98. Новосибирск: ИТФ СО АН СССР, 1983.
18. *Shtern V. N., Shumova L. V.* Metamorphoses of preturbulence.— Phys. Lett., 1984, v. 103A, № 4, p. 167–170.

Новосибирск

Поступила в редакцию
6.XII.1983