

УДК 532.516.013.4

**АВТОКОЛЕБАНИЯ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ  
ВО ВРАЩАТЕЛЬНОМ ТЕЧЕНИИ ГАГЕНА — ПУАЗЕЙЛЯ**

ГЕРЦЕНШТЕИН С. Я., НИКИТИН Н. В.

Исследуется нелинейная устойчивость течения вязкой несжимаемой жидкости в круглой трубе, вращающейся вокруг своей оси. Решение начально-краевой задачи для трехмерных нестационарных уравнений Навье — Стокса отыскивается с помощью метода Бубнова — Галеркина [1–5]. Проведена серия методических исследований. Изучена нелинейная эволюция периодических автоколебательных режимов, найдены характерные времена их установления, амплитуды и другие интегральные и пульсационные характеристики. Рассмотрена вторичная неустойчивость этих конечно-амплитудных волновых движений. Установлено, что вторичная неустойчивость носит первоначально слабый, линейный характер; соответствующие времена нарастания оказываются примерно на порядок большими, чем для первичных возмущений. Обнаружена возможность резкой, взрывообразной перестройки движения при достижении вторичными возмущениями определенной критической амплитуды. Построена «кривая выживания» [5], позволяющая определить предпочтительное возмущение, выделяющееся среди прочих при условии равенства начальных амплитуд возмущений, и критические значения амплитуд, начиная с которых другие возмущения могут побеждать даже предпочтительное. Получен диапазон таких выживающих возмущений. Показано, что в результате нелинейного взаимодействия нескольких возмущений при небольших степенях надкритичности образуется периодическое движение в виде одной бегущей волны.

1. Задача рассматривается в рамках модели трехмерных нестационарных уравнений Навье — Стокса; вектор скорости  $V_1$  и давление  $p_1$  представляются в виде суммы  $V_1 = V_0 + V$ ,  $p_1 = p_0 + p$  основного течения

$$V_0 = (1 - r^2)k_z - \omega r k_\theta, \quad p_0 = \frac{\omega^2 r^2}{2} - \frac{4}{R} z$$

устойчивость которого исследуется, и возмущений  $V$ ,  $p$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V_0 \nabla) V + (V \nabla) V_0 + (V \nabla) V = -\nabla p + \frac{1}{R} \Delta V; \quad \text{div } V = 0 \quad (1.1)$$

Здесь  $R = U_0 r_0 \nu^{-1}$  — число Рейнольдса,  $\omega = -\Omega r_0 U_0^{-1}$ ;  $U_0$  — максимальная продольная скорость основного течения,  $r_0$  — радиус трубы,  $\nu$  — кинематический коэффициент вязкости жидкости,  $\Omega$  — угловая скорость вращения трубы;  $r$ ,  $\theta$ ,  $z$  — безразмерные цилиндрические координаты,  $k_r$ ,  $k_\theta$ ,  $k_z$  — соответствующие единичные векторы. Возмущения считаются периодичными по  $z$

$$V\left(r, \theta, z + \frac{2\pi}{\alpha}, t\right) = V(r, \theta, z, t), \quad p\left(r, \theta, z, + \frac{2\pi}{\alpha}, t\right) = p(r, \theta, z, t)$$

Здесь  $2\pi/\alpha$  — отрезок периодичности,  $\alpha$  — волновое число; на стенках ставятся обычные условия прилипания.

Приближенное решение задачи отыскивается методом Галеркина

$$V(r, \theta, z, t) = \sum_{k=-K}^K \sum_{n=-N}^N v^{(k\alpha, n)}(r, t) e^{i(k\alpha z + n\theta)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=-K}^K \sum_{n=-N}^N \sum_{m=1}^M a_m^{(k\alpha, n)}(t) \varphi_m^{(k\alpha, n)}(r) e^{i(k\alpha z + n\theta)} \equiv \\
&\equiv \sum_{k=-K}^K \sum_{n=-N}^N \sum_{m=1}^M a_m^{(k\alpha, n)}(t) \psi_m^{(k\alpha, n)}(r, \theta, z)
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где  $\mathbf{v}^{(-k\alpha, -n)} = \overline{\mathbf{v}^{(k\alpha, n)}}$  (черта означает комплексное сопряжение), а  $\psi_m^{(\beta, n)}$  — векторные собственные функции задачи об устойчивости покоящейся жидкости в рассматриваемой трубе [1, 2, 6]

$$\begin{aligned}
\psi_m^{(\beta, n)}(r, \theta, z) &\equiv \varphi_m^{(\beta, n)}(r) e^{i(\beta z + n\theta)} \\
\Delta \psi_m^{(\beta, n)} - \nabla p_m^{(\beta, n)} &= -\mu_m^{(\beta, n)} \psi_m^{(\beta, n)}
\end{aligned} \tag{1.3}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \psi_m^{(\beta, n)} &= 0, \quad \psi_m^{(\beta, n)}|_{r=1} = 0 \\
\int_0^1 \langle \psi_m^{(k\alpha, n)} \psi_l^{(j\alpha, s)} \rangle r dr &= \delta_{ml} \delta_{kj} \delta_{ns}
\end{aligned}$$

$$\int_0^1 \langle \Delta \psi_m^{(k\alpha, n)} \overline{\psi_l^{(j\alpha, s)}} \rangle r dr = -\mu_m^{(k\alpha, n)} \delta_{ml} \delta_{kj} \delta_{ns}$$

$$\int_0^1 \langle \nabla p \overline{\psi_l^{(j\alpha, s)}} \rangle r dr = 0, \quad \langle f \rangle \equiv \frac{\alpha}{4\pi^2} \int_0^{2\pi/\alpha} dz \int_0^{2\pi} f d\theta$$

(угловыми скобками обозначено осреднение по однородным переменным  $\theta, z$ ). Метод решения задачи (1.3) описан в [6].

Уравнения для неизвестных  $a_m^{(k\alpha, n)}(t)$  получаются после проведения стандартной процедуры ортогонализации

$$\frac{da_m^{(k\alpha, n)}}{dt} + \frac{1}{R} \mu_m^{(k\alpha, n)} a_m^{(k\alpha, n)} = - \int_0^1 \langle [(\mathbf{V}_0 \nabla) \mathbf{V} + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V}_0 + (\mathbf{V} \nabla) \mathbf{V}] \overline{\psi_m^{(k\alpha, n)}} \rangle r dr \tag{1.4}$$

Интегралы, входящие в правые части уравнений (1.4), определяются приближенно по квадратурной формуле Гаусса. Система обыкновенных дифференциальных уравнений (1.4) решается на ЭВМ методом Кутты — Мерсона с автоматическим выбором шага и контролем заданной точности.

2. Основное внимание в численных экспериментах было уделено области параметров, в которой наблюдается неустойчивость основного течения по отношению к возмущениям различного типа. Так, например, при  $R=200$ ,  $\omega=0,5$ , соответствующих основной серии проведенных расчетов, имеет место линейная неустойчивость к трехмерным волновым возмущениям вида

$$\mathbf{V}(r, \theta, z, t) = \operatorname{Re} \{ \mathbf{w}(r, t) e^{i(\alpha z + n\theta)} \}$$

с азимутальными числами  $n=1$  (спиральные волны), 2 и 3 [7–9]. Максимально растущее возмущение при этом соответствует волновому вектору  $\{\alpha; n\} = \{0,65; 1\}$ .

Первоначально были исследованы «одноволновые» периодические движения, возникающие в потоке в результате эволюции линейно растущих возмущений. Такие режимы можно получить, задавая начальное возмуще-

ние в виде одиночной волны

$$V(r, \theta, z, 0) = \text{Re} \{ \mathbf{w}(r) e^{i(\alpha z + n\theta)} \} \quad (2.1)$$

с волновым вектором из области линейной неустойчивости и некоторым распределением скоростей  $\mathbf{w}(r)$ . Движение при  $t > 0$  описывается в этом случае суммой волн с кратными волновыми векторами  $\{k\alpha, kn\}$ ,  $k=0, 1, 2, \dots$ , а выражение (1.2) принимает вид

$$\begin{aligned} V(r, \theta, z, t) &= \mathbf{v}^{(0,0)}(r, t) + 2 \text{Re} \left[ \sum_{k=1}^K \mathbf{v}^{(k\alpha, kn)}(r, t) e^{ik(\alpha z + n\theta)} \right] = \\ &= \sum_{m=1}^M a_m^{(0,0)}(t) \Phi_m^{(0,0)}(r) + 2 \text{Re} \left[ \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M a_m^{(k\alpha, kn)}(t) \Phi_m^{(k\alpha, kn)}(r) e^{ik(\alpha z + n\theta)} \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

Величины  $K$ ,  $M$  и число узлов  $L$  в квадратурной формуле Гаусса варьировались от 1 до 8, от 2 до 24 и от 2 до 32 соответственно. Методические расчеты показали хорошую сходимость метода. Так, при  $R=200$ ,  $\omega=0,5$  результаты расчетов перестают качественно меняться уже начиная с  $K=1$ ,  $M=4$ ,  $L=6$ . Основные расчеты были проведены при  $K=2$ ,  $M=8$ ,  $L=12$ .

Отметим, что вклад высших гармоник оказывается несущественным. Например, в установившемся автоколебательном режиме, полученном при  $K=4$  ( $\alpha=0,5$ ;  $n=1$ ); кинетическая энергия пульсаций, приходящаяся на вторую ( $k=2$ ), третью ( $k=3$ ) и четвертую ( $k=4$ ) гармоники, составляет соответственно 15; 2,2 и 0,33% от энергии основной волны. Изменение параметра  $K$  слабо влияет как на интегральные, так и на пульсационные характеристики устанавливающегося движения.

Расчеты, проведенные при начальном возмущении, имеющем вид одиночной волны (2.1) с волновым вектором  $\mathbf{x}_1 = \{\alpha; n\}$  из области линейной неустойчивости ( $R=200$ ,  $\omega=0,5$ ), показали, что в потоке организуется периодическое вторичное движение в виде бегущей волны с экспоненциальным распределением энергии по гармоникам с волновыми векторами  $\mathbf{x}_k = k\mathbf{x}_1$ ,  $k=1, 2, \dots, K$ . Осредненное течение при этом характеризуется уменьшенными по сравнению с исходным стационарным течением значениями расхода жидкости и момента импульса относительно оси трубы. Профиль осредненной продольной составляющей скорости  $\langle u \rangle = 1 - r^2 + \mathbf{v}^{(0,0)} \mathbf{k}_z$  становится более наполненным; вращательная компонента  $\langle w \rangle = -\omega r + \mathbf{v}^{(0,0)} \mathbf{k}_\theta$  и ее градиент в окрестности оси трубы несколько уменьшаются, а с удалением от оси (при  $r > 0,4$ ) градиент, наоборот, несколько увеличивается. В окрестности «ядра» потока проявляется тенденция к образованию штилевой зоны. На фиг. 1 изображены графики функций  $\langle u \rangle(r)$  и  $\langle w \rangle(r)$ , соответствующие предельному (при  $t \rightarrow \infty$ ) периодическому движению — сплошные линии и исходному стационарному течению — штриховые линии ( $\alpha=0,65$ ;  $n=1$ ).

Уменьшение момента импульса относительно оси трубы связано с появлением на переходном этапе тангенциальной составляющей касательного напряжения на стенке, стремящейся увеличить скорость вращения трубы. В предельном режиме трение на стенке возвращается к исходному значению.

Распределение по радиусу среднеквадратичной скорости пульсаций

$$I_v(r, t) = \langle |V(r, \theta, z, t) - \mathbf{v}^{(0,0)}(r, t)|^2 \rangle^{1/2} = \left[ 2 \sum_{k=1}^K \left| \mathbf{v}^{(k\alpha, kn)}(r, t) \right|^2 \right]^{1/2}$$

в предельном режиме оказывается практически всюду постоянным, за исключением относительно узкой пристенной зоны (фиг. 2). При этом

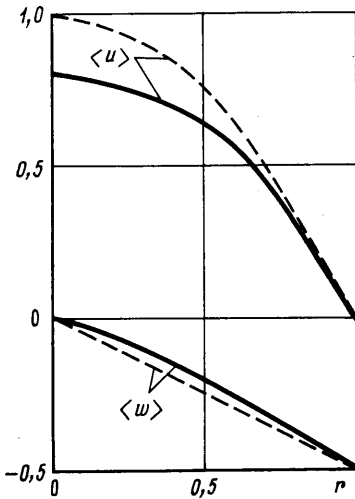
наибольшая интенсивность радиальной, тангенциальной и продольной составляющих скорости

$$I_v(r, t) = \left[ 2 \sum_{k=1}^K |v_k(r, t)|^2 \right]^{1/2} \quad (2.3)$$

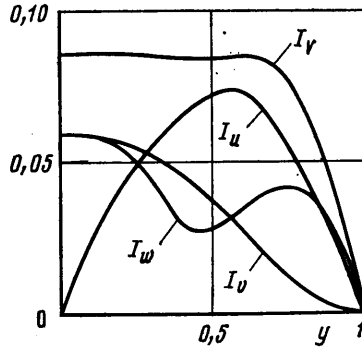
$$I_w(r, t) = \left[ 2 \sum_{k=1}^K |w_k(r, t)|^2 \right]^{1/2} \quad (2.4)$$

$$I_u(r, t) = \left[ 2 \sum_{k=1}^K |u_k(r, t)|^2 \right]^{1/2} \quad (2.5)$$

достигается для первых двух составляющих на оси трубы при  $r=0$ , а для последней составляющей — в окрестности  $r=0,5$ . Здесь  $v_k, w_k, u_k$  — радиаль-



Фиг. 1



Фиг. 2

ная, тангенциальная и продольная компоненты вектора  $v^{(k\alpha, kn)}$  соответственно. Наличие локального минимума на кривой  $I_w(r)$  (фиг. 2) связано с тем, что тангенциальная компонента скорости пульсации меняет знак при  $r \approx 0,5$ . Интересно, что наибольшие значения разных пульсационных составляющих скорости различаются несущественно; максимумы их среднеквадратичных значений при  $\alpha=0,65; n=1$  составляют 6–7% от осевой скорости основного потока.

Характерные «нелинейные» времена формирования рассматриваемых предельных режимов, так же как и в [3, 4], оказываются примерно равными соответствующим числам Рейнольдса.

Любопытно, что фазовые скорости для достаточно крупномасштабных возмущений (при  $\alpha < 0,8$ ) оказываются отрицательными. Однако, как и в линейном случае [9], в системе координат, вращающейся вместе с трубой, скорость распространения волны всегда положительна. Для устойчивых конечно-амплитудных режимов ( $0,38 < \alpha < 0,95; n=1$ ) с ростом  $\alpha$  ее значение растет от 0,58 до 0,68. По сравнению с линейным случаем наблюдается некоторое уменьшение фазовой скорости приблизительно на 0,02–0,03.

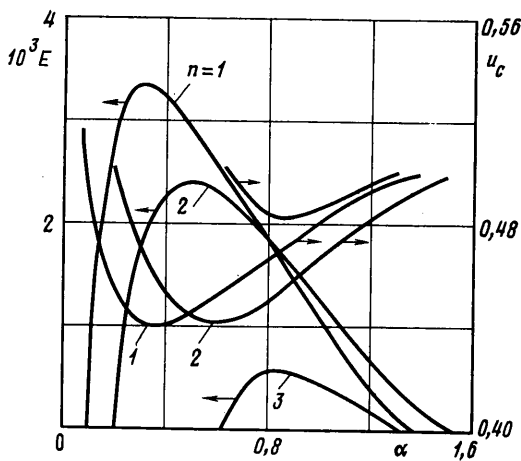
Отметим, что наиболее интенсивными оказываются длинноволновые конечно-амплитудные возмущения, масштаб которых превышает масштаб максимально нарастающего по линейной теории возмущения примерно в

2 раза. Им же соответствует и минимум расхода жидкости. На фиг. 3 приведены зависимости от волнового числа средней по объему кинетической энергии пульсаций

$$E(t) = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{2\pi^2} \int_0^{2\pi/\alpha} dz \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 |V(r, \theta, z, t) - v^{(0,0)}(r, t)|^2 r dr \equiv$$

$$\equiv 2 \sum_{k=1}^K \sum_{m=1}^M |a_m^{(k\alpha, kn)}(t)|^2$$

и средней расходной скорости  $u_c$  в предельных режимах, полученных при  $n=1, 2$  и  $3$ .



Фиг. 3

3. Значительный интерес представляет изучение вторичной устойчивости полученных «одноволновых» конечно-амплитудных периодических течений. В этих исследованиях принималось следующее представление вектора скорости:

$$V(r, \theta, z, t) = v^{(0,0)}(r, t) + 2 \operatorname{Re} \left\{ \sum_{k=1}^2 [v^{(k\alpha_1, kn_1)}(r, t) e^{ik(\alpha_1 z + n_1 \theta)} + \right.$$

$$+ v^{(k\alpha_2, kn_2)}(r, t) e^{ik(\alpha_2 z + n_2 \theta)}] + v^{(\alpha_1 + \alpha_2, n_1 + n_2)}(r, t) e^{i[(\alpha_1 + \alpha_2)z + (n_1 + n_2)\theta]} +$$

$$\left. + v^{(\alpha_1 - \alpha_2, n_1 - n_2)}(r, t) e^{i[(\alpha_1 - \alpha_2)z + (n_1 - n_2)\theta]} \right\} \quad (3.1)$$

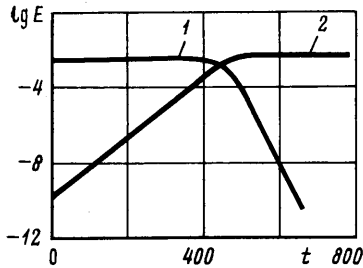
где  $\{\alpha_1; n_1\} = \kappa_1$ ,  $\{\alpha_2; n_2\} = \kappa_2$  — волновые векторы первичного и вторичного возмущений соответственно. Начальные распределения  $v^{(k\alpha_1, kn_1)}(r, 0)$ ,  $k=0, 1, 2$ , определялись из решения задачи в «одноволновом» представлении (2.1), (2.2); вторичное возмущение при  $t=0$  задавалось в следующем виде:

$$v^{(\alpha_2, n_2)}(r, 0) = A_2 \varphi_1^{(\alpha_2, n_2)}(r), \quad 10^{-6} \leq \bar{A}_2 \leq 10^{-2}$$

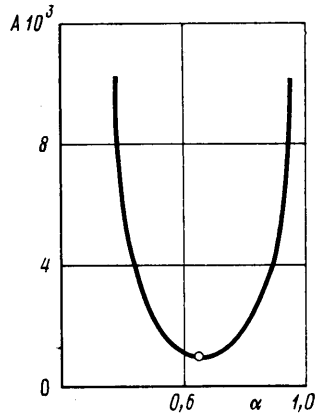
Проведенные расчеты показали неустойчивость одноволновых автоколебательных режимов с азимутальными числами  $n=2$  и  $3$  при всех  $\alpha$ , а также «спиральных» волн ( $n=1$ ) в длинноволновой  $\alpha < 0,38$  и коротковолновой  $\alpha > 0,95$  частях спектра. Периодические течения, соответствующие указанным волновым векторам, разрушаются, в частности, при наложении малых ( $A_2 \sim 10^{-5}$ ) вторичных возмущений с волновым вектором  $\{0,5; 1\}$ . Таким образом, в рассматриваемой области параметров могут

наблюдаться лишь «спиральные» вторичные течения с длиной волны примерно от 3 до 8 диаметров трубы.

Интересно, что вторичная неустойчивость оказывается значительно менее интенсивной, чем линейная неустойчивость исходного вращательного течения Гагена — Пуазейля. Так, развитие вторичных возмущений с волновым вектором  $\{0,5; 1\}$  и начальной амплитудой  $A_2=10^{-5}$ , наложенных на установившееся автоколебательное движение с волновым вектором  $\{0,5; 2\}$ , первоначально носит экспоненциальный характер с инкрементом роста на порядок меньшим, чем при развитии этих же возмущений на фоне основного течения. Вместе с тем при достижении вторичными возмуще-



Фиг. 4



Фиг. 5

ниями определенного уровня происходит быстрая перестройка движения. Для рассматриваемых вторичных возмущений этот уровень составляет около 10% от уровня энергии автоколебаний; при этом происходит резкое затухание исходного и возникновение нового периодического течения. На фиг. 4 приведены зависимости от времени пульсационной энергии исходных  $E^{(0,5; 2)}(t)$  (кривая 2) и вторичных  $E^{(0,5; 1)}(t)$  (кривая 1)

$$E^{(\alpha; n)}(t) = 2 \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^M |a_m^{(k\alpha, kn)}(t)|^2$$

возмущений.

4. Исследование в рамках представления (3.1) взаимодействия двух однотипных «вторично» устойчивых возмущений с начальными условиями

$$\mathbf{v}^{(\alpha_1; 1)}(r, 0) = A_1 \Phi_1^{(\alpha_1, 1)}; \quad \mathbf{v}^{(\alpha_2; 1)}(r, 0) = A_2 \Phi_1^{(\alpha_2, 1)}$$

показало, что в случае достаточно малых и равных начальных амплитуд ( $A_1=A_2 \sim 10^{-4}$ ) «выживает» возмущение с большим коэффициентом нарастания по линейной теории. В случае же различных начальных амплитуд конечное состояние определяется начальными данными системы. Для каждого возмущения с волновым вектором  $\{\alpha_1; 1\}$  и амплитудой  $A_1$  можно построить зависимость критической амплитуды  $A$  от волнового числа  $\alpha$  — так называемую кривую выживания [5], такую, что при значениях  $A_2$  ниже этой кривой выживает волна, соответствующая  $\{\alpha_1; 1\}$ , а при значениях  $A_2$ , превышающих  $A(\alpha_2)$ , выживает волна  $\{\alpha_2; 1\}$ . Такая кривая выживания, построенная для  $\alpha_1=0,65$ ;  $A_1=10^{-3}$ , изображена на фиг. 5. Эта кривая, в частности, показывает, что наиболее предпочтительными оказываются возмущения, близкие к максимально нарастающим по линейной теории.

Любопытно, что при взаимодействии возмущений с достаточно большими начальными амплитудами возможно «выживание» волн с меньшими

коэффициентами роста по линейной теории. Так, при  $\kappa_1 = \{0,5; 2\}$ ,  $\kappa_2 = \{1; 1\}$ ,  $A_1 = A_2 = 10^{-2}$  формируется периодическое течение, соответствующее  $\kappa_1$ , несмотря на то, что инкремент нарастания второй волны (в рамках линейной теории) имеет несколько большее значение.

Заметим, что при относительно невысокой степени надкритичности во всех рассмотренных вариантах расчета взаимодействие нескольких (до 4) волн из области линейной неустойчивости приводило в конечном итоге к выживанию одной из них и образованию вторичного автоколебательного режима типа бегущей волны.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Петров Г. И. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости.— ПММ, 1940, т. 4, № 3, с. 3—12.
2. Ладыженская О. А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1970. 288 с.
3. Orszag A. E., Patera A. T. Secondary instability of wall-bounded shear flows.— J. Fluid Mech., 1983, v. 128, p. 347—385.
4. Рождественский Б. Л., Примак В. Г. Численное моделирование двумерной турбулентности в плоском канале. Препринт № 20. М.: Ин-т прикл. матем. им. М. В. Келдыша АН СССР, 1981.
5. Герценштейн С. Я., Родичев Е. Б., Шмидт В. М. Конечно-амплитудные конвективные движения в слое раствора с твердыми границами.— Докл. АН СССР, 1982, т. 266, № 6, с. 1330—1333.
6. Salwen H., Grosch C. E. The stability of Poiseuille flow in a pipe circular cross-section.— J. Fluid Mech., 1972, v. 54, № 1, p. 93—112.
7. Pedley T. J. On the instability of viscous flow in a rapidly rotating pipe.— J. Fluid Mech., 1969, v. 35, № 1, p. 97—115.
8. Mackrodt P.-A. Stability of Hagen — Poiseuille flow with superimposed rigid rotation.— J. Fluid Mech., 1976, v. 73, № 1, p. 153—164.
9. Cotton F. W., Salwen H. Linear stability of rotating Hagen — Poiseuille flow.— J. Fluid Mech., 1981, v. 108, p. 101—125.

Москва

Поступила в редакцию  
9.VII.1984