УДК 533.69.011

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ РЕАКЦИЙ, ДЕЙСТВУЮЩИХ НА КОЛЕБЛЮЩИЙСЯ ПРОФИЛЬ

ГОРЕЛОВ Д. Н.

Известны формулы Л. И. Седова [1], позволяющие вычислять суммарные гидродинамические реакции, действующие со стороны идеальной жидкости на колеблющийся профиль. Эти формулы выражаются через контурные интегралы, содержащие комплексный потенциал нестационарного обтекания профиля. Некоторые видоизменения этих формул предложены в работе [2].

В данной работе предлагаются другие формулы для расчета тех же величин, основанные на задании касательной составляющей скорости жидкости вдоль контура колеблющегося профиля. В ряде случаев применение этих формул может оказаться более полезным, чем формул Л. И. Седова.

Рассмотрим плоское неустановившееся движение идеальной несжимаемой жидкости около колеблющегося профиля при произвольном законе деформации его контура в декартовой системе координат x, y. Предположим, что течение жидкости вне профиля и возможных линий разрыва скорости (вихревых следов) потенциально. Выведем формулы для расчета суммарного вектора силы и суммарного момента от давлений, действующих со стороны жидкости на профиль, полагая известным распределение касательной составляющей скорости жидкости вдоль профиля в каждый момент времени t.

Пусть L — контур исходного неподвижного профиля, $2l$ — длина контура L, P — точка на L, определяемая дуговой координатой s, отсчитываемой от некоторой фиксированной точки (задней кромки профиля, например), $x(s)$, $y(s)$ — декартовы координаты точки P, $w_x(s, t)$, $w_y(s, t)$ — заданные перемещения точки P вдоль осей x, y, θ — угол между касательной к контуру L и осью x в точке P.

При колебаниях контур L переходит в $L_1(t)$, точка P — в точку P_1, угол θ — в θ_1 (фиг. 1). Обозначим через $2l_1(t)$ длину контура $L_1(t)$, $s_1(s, t)$ — дуговую, а $x_1(s_1, t)$, $y_1(s_1, t)$ — декартовы координаты точки P_1. При этом

$$x_1(s_1, t)=x(s)+w_x(s, t), \quad y_1(s_1, t)=y(s)+w_y(s, t) \tag{1}$$

$$\cos\theta=\frac{dx}{ds}, \quad \sin\theta=\frac{dy}{ds}$$

$$\cos\theta_1=\left(\cos\theta+\frac{\partial w_x}{\partial s}\right)\frac{ds}{ds_1}, \quad \sin\theta_1=\left(\sin\theta+\frac{\partial w_y}{\partial s}\right)\frac{ds}{ds_1} \tag{2}$$

$$\frac{ds_1}{ds}=\sqrt{1+\Delta(s,t)} \tag{3}$$

$$\Delta(s,t)=\frac{\partial w_x}{\partial s}\left(2\cos\theta+\frac{\partial w_x}{\partial s}\right)+\frac{\partial w_y}{\partial s}\left(2\sin\theta+\frac{\partial w_y}{\partial s}\right) \tag{4}$$

Здесь и в дальнейшем дуговая координата s играет роль лагранжевой координаты точки P_1. Связь между s и s_1 получаем путем интегрирования выражения (3). Для нерастяжимого контура $\Delta(s, t)=0$, $s_1=s$, $l_1=l$.

Угол поворота элемента контура профиля в процессе его деформации $\alpha=\theta_1-\theta$ определяется формулами

$$\sin\alpha=\left(\cos\theta\frac{\partial w_y}{\partial s}-\sin\theta\frac{\partial w_x}{\partial s}\right)\frac{ds}{ds_1}$$

$$\cos\alpha=\left(1+\cos\theta\frac{\partial w_x}{\partial s}+\sin\theta\frac{\partial w_y}{\partial s}\right)\frac{ds}{ds_1} \tag{5}$$

Формулы (1)—(5) справедливы для произвольного закона деформации профиля.

На контур $L_1(t)$ в точке P_1 со стороны жидкости действует сила $-p\mathbf{n}_1$, где p — гидродинамическое давление, $\mathbf{n}_1$ — внешняя нормаль к L_1 в точке P_1. В соответствии с этим проекции R_x, R_y суммарного вектора сил и суммарный момент этих сил M относительно начала координат определяются формулами

$$R_x=-\int_0^{2l_1} p(s_1,t)\beta_{x1}(s_1,t)\,ds_1, \quad R_y=-\int_0^{2l_1} p(s_1,t)\beta_{y1}(s_1,t)\,ds_1 \tag{6}$$

$$M=-\int_0^{2l_1} p(s_1,t)\,[x_1(s_1,t)\beta_{y1}(s_1,t)-y_1(s_1,t)\beta_{x1}(s_1,t)\,]\,ds_1 \tag{7}$$

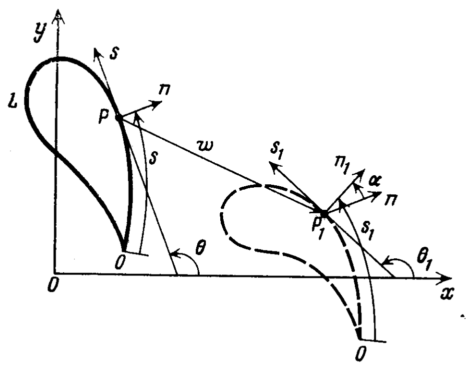
$$\beta_{x1}=\cos(n_1,x)=\sin\theta_1,\quad \beta_{y1}=\cos(n_1,y)=-\cos\theta_1$$

Гидродинамическое давление p в точке P_1 выражается через потенциал скорости $\varphi(s_1, t)$ и вектор скорости $\mathbf{v}(s_1, t)$ с помощью интеграла Коши — Лагранжа

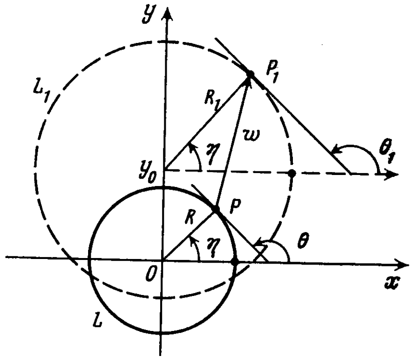
$$p(s_1,t)=p_0(t)-\rho\left\{\frac{\partial\varphi(s_1,t)}{\partial t}+\frac{1}{2}\,[v_{s1}^2(s_1,t)+v_{n1}^2(s_1,t)\,]\right\} \tag{8}$$

$$\frac{\partial\varphi(s_1,t)}{\partial t}=\frac{\delta\varphi(s_1,t)}{\delta t}+\dot{s}_1\frac{\partial\varphi(s_1,t)}{\partial s_1},\qquad \dot{s}_1=\frac{\partial s_1(s,t)}{\partial t} \tag{9}$$

где $p_0(t)$ — некоторая функция времени t, v_{s1}, v_{n1} — касательная и нормальная компоненты вектора $\mathbf{v}(s_1, t)$ к контуру L_1. Оператор $\delta/\delta t$ определяет производную по t



Фиг. 1



Фиг. 2

в точках контура L_1 при $s_1=\text{const}$ в отличие от $\partial/\partial t$, определяющего ту же производную при $s=\text{const}$.

В соответствии с условием непротекания жидкости через контур L_1

$$v_{n1}(s_1,t)=\dot{w}_x\beta_{x1}+\dot{w}_y\beta_{y1}$$

В силу потенциальности течения вне L_1 в точках контура L_1 имеем

$$\varphi(s_1,t)=\int_0^{s_1} v_{s1}(\sigma,t)\,d\sigma+\varphi(0,t) \tag{10}$$

Подставляя (10) в (8) и учитывая (9), получим

$$p(s_1,t)=f(t)-\rho\left\{\frac{\delta}{\delta t}\int_0^{s_1} v_{s1}(\sigma,t)\,d\sigma+\dot{s}_1v_{s1}(s_1,t)+\frac{1}{2}\,[v_{s1}^2(s_1,t)+v_{n1}^2(s_1,t)\,]\right\}$$

$$f(t)=p_0(t)-\rho\frac{\partial\varphi(0,t)}{\partial t} \tag{11}$$

Можно показать, что

$$\beta_{x1}-i\beta_{y1}=ie^{-i\theta_1},\qquad x_1\beta_{y1}-y_1\beta_{x1}=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s_1}(x_1^2+y_1^2) \tag{12}$$

$$\int_0^{2l_1}(\beta_{x1}-i\beta_{y1})\,ds_1=0,\qquad \int_0^{2l_1}(x_1\beta_{y1}-y_1\beta_{x1})\,ds_1=0 \tag{13}$$

Выражения (12) позволяют записать формулы (6), (7) в виде

$$R_x - iR_y = -i\int_0^{2l_1} p e^{-i\theta_1} ds_1, \qquad M = \frac{1}{2}\int_0^{2l_1} p \frac{\partial}{\partial s_1}(x_1^2 + y_1^2)\, ds_1$$

Подставляя сюда вместо p выражение (11) и учитывая (13), получим окончательно следующие формулы:

$$R_x - iR_y = i\rho\int_0^{2l_1}\left[\frac{1}{2}(v_{s1}^2 + v_{n1}^2) + \dot{s}_1 v_{s1} + \frac{\delta}{\delta t}\int_0^{s_1} v_{s1}(\sigma, t)\, d\sigma\right] e^{-i\theta_1} ds_1 \qquad (14)$$

$$M = -\frac{1}{2}\rho\int_0^{2l_1}\left[\frac{1}{2}(v_{s1}^2 + v_{n1}^2) + \dot{s}_1 v_{s1} + \frac{\delta}{\delta t}\int_0^{s_1} v_{s1}(\sigma, t)\, d\sigma\right]\frac{\partial}{\partial s_1}(x_1^2 + y_1^2)\, ds_1 \qquad (15)$$

Формулы (14), (15) позволяют эффективно вычислять суммарные гидродинамические реакции, действующие на профиль при произвольном законе его деформации. Все величины, входящие в эти формулы, могут быть определены через функцию $v_{s1}(s_1, t)$, которая предполагается известной, геометрические характеристики исходного профиля (контура L) и компоненты вектора перемещений точек профиля $w_x(s, t)$, $w_y(s, t)$.

В случае бесконечно тонкого профиля формулы (14), (15) принимают вид

$$R_x - iR_y = \frac{\pi}{4}\rho A^2(t) e^{-i\theta_1(l_1, t)} + i\rho\int_0^{l_1}\left[(v_{s0} + \dot{s}_1)\gamma + \frac{\delta}{\delta t}\int_0^{s_1}\gamma(\sigma, t)\, d\sigma\right] e^{-i\theta_1} ds_1 \qquad (16)$$

$$M = \frac{\pi}{4}\rho A^2(t)\left[x_1(l_1, t)\sin\theta_1(l_1, t) - y_1(l_1, t)\cos\theta_1(l_1, t)\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\rho\int_0^{l_1}\left[(v_{s0} + \dot{s}_1)\gamma + \frac{\delta}{\delta t}\int_0^{s_1}\gamma(\sigma, t)\, d\sigma\right]\frac{\partial}{\partial s_1}(x_1^2 + y_1^2)\, ds_1 \qquad (17)$$

$$\gamma(s_1, t) = v_{s1}(s_1, t) + v_{s1}(2l_1 - s_1, t), \qquad v_{s0}(s_1, t) = \frac{1}{2}\left[v_{s1}(s_1, t) - v_{s1}(2l_1 - s_1, t)\right]$$

$$\theta_1(l_1, t) = \lim_{\varepsilon\to 0}\theta_1(l_1 - \varepsilon, t), \qquad A(t) = \lim_{s_1\to l_1}\{\sqrt{l_1 - s_1}\,\gamma(s_1, t)\}$$

Формулы (16), (17) получены из (14), (15) путем выделения малой окрестности передней кромки бесконечно тонкого профиля длиной 2ε и предельного перехода при $\varepsilon\to 0$.

Функцию $\gamma(s_1, t)$ можно трактовать как интенсивность вихревого слоя, моделирующего профиль.

В качестве примера определим суммарную гидродинамическую силу, действующую на круговой цилиндр, пульсирующий в жидкости и совершающий, кроме того, поступательные колебания вдоль оси y.

Пусть R — радиус неподвижного цилиндра, $R_1(t) = R(1 + a\cos\omega t)$ — радиус пульсирующего цилиндра, $y_0(t) = Rb\cos(\omega t + \mu)$ — перемещение центра цилиндра вдоль оси y. Декартовы и дуговые координаты точки P и соответствующей ей точки на подвижном цилиндре равны

$$x(s) = R\cos\eta, \quad y(s) = R\sin\eta$$

$$x_1(s_1, t) = R_1(t)\cos\eta, \quad y_1(s_1, t) = R_1(t)\sin\eta + y_0(t)$$

$$s = R\eta, \quad s_1 = R_1(t)\eta = s(1 + a\cos\omega t)$$

где η — угол между радиус-вектором точки P и осью x (фиг. 2).

В полярной системе координат r, η, связанной с декартовой системой соотношениями $x = r\cos\eta$, $y = y_0 + r\sin\eta$, потенциал скорости течения жидкости вне колеблющегося цилиндра и в точках контура L_1 соответственно имеет вид

$$\varphi(r, \eta, t) = C_0(t)\ln\frac{r}{R_1(t)} + C_1(t)\frac{R_1(t)}{r}\sin\eta$$

$$C_0(t)=-\omega aRR_1(t)\sin\omega t,\quad C_1(t)=\omega bRR_1(t)\sin(\omega t+\mu)$$

$$\varphi=\omega bRR_1\sin(\omega t+\mu)\sin\eta,\quad v_{s1}=\omega bR\sin(\omega t+\mu)\cos\eta$$

$$\frac{\delta\varphi}{\delta t}=\omega^2bR[R_1\cos(\omega t+\mu)-aR\sin\omega t\sin(\omega t+\mu)]\sin\eta-\dot{s}_1v_{s1}$$

Подставляя эти выражения в формулу (14), получим

$$R_x=0,\qquad R_y=\pi\rho\omega^2bR^2R_1(t)\cos(\omega t+\mu)=-\pi\rho RR_1(t)\frac{d^2y_0}{dt^2} \tag{18}$$

В частном случае $a=0$ радиус $R_1=R$ и (18) дает известную формулу для гидродинамических реакций, действующих на жесткий круговой цилиндр, колеблющийся в безграничной жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966. 448 с.
2. *Рябченко В. П.* Нелинейная задача о нестационарном обтекании решетки профилей.– Уч. зап. ЦАГИ, 1973, т. 4, № 6, с. 8–16.

Новосибирск

Поступила в редакцию
20.II.1984

Технический редактор *Е. В. Синицына*

Сдано в набор 17.05.85 Подписано к печати 16.07.85 Т-15930 Формат 70×108^1/$_{16}$
Высокая печать Усл. печ. л. 16,8 Усл. кр.-отт. 28,4 тыс. Уч.-изд. л. 17,9 Бум. л. 6,0
Тираж 1675 экз. Зак. 1396

Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Наука»,
103717 ГСП, Москва, К-62, Подсосенский пер., 21
2-я типография издательства «Наука», 121099, Москва, Шубинский пер., 6