УДК 532.546

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕМОНОТОННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ФИЛЬТРАЦИИ

АКСЕНОВ Б. Г., ДАНИЭЛЯН Ю. С.

Актуальной задачей нелинейной фильтрации является задача о фильтрации газа. Для ее решения обычно прибегают к одному из видов линеаризации, которая переводит исходное нелинейное уравнение в линейное с постоянными коэффициентами [1, 2]. В ряде случаев приближенные решения такого типа находятся с помощью теорем сравнения путем построения верхних и нижних оценок неизвестных точных решений [3–6]. При этом сам принцип решения, состоящий в оценивании, позволяет определить гарантированную величину погрешности полученного приближенного решения. Если можно построить сужающуюся систему оценок [7], то исходную нелинейную задачу, по-видимому, можно считать решенной. Однако класс таких задач не включает в себя весьма многочисленные задачи, решения которых не являются монотонными функциями в пространстве и во времени.

В данной статье указан прием, позволяющий построить систему оценок нелинейных немонотонных задач и в этом последнем случае.

Пусть формулировка исходной задачи имеет вид

$$k\frac{\partial p}{\partial \tau}=\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial p}{\partial x}\right),\qquad x\geqslant 0,\qquad \tau\geqslant 0$$

$$p(x,\ 0)=p_0,\quad |p(x,\ \tau)|\leqslant M<\infty,\quad p(0,\ \tau)=f_0(\tau)$$

где $p(x,\ \tau)$ — давление, τ — время, x — пространственная координата, $f_0(\tau)$ — периодическая функция.

Сразу отметим, что функция $f_0(\tau)$ взята периодической только для определенности. Как будет видно из дальнейшего изложения, все рассуждения можно провести для любой функции с ограниченной вариацией.

Стандартным преобразованием исходное уравнение и краевые условия могут быть преобразованы к виду

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}=\frac{p}{k}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\qquad u=\frac{p^2}{2} \tag{1}$$

$$u(x,\ 0)=p_0^2/2=u_0,\quad |u(x,\ \tau)|\leqslant M<\infty \tag{2}$$

$$u(0,\ \tau)=f_0^2(\tau)/2=f(\tau) \tag{3}$$

Найдем сначала первые, самые грубые оценки решения. Представим для этого граничную функцию $f(\tau)$ в виде суммы двух монотонных функций

$$f(\tau)=f_1(\tau)+f_2(\tau),\quad f_1'(\tau)\geqslant 0,\quad f_2'(\tau)\leqslant 0,\quad f'(\tau)=df/d\tau$$

где, например

$$f_1(\tau)=\int\limits_0^\tau f_+'(y)\,dy,\qquad f_2(\tau)=\int\limits_0^\tau f_-'(y)\,dy$$

$$f_+(\tau)=\begin{cases} f(\tau), & f'(\tau)\geqslant 0\\ 0, & f'(\tau)<0\end{cases},\qquad f_-(\tau)=\begin{cases} 0, & f'(\tau)\geqslant 0\\ f(\tau), & f'(\tau)<0\end{cases}$$

Пусть функции $v(x,\ \tau)$ и $w(x,\ \tau)$ удовлетворяют условиям (2) и уравнениям

$$\frac{\partial v}{\partial \tau}=\frac{p}{k}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},\qquad \frac{\partial w}{\partial \tau}=\frac{p}{k}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

$$v(0,\ \tau)=f_1(\tau),\quad w(0,\ \tau)=f_2(\tau)$$

Тогда непосредственной подстановкой можно убедиться в справедливости разложения

$$u(x,\ \tau)=v(x,\ \tau)+w(x,\ \tau)$$

Здесь $v(x,\ \tau)$ описывает решение исходной задачи (1) при монотонной возрастающей граничной функции, а $w(x,\ \tau)$ — при монотонно убывающей. Пользуясь методами получения дифференциальных неравенств [6], можно показать, что функции v_1, v_2 и w_1, w_2, оценивающие v и w сверху и снизу, могут быть найдены как решения уравнений

$$\frac{\partial v_i}{\partial \tau}=\varphi_i\frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2},\qquad \frac{\partial w_i}{\partial \tau}=\varphi_i\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

Константы $\varphi_1 = \min p/k$, $\varphi_2 = \max p/k$ вычисляются из начального и граничного условий на основе принципа максимума или из физических соображений.

Таким образом, справедливы следующие соотношения:

$$v_1 \leqslant v \leqslant v_2, \quad w_2 \leqslant w \leqslant w_1$$

и в соответствии с определением функций v, w имеем

$$u_1 \leqslant u \leqslant u_2, \quad p_1 \leqslant p \leqslant p_2$$

$$u_1 = v_1 + v_2, \quad u_2 = v_2 + w_1$$

Аналитический вид функций v_1, v_2, w_1, w_2 находится с помощью интеграла Дюамеля [8], поэтому задачу построения первых оценок можно считать решенной.

Для улучшения полученных оценок удобнее записать уравнение (1) в несколько измененном виде

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{1}{c}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c}\frac{\partial V(u)}{\partial \tau} \tag{4}$$

где

$$c = k/p_{\max}, \quad V(x, \tau) = k\sqrt{2u} - cu = kp - cp^2/2 \tag{5}$$

Решение уравнения (4) может быть представлено с помощью функции Грина. После интегрирования этого представления по частям и несложных преобразований будем иметь

$$u(x,\tau) = Q_1(x,\tau) + Q_2(x,\tau) + \frac{1}{c}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\tau \frac{\partial\psi(x,\xi,\tau-y)}{\partial y} V^*(\xi,y)\,d\xi\,dy \tag{6}$$

Здесь

$$V^*(\xi, y) = V[u(\xi, y)],$$

$$Q_1(x, \tau) = c^{-1}V^*(x, 0)\ \mathrm{erf}\ (0{,}5x\sqrt{c/\tau} - c^{-1}V^*(x, \tau))$$

ψ – функция Грина для уравнения (4), Q_2 – решение уравнения $c\partial Q_2/\partial\tau = \partial^2 Q_2/\partial x^2$, удовлетворяющее условиям (2) и (3). Оно выписывается с помощью интеграла Дюамеля в замкнутом виде. Вычисление интеграла в правой части (6) производится с применением уже полученных оценок u_1, u_2.

Для нижней оценки $u_3(x, \tau)$ получаем

$$u_3(x,\tau) = Q_1(x,\tau) + Q_2(x,\tau) + \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\tau \frac{\partial\psi}{\partial y}\Phi_1(\xi,y)\,d\xi\,dy \tag{7}$$

Здесь функция Φ_1 вычисляется в соответствии с уравнением (5) следующим образом:

$$\Phi_1(\xi, y) = \begin{cases} k\sqrt{2u_2} - cu_1, & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} < 0 \\[2ex] k\sqrt{2u_1} - cu_2, & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \geqslant 0 \end{cases} \tag{8}$$

Для получения верхней оценки $u_4(x, \tau)$ подставляем вместо $\Phi_1(\xi, y)$ в (7) $\Phi_2(\xi, y)$ в виде

$$\Phi_2(\xi, y) = \begin{cases} k\sqrt{2u_1} - cu_2, & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} < 0 \\[2ex] k\sqrt{2u_2} - cu_1, & \dfrac{\partial\psi}{\partial y} \geqslant 0 \end{cases} \tag{9}$$

Можно показать, что построенные таким образом оценки действительно являются верхней и нижней. Это следует из легко проверяемых неравенств

$$\Phi_1(\xi, y) \leqslant V(\xi, y) \leqslant \Phi_2(\xi, y)$$

Процесс построения уточняющих оценок может быть продолжен. Например, функции u_5 и u_6 находятся по формулам типа (7), а соответствующие им функции Φ_3, Φ_4 – по формулам типа (8) и (9). При получении численных значений искомых функций для каждого приближения требуется вычислять однотипные интегралы, что существенно облегчает применение ЭВМ для расчета.

Можно доказать существование такого τ_0, что при $\tau<\tau_0$ и четном i выполняется система неравенств

$$u_1 \leqslant \ldots \leqslant u_{i-3} \leqslant u_{i-1} \leqslant u \leqslant u_i \leqslant u_{i-2} \leqslant \ldots \leqslant u_2$$

причем $u_i \to u$ при $i \to \infty$.

Для того чтобы обеспечить сходимость построенной системы функций на любом временном интервале, можно, следуя [9], использовать такие соотношения для оценок

$$t_i(x, \tau) = \begin{cases} u_i(x, \tau), & 0 \leqslant \tau < \tau_0 \\ t_{i-2}(x, \tau), & \tau \geqslant \tau_0 \end{cases}$$

$$t_1(x, \tau) = u_1(x, \tau), \quad t_2(x, \tau) = u_2(x, \tau)$$

где τ_0 при каждом значении i определяется из уравнения $u_i(x, \tau_0) = t_{i-2}(x, \tau_0)$.

Тогда при четном i и теперь уже для любых значений времени получим

$$t_1 \leqslant \ldots \leqslant t_{i-1} \leqslant u \leqslant t_i \leqslant \ldots \leqslant t_2$$

Продолжая следовать работе [9], где была построена система функций с аналогичными свойствами, можно показать, что во всей области их определения выполняется соотношение

$$\lim_{i \to \infty} t_i(x, \tau) = u(x, \tau)$$

Таким образом, приведенная процедура построения и уточнения оценок позволяет получить приближенное решение рассматриваемого класса задач с любой точностью. На каждом этапе вычислений известна абсолютная величина и знак максимальной погрешности. Данный метод может использоваться непосредственно для расчета, а также в качестве эталонного для оценки точности приближенных методов. Это обстоятельство особенно важно, так как точные решения рассмотренных задач отсутствуют.

Для иллюстрации эффективности изложенного метода решена модельная задача фильтрации газа при $f_0(\tau) = p_0 + A \sin(w\tau)$, $p_0 = 100$, $A = 70$, $w = 1$, $k = 100$.

Оценки	$x=0$	1	2	3	4	5
1	72,81	85,54	94,11	98,13	99,60	99,99
	72,81	93,03	103,0	105,3	104,5	102,9
2	72,81	88,23	97,67	101,4	102,1	101,6
	72,81	88,60	97,92	101,6	102,2	101,7
3	72,81	88,38	97,77	101,5	102,1	101,7
	72,81	88,44	97,81	101,5	102,1	101,7

В таблице приводятся оценки величины p при различных x для $\tau=5$. Все величины безразмерные.

Первые оценки различаются на величину порядка 10%. Вторые оценки не более чем на 1%. Более высокие оценки совпадают друг с другом уже с точностью до 3–4-го знака.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лейбензон Л. С.* Подземная гидравлика воды, нефти и газа. Т. 2. М.: Изд-во АН СССР, 1953, с. 163–209.
2. *Даниэлян Ю. С.* О сравнении различных методов линеаризации задач фильтрации.– В кн.: Проблемы нефти и газа Тюмени. Науч.-техн. сб., 1978, вып. 39, с. 56–58.
3. *Пирвердян А. М.* Об одном способе оценок приближенных решений уравнения нестационарной фильтрации жидкости и газа.– ПММ, 1961, т. 25, № 4, с. 756–760.
4. *Ентов А. М.* Теоремы сравнения для уравнений нестационарной фильтрации.– ПММ, 1965, т. 29, № 1, с. 200–205.
5. *Мирзаджанзаде А. Х., Огибалов П. М., Каримов З. Г.* Термовязкоупругость и пластичность в нефтепромысловой механике. М.: Недра, 1973. 277 с.
6. *Аметов И. М., Даниэлян Ю. С.* О применении теорем сравнения в теории теплопроводности.– Инж.-физ. журн., 1973, т. 24, № 2, с. 317–323.
7. *Аксенов Б. Г., Даниэлян Ю. С.* Приближенное решение нелинейной одномерной задачи теплопроводности при выделении тепла в некотором интервале температур.– Теплофиз. высоких температур, 1983, т. 21, № 5, с. 939–943.
8. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966. 724 с.
9. *Тихонов А. Н.* Об охлаждении тел при лучеиспускании, следующем закону Стефана – Больцмана.– Изв. АН СССР. Отд-ние матем. и естеств. наук, 1973, с. 461–479.

Тюмень

Поступила в редакцию
16.IV.1984