

5. Горбачев Л. П., Потанин Е. П. МГД — пограничный слой на диске, вращающемся в однородном осевом потоке. — *Магнитная гидродинамика*, 1969, № 3, с. 137—139.
6. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. М.—Л.: Гостехиздат, 1951. 420 с.
7. Jagadeesan K. Hydromagnetic flow against a rotating disc. — *Bull. Inst. polit. Iasi*, 1964, v. 10, № 3—4, p. 81—86.
8. Дорфман Л. А. Гидродинамическое сопротивление и теплотдача вращающихся тел. М.: Физматгиз, 1960. 260 с.
9. Sparrow E. M., Cess R. D. Magneto-hydrodynamic flow and heat transfer about a rotating disk. — *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1962, v. 84, № 1, p. 181—187.

Москва

Поступила в редакцию  
19.IX.1983

УДК 532.527

## НЕСИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ПЛАСТИНКИ С ПАРОЙ ВИХРЕСТОКОВ

ГОМАН М. Г., ХРАБРОВ А. Н.

В последнее время большой интерес вызывает возникновение стационарных несимметричных нагрузок — боковой силы на тонких телах вращения и момента крена на крыльях малого удлинения на больших углах атаки при симметричных условиях обтекания. Эксперименты показывают, что это происходит вследствие развития стационарных несимметричных вихревых структур, образующихся при отрыве потока [1]. Причина возникновения несимметрии пока еще полностью не ясна, поэтому вполне правомерно рассмотрение модельных схем, приближенно описывающих явление.

В работе исследуется стационарное обтекание пластинки в присутствии пары свободных присоединенных вихресток в перпендикулярном набегающем потоке. Получаемая картина течения приближенно соответствует течению в поперечных сечениях при отрывном обтекании крыла малого удлинения на больших углах атаки. Показано, что при некоторых значениях интенсивности стока наряду с симметричным расположением вихресток существуют решения с несимметричным расположением.

Течение около пластинки в присутствии точечных вихрей исследовалось ранее [2, 3]. Стационарного решения для пары симметричных вихрей за пластинкой не существует [3], вследствие чего в настоящей работе в качестве изолированных особенностей выбраны не вихри, а вихресток. Получаемая плоская задача, моделирующая течение в сечениях крыла [4], исследуется простыми методами. Из теоретических оценок и экспериментальных измерений [5] следует, что при отрывном обтекании крыльев с образованием вихрей, сходящих с передней кромки, необходимо вводить стоки в вихревых ядрах, пропорциональные их циркуляции, для учета эжектирующего эффекта вихревого жгута. Поэтому интенсивности стоков в точечных вихрях выбираются прямо пропорциональными их циркуляциям.

Будем пользоваться комплексными безразмерными переменными  $z = x + iy$ , в которых пластинка расположена вдоль оси  $x$  от  $-1$  до  $1$ . Скорость набегающего потока  $U = 1$  направлена перпендикулярно пластинке. Вихресток, характеризующийся безразмерными циркуляциями и расходами стоков  $2\pi k_\alpha$  и  $2\pi q_\alpha$ , покоятся в точках  $z_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , на которые не накладывается требование симметричности относительно направления скорости набегающего потока, причем  $q_\alpha = q |k_\alpha|$ ,  $q < 0$ .

Потребуем выполнения условий: непротекания на пластинке, конечности скорости на ее острых краях, а также стационарности свободных вихресток. Для нахождения комплексного потенциала течения  $W$  воспользуемся конформным преобразованием, переводящим внешность пластинки в плоскости  $z$  на внешность круга единичного радиуса во вспомогательной плоскости  $\zeta$ :  $z = \frac{1}{2}(\zeta + 1/\bar{\zeta})$ .

В этой плоскости удовлетворить граничным условиям на теле можно с помощью метода отражений. При этом вводятся дополнительные особенности в точках, симметричных вихресток относительно окружности, и в центре. Комплексный потенциал течения принимает вид

$$\begin{aligned}
 W(\zeta) = & -\frac{i}{2} \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) + i(k_1 + k_2) \ln \zeta + \\
 & + ik_1 \ln \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - 1/\bar{\zeta}_1} + ik_2 \ln \frac{\zeta - \zeta_2}{\zeta - 1/\bar{\zeta}_2} + \\
 & + q_1 \ln \frac{1}{\zeta} (\zeta - \zeta_1) \left( \zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_1} \right) + q_2 \ln \frac{1}{\zeta} (\zeta - \zeta_2) \left( \zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_2} \right)
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

где  $\bar{\zeta}_1$  и  $\bar{\zeta}_2$  — точки, комплексно-сопряженные с точками  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$ , в которых располагаются вихресток в вспомогательной плоскости  $\zeta$ .

Для стационарности вихресток необходимо, чтобы

$$\lim_{z \rightarrow z_\alpha} \left[ \frac{dW}{dz} - \frac{q_\alpha + ik_\alpha}{z - z_\alpha} \right] = 0, \quad \alpha = 1, 2$$

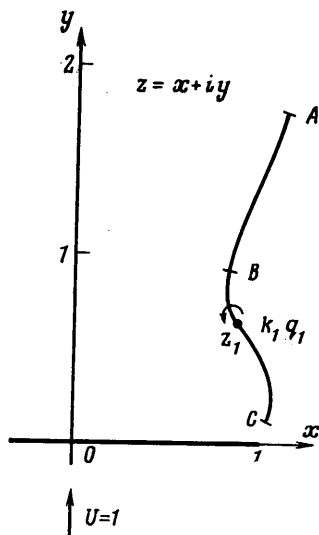
Эти условия определяются требованием равенства нулю скоростей в точках стационарных местоположений вихресток с исключением особенности, обусловленной действием вихресток самого на себя. Во вспомогательной плоскости  $\zeta$  они принимают вид

$$\left( \frac{dz}{d\zeta} \right)^{-1} \lim_{\zeta \rightarrow \zeta_\alpha} \left[ \frac{dW}{d\zeta} - \frac{q_\alpha + ik_\alpha}{\zeta - \zeta_\alpha} \right] - \frac{q_\alpha + ik_\alpha}{2} \left[ \left( \frac{d^2z}{d\zeta^2} \right) / \left( \frac{dz}{d\zeta} \right)^2 \right]_{\zeta = \zeta_\alpha} = 0, \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.2)$$

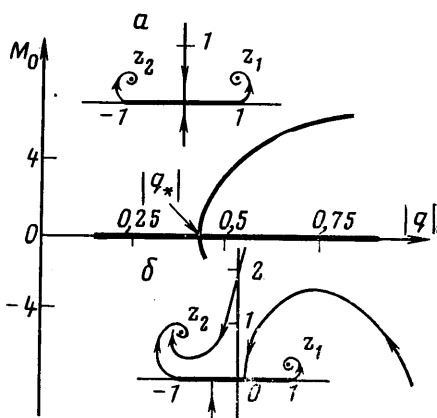
Условия Жуковского — Чаплыгина, обеспечивающие конечность скорости на острых краях пластинки, имеют вид

$$\text{Im} \left[ \frac{dW}{d\zeta} \right]_{\zeta = \pm i} = 0 \quad (1.3)$$

Уравнения (1.2) дают четыре, а (1.3) — два вещественных соотношения. Таким образом, получаем систему шести нелинейных уравнений для определения шести



Фиг. 1



Фиг. 2

неизвестных задачи, например четырех координат и двух циркуляций вихресток. В качестве свободного параметра в задаче остается параметр  $q$ , характеризующий интенсивность стока в вихрях.

Решения системы шести вещественных нелинейных уравнений (1.2) и (1.3), а также их зависимость от параметра  $q$  исследовались численно с помощью метода непрерывного продолжения решений, аналогичного предложенному в [6].

Рассмотрим сначала симметричный случай. На фиг. 1 показано, как меняются при этом рассчитанные стационарные положения первого вихресток в зависимости от изменения параметра  $q$ . Точке  $A$  соответствует значение параметра  $q = -0,01$ , точке  $B$ :  $q = -0,1$ , точке  $C$ :  $q = -1$ . При этом второй вихресток расположен в точке, симметричной  $z_1$  относительно направления набегающего потока, перпендикулярного пластинке. При увеличении  $|q|$  равновесные положения вихресток приближаются к краям пластинки, при стремлении  $q$  к нулю — отодвигаются на бесконечность. Последнее находится в соответствии с выводом [3] об отсутствии стационарного решения для обтекания пластинки с двумя вихрями  $q = 0$ .

Откажемся от требования симметричности расположения вихресток. Оказывается, что при этом в некоторой области изменения параметра  $q$  решение задачи не единственно. При малых значениях расхода стока в вихрях по-прежнему возмож-

но только одно симметричное решение задачи. Если увеличивать интенсивность стока, то при значении  $q=q_* \approx 0,43$  происходит бифуркация решения и при  $|q| > |q_*|$  существует три изолированных решения задачи — одно симметричное и два несимметричных.

О несимметрии решения удобно судить, например, по моменту крена, действующему на пластинку относительно ее центра, который легко вычисляется при известном расположении вихрей по формуле Блазиуса — Чаплыгина. Рассчитанные значения безразмерного момента крена  $M_0$  в зависимости от параметра  $|q|$  показаны на фиг. 2. Видно, что при  $|q| < |q_*|$  существует только одно симметричное решение задачи обтекания пластинки в присутствии пары присоединенных свободных вихресточков, для которого  $M_0=0$ . При значениях  $|q|$ , больших бифуркационного, от симметричного решения отщепляются несимметричные решения с положительным и отрицательным значениями момента крена. Там же показаны построенные картины поля течения для симметричного (а) и одного из несимметричных решений (б) для  $q=-0,5$ .

Таким образом, возникновение в данной модельной задаче несимметричных решений связано с бифуркацией симметричного решения при некотором критическом значении параметра задачи. Возможно, что и в трехмерных моделях возникновение несимметричного обтекания связано с бифуркацией и потерей устойчивости симметричного обтекания.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ericsson L. E., Reding J. P. Steady and unsteady vortex-induced asymmetric loads on slender vehicles.— J. Spacecraft and Rockets, 1981, v. 18, № 2, p. 97—109.
2. Гогош Л. В., Степанов Г. Ю. Расчетная модель периодического отрывного обтекания пластины.— В сб.: Проблемы современной механики. Ч. 1. М.: 1983, с. 83—89.
3. Smith J. H. B., Clark R. W. Nonexistence of stationary vortices behind a two-dimensional normal plate.— AIAA Journal, 1975, v. 13, № 8, p. 1114—1115.
4. Гогош Л. В., Степанов Г. Ю. Турбулентные отрывные течения. М.: Наука, 1979. 367 с.
5. Hoijmakers H. W., Bennekens B. Computational model for the calculation of the flow about wings with leading-edge vortices.— AGARD Conf. Proc., 1978, № 247, p. 25.1—25.11.
6. Давиденко Д. Ф. Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений.— Докл. АН СССР, 1953, т. 88, № 4, с. 601—602.

Москва

Поступила в редакцию  
25.IV.1984

УДК 532.529

### О МЕХАНИЗМЕ НЕМОНОТОННОГО ИЗМЕНЕНИЯ КОНЦЕНТРАЦИИ ДИСКРЕТНОЙ ФАЗЫ ВДОЛЬ ОСИ ДВУХФАЗНОЙ СТРУИ

ЗУЕВ Ю. В., ЛААТС М. К., ЛЕПЕШИНСКИЙ И. А.

При экспериментальном исследовании турбулентной газовой струи с примесью твердых частиц [1] был выявлен эффект немонотонного изменения объемной концентрации дискретной фазы вдоль оси струи: на некотором расстоянии от среза трубы, из которой истекала струя, вблизи оси струи зафиксированы области с объемной концентрацией, превышающей ее начальное значение. Анализ такого изменения объемной концентрации частиц в двухфазной струе проводился рядом исследователей, но в их работах рассматривается, как правило, одна из возможных причин местного увеличения концентрации. Ниже делается попытка обобщить с учетом проведенных авторами данной статьи теоретических исследований имеющиеся в литературе данные по рассматриваемому вопросу, с тем чтобы дать по возможности более полное объяснение эффекту немонотонного изменения объемной концентрации частиц вдоль оси струи.

Одной из причин немонотонного изменения объемной концентрации частиц вдоль оси двухфазной струи является торможение частиц по длине струи [2]. Действительно, при удалении от сошла скорость газа в струе уменьшается, что влечет за собой уменьшение осевой скорости частиц. При этом по мере движения частиц вдоль оси струи происходит уменьшение расстояния между ними (предыдущие частицы движутся с меньшей скоростью, чем последующие вследствие их торможения), что приводит к местному увеличению объемной концентрации дискретной фазы.

Наряду с торможением частиц на изменение их объемной концентрации сильное влияние оказывает и турбулентная диффузия [2], следствием которой является