

**ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ В ОДНОРОДНОМ ОСЕВОМ  
ПОТОКЕ ДИСКЕ ПРИ НАЛИЧИИ ОТСОСА**

БОРИСЕВИЧ В. Д., ПОТАНИН Е. П.

Отсос жидкости через стенку используется для уменьшения роста неустойчивых возмущений в пограничном слое и затягивания его отрыва [1]. Отсасывание пограничного слоя может быть также эффективным средством интенсификации процессов тепло- и массообмена [2]. Существуют методики численного интегрирования уравнений движения в пограничном слое на проницаемой поверхности (см., например, [3]). Однако для ряда технических приложений достаточно знания лишь профилей гидродинамического потока в пограничном слое и его толщины [4]. Один из способов приближенного анализа гидродинамической задачи связан с усреднением нелинейных инерционных членов в уравнениях движения по толщине пограничного слоя (метод Слезкина — Тарга). Этот метод и его модификация нашли применение для решения ряда магнитогидродинамических задач [5].

В настоящей работе методика частичного учета нелинейных членов используется для расчета ламинарного пограничного слоя на вращающемся в однородном осевом потоке диске при наличии равномерного отсоса с его поверхности. Рассматривается также процесс теплообмена между диском и внешним потоком, температура которого отлична от температуры диска.

Пусть различие температуры в основном потоке и на диске относительно невелико. В этом случае можно не учитывать температурных изменений вязкости среды. Положим, кроме того, следуя [6], что изменения плотности, удельной теплоемкости и теплопроводности жидкости незначительны и вязкий нагрев пренебрежимо мал. Тогда в общепринятых обозначениях уравнения пространственных гидродинамического и теплового пограничных слоев на вращающемся диске имеют вид

$$\begin{aligned}
 U \frac{\partial U}{\partial r} + W \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{V^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \\
 U \frac{\partial V}{\partial r} + W \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{UV}{r} &= \nu \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \\
 \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial W}{\partial z} &= 0, \quad U \frac{\partial T}{\partial r} + W \frac{\partial T}{\partial z} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $U$ ,  $V$  и  $W$  — радиальная, азимутальная и осевая компоненты скорости среды;  $P$  — давление;  $T$  — температура;  $\rho$  — плотность;  $\nu = \eta/\rho$  и  $\chi$  — коэффициенты кинематической вязкости и температуропроводности;  $\eta$  — коэффициент динамической вязкости;  $r$ ,  $z$  — радиальная и осевая координаты.

Систему (1) следует интегрировать при граничных условиях

$$\begin{aligned}
 z=0, \quad U=0, \quad V=\omega r, \quad W=-k, \quad T=T_0 \\
 z \rightarrow \infty, \quad U \rightarrow ar, \quad V \rightarrow 0, \quad W \rightarrow -2az, \quad T \rightarrow T_1
 \end{aligned} \tag{2}$$

где  $\omega$  — угловая скорость вращения диска,  $k$  — скорость отсоса на его поверхности,  $T_0$  — температура диска,  $T_1$  — температура во внешнем потоке. Величину  $a$  примем постоянной [6, 7], пренебрегая тем самым влиянием вращения диска и отсоса на внешнее невязкое течение.

Полагая в (1)

$$W(r, z) = -k + W_0(r, z) \tag{3}$$

и выделяя в правых частях уравнений члены, пропорциональные  $k$ , получаем

$$\begin{aligned}
 U \frac{\partial U}{\partial r} + W_0 \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{V^2}{r} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + k \frac{\partial U}{\partial z} \\
 U \frac{\partial V}{\partial r} + W_0 \frac{\partial V}{\partial z} + \frac{UV}{r} &= \nu \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} + k \frac{\partial V}{\partial z} \\
 \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{U}{r} + \frac{\partial W_0}{\partial z} &= 0, \quad u \frac{\partial T}{\partial r} + W_0 \frac{\partial T}{\partial z} = \chi \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + k \frac{\partial T}{\partial z}
 \end{aligned} \tag{4}$$

Принимая в (4)  $U=rF(z)$ ,  $V=rG(z)$ ,  $\theta(z) = (T-T_0)/(T_1-T_0)$ , учитывая условие  $(1/\rho)(\partial P/\partial r) = a^2 r$  и заменяя инерционные члены их средним значением по сечению

пограничного слоя, имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{\nu\delta} \int_0^\delta 3F^2 dz - \frac{1}{\nu\delta} \int_0^\delta G^2 dz - \frac{2a}{\nu\delta} \int_0^\delta F dz - \frac{a^2}{\nu} &= \frac{d^2F}{dz^2} + \frac{1}{l} \frac{dF}{dz} \\ \frac{1}{\nu\delta} \int_0^\delta 4FG dz &= \frac{d^2G}{dz^2} + \frac{1}{l} \frac{dG}{dz}, \quad l = \frac{\nu}{k}, \quad l_1 = \frac{\chi}{k} \\ - \frac{2}{\chi h} \int_0^h \left( \int_0^z F dz \right) \frac{d\theta}{dz} dz &= \frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{1}{l_1} \frac{d\theta}{dz} \end{aligned} \quad (5)$$

где  $\delta$  и  $h$  — толщины гидродинамического и теплового пограничных слоев. Используем следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} z=0, \quad F=0, \quad G=\omega, \quad \theta=0 \\ z=\delta, \quad F=a, \quad G=0, \quad \frac{dG}{dz}=0 \\ z=h, \quad \theta=1, \quad \frac{d\theta}{dz}=0 \end{aligned} \quad (6)$$

Интегрируя (5) с учетом (6), получим

$$F = \frac{A\delta - a}{1 - \exp(-y_0)} [\exp(-y) - 1] + A l^2 y \quad (7)$$

$$G = \frac{\omega \exp(-y_0) [\exp(y_0 - y) - (y_0 - y) - 1]}{1 - \exp(-y_0) - y_0 \exp(-y_0)} \quad (8)$$

$$\theta = \frac{\exp(-x) + x \exp(-x_0) - 1}{\exp(-x_0) + x_0 \exp(-x_0) - 1} \quad (9)$$

$$y = \frac{z}{l}, \quad y_0 = \frac{\delta}{l}, \quad x = \frac{z}{l_1}, \quad x_0 = \frac{h}{l_1}$$

При  $k \rightarrow 0$  ( $l \rightarrow \infty$ ) выражения для радиальной и окружной компонент скорости переходят в решение Тарга, описываемое степенными полиномами [8]. В другом предельном случае больших отсчетов ( $l \rightarrow 0$ ,  $l_1 \rightarrow 0$ ) (7)–(9) совпадают с точным решением уравнений пограничного слоя

$$F \rightarrow a[1 - \exp(-y)], \quad G \rightarrow \omega \exp(-y), \quad \theta \rightarrow 1 - \exp(-x)$$

Для определения неизвестных  $A$ ,  $\delta$  и  $h$  необходимо решить систему уравнений

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\nu\delta} \int_0^\delta 3F^2 dz - \frac{1}{\nu\delta} \int_0^\delta G^2 dz - \frac{2a}{\nu\delta} \int_0^\delta F dz - \frac{a^2}{\nu} \\ \frac{\omega \exp(-y_0)}{l^2 [1 - \exp(-y_0) - y_0 \exp(-y_0)]} &= \frac{1}{\nu\delta} \int_0^\delta 4FG dz \\ \frac{x_0^2 \exp(-x_0)}{\exp(-x_0) + x_0 \exp(-x_0) - 1} &= h \int_0^h \frac{W_0}{\chi} \frac{d\theta}{dz} dz \end{aligned}$$

которая с учетом (7)–(9) принимает вид

$$\begin{aligned} A_0 &= (A_0 - p^2) \delta_0^4 \left[ \frac{3}{d^2} Q + \frac{6}{d^4} R + \frac{1}{d^2} \right] - (A_0 - p^2) \delta_0^2 \left[ \frac{6p}{d} Q + \frac{6p}{d^3} R + \right. \\ &+ \left. \frac{2p}{d^2} \left( 1 - \frac{d}{L} \right) - \frac{p}{d} \right] - 3p^2 Q + \frac{2p}{d} \left( 1 - \frac{d}{L} \right) - \end{aligned} \quad (10)$$

$$-\frac{\exp(-2d)}{[L-d \exp(-d)]^2} \left\{ \frac{1}{2d} [\exp(2d) - 1] + 1 + d + d^2/3 - 2 \exp(d) \right\}$$

$$A_0 = p^2 + \frac{1}{4\delta_0^4 D} + \frac{p}{2d^3 \delta_0^2 DL} [2 + d^2 - \exp(d) + \exp(-d)] \quad (11)$$

$$f \exp(-f) = -\frac{A_0 \delta_0^3 h_0}{dL} \left\{ \exp(-f) \left[ \frac{h_0^2 L}{3\delta_0^2 Pr^2} - \frac{h_0}{\delta_0 Pr L} + \frac{2}{dL} \right] - \right.$$

$$-\frac{2 \exp(-f) Pr}{df L} [1 - \exp(-f/Pr)] - \frac{h_0^2 L}{\delta_0^2 Pr^2 f^3} [2 - 2(f+1) \exp(-f) - f^2 \exp(-f)] +$$

$$+\frac{2h_0}{\delta_0 f^2 Pr L} [1 - (f+1) \exp(-f)] - \frac{2}{df L} [1 - \exp(-f)] +$$

$$\left. + \frac{2 Pr}{df L (1+Pr)} \left[ 1 - \exp\left(\frac{f}{Pr} + f\right) \right] \right\}$$

$$d = k_0 \delta_0, \quad f = k_0 h_0, \quad \delta_0 = \delta(\omega/\nu)^{1/2}, \quad h_0 = h(\omega/\nu)^{1/2} Pr$$

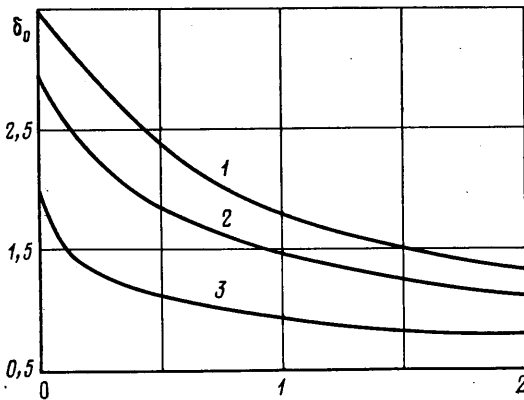
$$Pr = \nu/\chi, \quad k_0 = k(\nu\omega)^{1/2}, \quad p = a/\omega, \quad A_0 = A\nu/\omega^2 + p$$

$$Q = \frac{(2d+1)[-3 - \exp(-2d) + 4 \exp(-d)]}{2d[1 - 2 \exp(-d) + \exp(-2d)]}$$

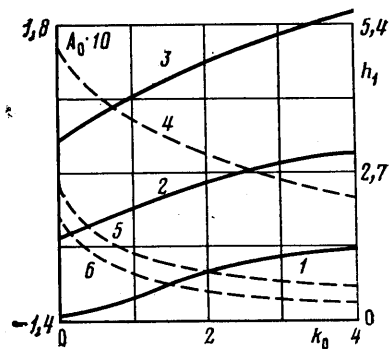
$$D = \frac{2 + d^2 - \exp(d) - \exp(-d)}{2d^4 L} + \frac{1}{d^5} [\exp(d) - 1] - \frac{1}{d^4} - \frac{1}{2d^3} - \frac{1}{6d^2}$$

$$R = \frac{2 - 2(1+d) \exp(-d) + d^2}{2L}, \quad L = 1 - \exp(-d)$$

На фиг. 1 представлены зависимости толщины пограничного слоя  $\delta_0$  от относительной интенсивности потенциального потока  $p$  при значениях параметра отсоса  $k_0=0; 1; 4$  (кривые 1-3 соответственно). На фиг. 2 показаны зависимости величины  $A_0$ , характеризующей скорость радиального движения среды вблизи поверхности



Фиг. 1



Фиг. 2

диска, от параметра  $k_0$  при  $p=0; 0,5; 0,75$  (кривые 1-3). В отсутствие отсоса и потенциального потока ( $k_0=0, p=0$ ) решение совпадает с данными работы [6], а при  $k_0=0$  и  $p \neq 0$  - с результатами, полученными в [7]. Как следует из данных расчета, толщина гидродинамического пограничного слоя  $\delta_0$  довольно быстро уменьшается с ростом отсоса, причем этот эффект слабее выражен при больших значениях параметра  $p$ . Отметим, что используемый аналитический метод решения уравнений пограничного слоя позволяет уяснить физические причины ряда эффектов. В частности, при  $p=0$  зависимость  $A_0(k_0)$  обусловлена характерным изменением величин соответствующих членов в уравнениях (10) и (11), описывающих баланс вязких и «инерционных» сил. Если центробежные силы стремятся отбросить жидкость в пограничном слое на периферию, то вязкие препятствуют этому процессу. Уменьшение

величины  $|A_0|$  с возрастанием отсоса объясняется в основном увеличением радиальных сил вязкости в пограничном слое при падении его толщины.

Используя выражение (8) для азимутальной компоненты скорости, вычислим момент сил трения  $M_0$ , действующий на одну сторону поверхности диска радиуса  $R_0$ , и определим коэффициент момента трения  $c_M$

$$M_0 = 2\pi\rho\nu \int_0^{R_0} r^2 \left| \frac{\partial V}{\partial z} \right|_{z=0} dr = \frac{\pi\rho R_0^4 (\omega^2\nu)^{1/2} d [\exp(-d) - 1]}{2\delta_0 [1 - (1+d)\exp(-d)]}$$

$$c_M = \frac{2M_0}{\pi\rho R_0^4 (\omega^2\nu)^{1/2}}$$

Ниже приведены величины коэффициента момента трения для различных значений  $p$  (при  $k_0=0$ ) и  $k_0$  (при  $p=0$ ):

$p$	0,25	0,50	0,75	1,0	2,0	
$c_M$	0,688	0,833	0,973	1,101	1,524	
$c_M^*$	0,654	0,787	0,916	1,036	—	
$k_0$	0	0,50	1,0	2,0	3,0	4,0
$c_M$	0,572	0,845	1,197	2,064	3,024	4,011
$c_M^{**}$	0,616	—	1,175	2,041	3,012	4,005

Как показывает предельный переход, при больших отсосах величина  $c_M$  близка к  $k_0$ , что непосредственно следует из закона сохранения импульса. Для сравнения в выводах указаны известные результаты приближенных расчетов. Здесь  $c_M^*$  — коэффициент момента трения, рассчитанный в [7] на основе интегрального метода Кармана,  $c_M^{**}$  — коэффициент, определенный в [8] спшиванием приближенного решения в области малых отсосов с точным при больших. Отметим удовлетворительное согласие величин, рассчитанных различными методами.

На фиг. 2 штриховыми линиями представлены зависимости толщины теплового пограничного слоя  $h_1 = h_0/Pr$  от параметра отсоса  $k_0$  при  $p=0$  и значениях числа Прандтля  $Pr=1; 5; 10$  (кривые 4–6). Оценим число Нуссельта  $Nu$ , характеризующее интенсивность теплового потока  $q$  на поверхности диска. Следуя [9] и используя (9), получим

$$Nu = \frac{q(0)}{(T_0 - T_1) \kappa} (v/\omega)^{1/2} = \frac{Pr f[\exp(-f) - 1]}{h_0 [\exp(-f) + f \exp(-f) - 1]}$$

$$q = -\kappa \frac{\partial T}{\partial z}$$

где  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности среды. Результаты расчета числа  $Nu$  при  $p=0$  для различных значений параметра отсоса  $k_0$  и чисел  $Pr=1; 5$  и  $10$  приведены в таблице. Здесь же для сравнения в скобках представлены данные численного решения, выполненного в [9] в отсутствие отсоса и обдува.

$Pr$	$k_0=0$	0,50	1,0	2,0	3,0	4,0
1	0,415(0,396)	0,717	1,113	2,031	3,012	4,006
5	0,850	2,693	5,065	10,013	15,005	20,002
10	1,120(1,134)	5,137	10,039	20,007	30,003	40,001

При больших отсосах, начиная с  $k_0=1-2$ , значение числа  $Nu$  выходит на асимптоту  $Nu=Pr k_0$ , которая согласуется с законом сохранения энергии.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Томас А. С. В., Корнелиус К. К. Исследование шелевого отсоса ламинарного пограничного слоя. — Аэрокосмическая техника, 1983, т. 1, № 1, с. 98–107.
2. Волчков Э. П., Синайко Е. И., Терехов В. И. Турбулентный пограничный слой с отсосом в неизотермических условиях. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1979, № 2, с. 37–44.
3. Шишкина Л. Г. Двухпараметрическое решение уравнений ламинарного пограничного слоя на проницаемой поверхности. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1973, № 6, с. 145–147.
4. Блум Э. Я., Михайлов Ю. А., Озолс Р. Я. Тепло- и массообмен в магнитном поле. Рига: Зинатне, 1980. 355 с.

5. Горбачев Л. П., Потанин Е. П. МГД — пограничный слой на диске, вращающемся в однородном осевом потоке. — *Магнитная гидродинамика*, 1969, № 3, с. 137—139.
6. Тарг С. М. Основные задачи теории ламинарных течений. М.—Л.: Гостехиздат, 1951. 420 с.
7. Jagadeesan K. Hydromagnetic flow against a rotating disc. — *Bull. Inst. polit. Iasi*, 1964, v. 10, № 3—4, p. 81—86.
8. Дорфман Л. А. Гидродинамическое сопротивление и теплотдача вращающихся тел. М.: Физматгиз, 1960. 260 с.
9. Sparrow E. M., Cess R. D. Magneto-hydrodynamic flow and heat transfer about a rotating disk. — *Trans. ASME. J. Appl. Mech.* 1962, v. 84, № 1, p. 181—187.

Москва

Поступила в редакцию  
19.IX.1983

УДК 532.527

## НЕСИММЕТРИЧНЫЕ РЕШЕНИЯ В ЗАДАЧЕ ОБТЕКАНИЯ ПЛАСТИНКИ С ПАРОЙ ВИХРЕСТОКОВ

ГОМАН М. Г., ХРАБРОВ А. Н.

В последнее время большой интерес вызывает возникновение стационарных несимметричных нагрузок — боковой силы на тонких телах вращения и момента крена на крыльях малого удлинения на больших углах атаки при симметричных условиях обтекания. Эксперименты показывают, что это происходит вследствие развития стационарных несимметричных вихревых структур, образующихся при отрыве потока [1]. Причина возникновения несимметрии пока еще полностью не ясна, поэтому вполне правомерно рассмотрение модельных схем, приближенно описывающих явление.

В работе исследуется стационарное обтекание пластинки в присутствии пары свободных присоединенных вихресток в перпендикулярном набегающем потоке. Получаемая картина течения приближенно соответствует течению в поперечных сечениях при отрывном обтекании крыла малого удлинения на больших углах атаки. Показано, что при некоторых значениях интенсивности стока наряду с симметричным расположением вихресток существуют решения с несимметричным расположением.

Течение около пластинки в присутствии точечных вихрей исследовалось ранее [2, 3]. Стационарного решения для пары симметричных вихрей за пластинкой не существует [3], вследствие чего в настоящей работе в качестве изолированных особенностей выбраны не вихри, а вихресток. Получаемая плоская задача, моделирующая течение в сечениях крыла [4], исследуется простыми методами. Из теоретических оценок и экспериментальных измерений [5] следует, что при отрывном обтекании крыльев с образованием вихрей, сходящих с передней кромки, необходимо вводить стоки в вихревых ядрах, пропорциональные их циркуляции, для учета эжектирующего эффекта вихревого жгута. Поэтому интенсивности стоков в точечных вихрях выбираются прямо пропорциональными их циркуляциям.

Будем пользоваться комплексными безразмерными переменными  $z = x + iy$ , в которых пластинка расположена вдоль оси  $x$  от  $-1$  до  $1$ . Скорость набегающего потока  $U = 1$  направлена перпендикулярно пластинке. Вихресток, характеризующийся безразмерными циркуляциями и расходами стоков  $2\pi k_\alpha$  и  $2\pi q_\alpha$ , покоятся в точках  $z_\alpha$ ,  $\alpha = 1, 2$ , на которые не накладывается требование симметричности относительно направления скорости набегающего потока, причем  $q_\alpha = q |k_\alpha|$ ,  $q < 0$ .

Потребуем выполнения условий: непротекания на пластинке, конечности скорости на ее острых краях, а также стационарности свободных вихресток. Для нахождения комплексного потенциала течения  $W$  воспользуемся конформным преобразованием, переводящим внешность пластинки в плоскости  $z$  на внешность круга единичного радиуса во вспомогательной плоскости  $\zeta$ :  $z = \frac{1}{2}(\zeta + 1/\bar{\zeta})$ .

В этой плоскости удовлетворить граничным условиям на теле можно с помощью метода отражений. При этом вводятся дополнительные особенности в точках, симметричных вихресток относительно окружности, и в центре. Комплексный потенциал течения принимает вид

$$\begin{aligned}
 W(\zeta) = & -\frac{i}{2} \left( \zeta - \frac{1}{\zeta} \right) + i(k_1 + k_2) \ln \zeta + \\
 & + ik_1 \ln \frac{\zeta - \zeta_1}{\zeta - 1/\bar{\zeta}_1} + ik_2 \ln \frac{\zeta - \zeta_2}{\zeta - 1/\bar{\zeta}_2} + \\
 & + q_1 \ln \frac{1}{\zeta} (\zeta - \zeta_1) \left( \zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_1} \right) + q_2 \ln \frac{1}{\zeta} (\zeta - \zeta_2) \left( \zeta - \frac{1}{\bar{\zeta}_2} \right)
 \end{aligned} \tag{1.1}$$