

3. При анализе решения рассматривались только нейтральные возмущения ($\lambda_i=0$). Как показал численный эксперимент, нейтральной устойчивостью обладают лишь монотонные возмущения ($\lambda_i=0$).

На фиг. 2 приведены нейтральные кривые для различных значений нормального и касательного сопротивлений (кривые 1-5 соответствуют сопротивлениям $\alpha=\beta=0, 10^2, 10^3, 10^4, \infty$). В случае полностью пронизаемых перегородок (кривая 1) имеет место неустойчивость, при любых числах Рэлея абсолютная, относительно длинноволновых возмущений. С ростом сопротивления перегородок в области конечных волновых чисел устойчивость равновесия системы повышается, а при сопротивлении ~ 1000 на нейтральной кривой появляется минимум с $k=1,2$. При дальнейшем увеличении сопротивления абсолютная неустойчивость практически вырождается, а положение минимума нейтральной кривой остается неизменным.

В предельном случае твердых непроницаемых для жидкости границ ($\alpha=\beta\rightarrow\infty$) минимальное критическое число Рэлея равно 79,3, а волновое число равно 1,2. Заметим, что критические параметры здесь ниже, чем в задаче Рэлея с твердыми, хорошо проводящими тепло границами ($R_*=106, k_*=1,55$). Наблюдаемый эффект объясняется тем, что в рассматриваемом случае возмущения температуры оказываются локализованными не только в слое между твердыми границами, но и проникают во внешние слои жидкости, эффективно увеличивая размер области развития возмущений. Аналогичная ситуация имеет место в задаче о возникновении конвекции в горизонтальном слое жидкости, заключенном между твердыми массивами конечной теплопроводности [1], для которой критические параметры в случае одинаковой теплопроводности массивов и жидкости оказываются практически совпадающими с приведенными выше значениями. Такое совпадение связано, по-видимому, с тем, что во внешних изотермических слоях жидкости тепловые возмущения индуцируют движение жидкости слабо.

Расчет нейтральных кривых при $\beta>\alpha$ показал слабую их зависимость от величины касательного сопротивления. Отличие практически наблюдается лишь в области малого нормального сопротивления перегородок. Нейтральная кривая для $\alpha=0, \beta=\infty$ изображена на фиг. 2 штриховой линией. Остальные нейтральные кривые для $\beta=\infty$ в пределах точности построения рисунка совпадают с соответствующими кривыми при $\alpha=\beta$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. Бирих Р. В., Рудаков Р. Н. Влияние пронизаемой перегородки на конвективную неустойчивость горизонтального слоя жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 1, с. 157-159.
3. Бирих Р. В., Рудаков Р. Н. Конвективная устойчивость горизонтального слоя жидкости с тонкой пронизаемой произвольно расположенной перегородкой. — В сб.: Конвективные течения. Пермь, 1981, с. 12-17.

Пермь

Поступила в редакцию
21.V.1984

УДК 532.526.011:518.5

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА В ОКРЕСТНОСТИ ЗАДНЕЙ КРОМКИ ПЛАСТИНЫ

БОГОЛЕПОВ В. В.

Появление локальной особенности в решениях для окрестности задней кромки пластины при до- или сверхзвуковом ее обтекании делает необходимым рассмотрение течения в локальной области, которая в первом приближении описывается уравнениями Навье — Стокса для несжимаемого газа. В работе получены численные решения для такой области как для тонкой пластины, так и для пластины с толщиной. Представлены картины линий тока, распределения функций течения по поверхности пластины и в следе за ней. Для пластины с конечной толщиной численное решение получено в широком диапазоне изменения местного числа Рейнольдса.

1. Решение для окрестности задней кромки пластины $x \sim O(1/Re)$ (число Рейнольдса Re_0 посчитано по параметрам набегающего потока и длине пластины) при до- или сверхзвуковом внешнем потоке и больших, но докритических числах Re_0 , получено в работах [1-3] соответственно. Оказалось, что в обоих случаях задняя кромка пластины обтекается без образования срывных зон, напряжение трения τ на поверхности пластины монотонно возрастает по мере приближения к задней кромке и соответственно на самой кромке приблизительно в 1,34 и 1,80 раза пре-

восходит напряжение трения в невозмущенном пограничном слое на поверхности пластины, градиент давления $\partial p/\partial x$ конечный и отрицательный. Разрыв краевых условий в задней кромке пластины приводит к появлению особенностей в следе за пластиной: в обоих случаях на линии симметрии при $y=0$ компоненты скорости изменяются как $u \sim x^{1/2}$, $v \sim x^{-1/2}$, а возмущение давления — как $\Delta p \sim x^{3/2}$. Поэтому решения [1–3] несправедливы при $x \ll l \text{Re}_0^{-3/2}$, и в области с характерными размерами $x \sim y \sim O(l \text{Re}_0^{-3/2})$ необходимо ввести новые независимые переменные и асимптотические разложения для функций течения

$$x = l\varepsilon^{3/2}x_1, \quad y = l\varepsilon^{3/2}y_1 \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} u(x, y; \varepsilon) &= u_0[\varepsilon^{1/2}u_1(x_1, y_1) + \dots], \quad v(x, y; \varepsilon) = u_0[\varepsilon^{1/2}v_1(x_1, y_1) + \dots] \\ p(x, y; \varepsilon) &= \rho_0 u_0^2 \left[\frac{1}{\gamma M_0^2} + \varepsilon^{1/2}p_w + \varepsilon p_1(x_1, y_1) + \dots \right] \\ \mu(x, y; \varepsilon) &= \mu_0(\mu_w + \dots) \end{aligned}$$

$$\rho(x, y; \varepsilon) = \rho_0(\rho_w + \dots), \quad h(x, y; \varepsilon) = u_0^2[h_w + \varepsilon^{1/2}h_1(x_1, y_1) + \dots]$$

Здесь $\varepsilon = \text{Re}_0^{-1/2}$, индексом w отмечены переменные на поверхности пластины у ее задней кромки; p_w , например, — возмущение давления на задней кромке пластины для области течения с $x \sim O(l \text{Re}_0^{-3/2})$, а остальные обозначения обычные. Очевидно, что переменные с индексом w различны для дозвукового или сверхзвукового случая обтекания пластины.

Если теперь разложение (1.1) подставить в уравнения Навье — Стокса и совершить предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$, то можно получить, что в первом приближении течение в окрестности задней кромки пластины с характерными размерами $x \sim y \sim O(l\varepsilon^{3/2})$ будет описываться уравнениями Навье — Стокса для несжимаемого газа

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ u \frac{\partial h}{\partial x} + v \frac{\partial h}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Re Pr}} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \right) \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь x, y отнесены к некоторому размеру в области течения a_1 , компоненты скорости u, v — к Aa_1 , $A = (\partial u/\partial y)_w$, возмущение энтальпии h — к Va_1 , $V = (\partial h/\partial y)_w$, возмущение давления p — к $\rho_w A^2 a_1^2$, местное число Рейнольдса $\text{Re} = \rho_w A a_1^2 / \mu_w$, Pr — число Прандтля. Так как в исследуемой области течения нет характерной длины, то можно выбрать $a_1 = (\mu_w / A \rho_w)^{1/2}$; тогда $\text{Re} = 1$. Кроме того, здесь и в дальнейшем для простоты опущен индекс 1 у переменных.

На поверхности пластины должны выполняться обычные условия прилипания и непротекания, в следе за пластиной — условия симметрии и гладкости профилей u, v и h

$$u = v = h = 0 \quad (x \leq 0, y = 0); \quad \partial u/\partial y = v = \partial h/\partial y = 0 \quad (x > 0, y = 0) \quad (1.3)$$

Внешние краевые условия получаются из сращивания решения в исследуемой области течения с решениями [1–3] при $x^2 + y^2 \rightarrow 0$ (для области с характерными размерами $x \sim O(\varepsilon^{3/2})$ и $y \sim O(\varepsilon^{3/2})$)

$$u \rightarrow y, \quad h \rightarrow y \quad (x \rightarrow -\infty \text{ или } y \rightarrow \infty); \quad u \sim x^{1/2}U(y/x^{1/2}), \quad h \sim x^{1/2}H(y/x^{1/2}) \quad (x \rightarrow \infty) \quad (1.4)$$

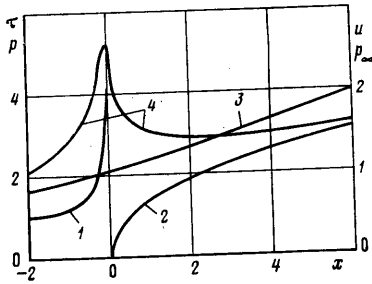
где функции $U(y/x^{1/2}), H(y/x^{1/2})$ описывают решение в следе за пластиной.

Краевая задача (1.2)–(1.4) без уравнения сохранения энергии была сформулирована и частично исследована в работе [4].

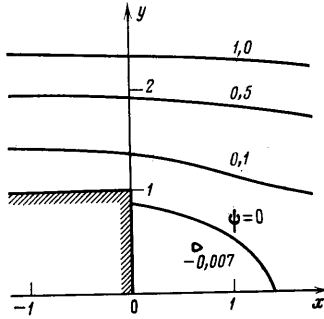
2. Краевая задача (1.2)–(1.4) решалась численно в традиционных переменных функции тока и завихренности. Для завихренности на поверхности пластины использовалось обычное приближенное условие первого порядка точности [5], на внешних границах расчетной области использовалось условие выхода решения на решение для изолированного стока, помещенного в задней кромке пластины. Дифференциальная краевая задача аппроксимировалась разностной первого порядка точности [6], при ее решении использовался метод переменных направлений [7], во всех расчетах принималось $\text{Pr} = 0.7$. Подробное используемый метод расчета функции тока и завихренности и способ последующего нахождения давления для краевых задач рассматриваемого типа описаны в [8].

Результаты расчетов показывают, что течение всюду безотрывное, ускорение потока в следе за пластиной вызывает значительное смещение линий тока к линии симметрии. Ускорение потока также приводит к значительному росту напряжения трения τ и теплового потока q на поверхности пластины по мере приближения к ее задней кромке. Распределение τ по поверхности пластины показано на фиг. 1 (кривая 1, кривая распределения q очень мало отличается от кривой 1 и на фиг. 1 не показана). Полученное распределение τ качественно согласуется с представленной в [9] зависимостью $\tau \sim x^{-2}$ при $x \rightarrow 0$. Распределение продольной скорости u на линии симметрии (кривая 2 на фиг. 1) при $x \geq 10$ хорошо согласуется с асимптотическим законом изменения: $u \sim x^{1/2}$ при $x \rightarrow \infty$.

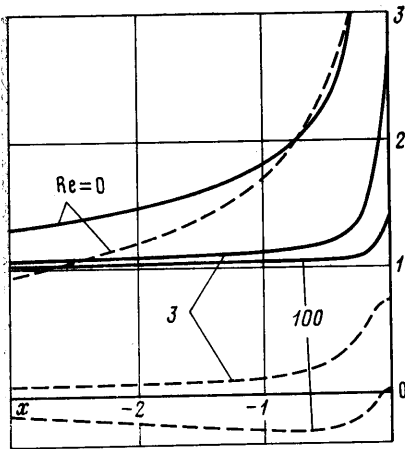
При $y \rightarrow \infty$ течение для рассматриваемой области невязкое и соответствует течению в расширяющемся канале (для внешнего течения). Поэтому очевидным явля-



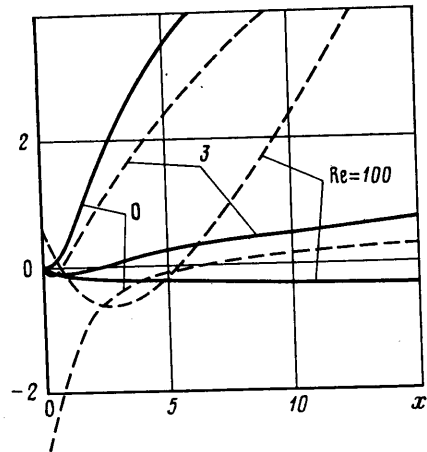
Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

ется распределение давления p_∞ на внешней границе расчетной области (кривая 3 на фиг. 1): в расширяющемся канале при дозвуковых скоростях течения давление возрастает. Сильное ускорение потока в следе за пластиной позволяет ему преодолеть значительное возрастание давления на поверхности пластины по мере приближения к задней кромке; в следе за пластиной на линии симметрии при $x \geq 10$ давление выходит на асимптотический закон изменения: $p \sim x^{1/2}$ при $x \rightarrow \infty$ (кривая 4 на фиг. 1).

3. Описанный выше способ построения решения уравнений Навье - Стокса в окрестности задней кромки пластины полностью применим и для случая пластины с характерной толщиной $a \sim O(\epsilon^{1/2})$. При этом ее толщина по порядку величины меньше характерного поперечного размера области $y \sim O(\epsilon^{1/4})$, для которой получены внешние для исследуемой области решения [1-3], и поэтому они в первом приближении при $\epsilon \rightarrow 0$ останутся без изменения. В этом случае остаются справедливыми все формулы п. 1, только теперь в качестве характерной длины выбирается половина толщины пластины ($a = 2\epsilon^{1/2}a_1$, $a_1 \sim O(1)$), местное число Рейнольдса Re изменяется в широких пределах, при численном решении надо рассматривать иную конфигурацию поверхности тела.

Численное решение краевой задачи (1.2) - (1.4) для окрестности задней кромки пластины с толщиной для чисел Рейнольдса $Re = 0 - 100$ получено при использовании прежней численной схемы.

На фиг. 2 показано распределение линий тока в поле течения при $Re=3$. Характерно, что при $Re=0$ течение безотрывное. При $Re>0$ образуется срывная зона, протяженность L которой быстро увеличивается с ростом числа Re . Поперечный размер срывной зоны изменяется незначительно, практически при всех исследованных числах Re срывная зона начинается чуть ниже верхнего края заднего среза пластины при $y \approx 0,95$. На фиг. 3 представлены распределения напряжения трения τ (сплошные линии) и возмущения давления p (пунктирные линии, показана величина $Re p$) по поверхности пластины для различных значений числа Re . Кривые распределения теплового потока q схожи с кривыми распределения τ и на фиг. 3 не представлены. Очевидно, что с ростом Re сильно уменьшаются возмущения τ , q и p , так как из-за увеличения протяженности срывной зоны обтекается все более пологий эффективный обратный уступ.

Ниже представлены значения величин L и q_1, q_2

$$q_1 = \int_{-\infty}^0 (q-1) dx, \quad q_2 = \int_0^1 q dy$$

характеризующих изменение нагрева поверхности пластины и нагрев ее торца, при различных значениях числа Re :

Re	3	10	30	40	50
L	1,4	4,2	12,2	16,1	20
q_1	0,465	0,287	0,207	0,180	0,165
q_2	0,968	0,781	0,655	0,650	0,650

На фиг. 4 показаны распределения продольной скорости u (сплошные линии) и возмущения давления $Re p$ (пунктирные линии) на линии симметрии для различных значений числа Re . Ограниченность размеров расчетной области вниз по потоку не позволяет, к сожалению, дойти до выхода этих кривых на асимптотические при $x \rightarrow \infty$ законы изменения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Stewartson K. On the flow near the trailing edge of a flat plate. II.— *Mathematika*, 1969, v. 16, № 1, p. 106–121.
2. Messiter A. F. Boundary layer flow near the trailing edge of a flat plate.— *S. I. A. M. J. Appl. Math.*, 1970, v. 18, № 1, p. 241–257.
3. Daniels P. G. Numerical and asymptotic solutions for the supersonic flow near the trailing edge of a flat plate.— *Quart.— J. Mech. and Appl. Math.*, 1974, v. 27, № 2, p. 175–191.
4. Stewartson K. On the flow near the trailing edge of a flat plate.— *Proc. Roy. Soc.*, 1968, A306, № 1486, p. 275–290.
5. Thom A. An investigation of fluid flow in two dimensions.— *Great Britain Aeronaut. Res. Council, Repts and Memo*, 1928, № 1194.
6. Госмен А. Д., Пан В. М., Ранчел А. К., Сполдинг Д. Б., Вольфштейн М. Численные методы исследования течений вязкой жидкости. М.: Мир, 1972. 324 с.
7. Peaceman D. W., Rachford H. H., Jr. The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations.— *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, 1955, v. 3, № 1.
8. Боголенов В. В. Расчет обтекания обращенного навстречу потоку малого уступа.— *ПМТФ*, 1983, № 2, с. 35–40.
9. Stewartson K. Multistructured boundary layers on flat plates and related bodies.— *Adv. Appl. Mech.*, New York – London: Acad. press, 1974, v. 14, p. 145–239.

Москва

Поступила в редакцию
6.X.1983