

УДК 532.5.013.4+536.25

**КОНВЕКТИВНАЯ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ГОРИЗОНТАЛЬНОГО СЛОЯ
ЖИДКОСТИ МЕЖДУ ПРОНИЦАЕМЫМИ ПЕРЕГОРОДКАМИ**

БИРИХ Р. В., РУДАКОВ Р. Н.

Исследована устойчивость равновесия системы, состоящей из двух полубесконечных изотермических массивов жидкости, разделенных горизонтальным слоем конечной толщины такой же жидкости с вертикальным градиентом температуры, направленным вниз. Переходный слой выделяется тонкими проницаемыми перегородками. Для различных сопротивлений перегородок построены кривые нейтральной устойчивости. В случае большой проницаемости равновесие абсолютно неустойчиво относительно длинноволновых возмущений монотонного типа. Для перегородок малой проницаемости характерной является неустойчивость относительно монотонных возмущений конечной длины волны.

1. В жидкости, занимающей все пространство, выделим тонкими проницаемыми перегородками горизонтальный слой толщиной $2h$. Систему координат выберем, как указано на фиг. 1. Предположим следующую зависимость температуры жидкости от вертикальной координаты z :

$$T_0 = \Theta, \quad z < -h; \quad T_0 = -\frac{\Theta}{h}z, \quad |z| \leq h; \quad T_0 = -\Theta, \quad z > h \quad (1.1)$$

При таком распределении температуры в жидкости возможно механическое равновесие. Для исследования устойчивости равновесия системы рассмотрим поведение малых возмущений вертикальной компоненты скорости и температуры вида

$$v_z = v(z) \exp(-\lambda t + i(k_1 x + k_2 y)) \\ T = \theta(z) \exp(-\lambda t + i(k_1 x + k_2 y))$$

где λ — комплексный декремент возмущений, k_1 и k_2 — вещественные волновые числа. Амплитуды возмущений скорости $v(z)$ и температуры $\theta(z)$ удовлетворяют уравнениям [1]

$$-\lambda(v_i'' - k^2 v_i) = v_i^i \nu - 2k^2 v_i'' + k^4 v_i - Rk^2 \theta_i \quad (1.2)$$

$$-\lambda P \theta_i = \theta_i'' - k^2 \theta_i + v_i A_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.3)$$

$$k^2 = k_1^2 + k_2^2, \quad A_1 = A_3 = 0, \quad A_2 = 1$$

Здесь R — число Рэлея, определенное через полуразность температур Θ и полуширину слоя h , P — число Прандтля, штрихи означают производные по z , а индекс i — номера областей, указанных на фиг. 1. В качестве единиц измерения длины, времени, скорости и температуры выбраны соответственно h , h^2/ν , χ_i/h и Θ (ν — кинематическая вязкость, χ — температуропроводность).

Запишем граничные условия для амплитуд возмущений. Вдали от переходного слоя возмущения скорости и температуры должны затухать

$$z \rightarrow -\infty, \quad v_1 \rightarrow 0, \quad v_1' \rightarrow 0, \quad \theta_1 \rightarrow 0 \quad (1.4)$$

$$z \rightarrow \infty, \quad v_3 \rightarrow 0, \quad v_3' \rightarrow 0, \quad \theta_3 \rightarrow 0 \quad (1.5)$$

На тонких проницаемых перегородках, ограничивающих переходный слой, предполагается непрерывность температуры, теплового потока и скорости движения жидкости. Величины касательной и нормальной компонент скорости предположим пропорциональными сумме соответствующих компонент тензора напряжений с обеих сторон от перегородки. Для амплитуд нормальных возмущений эти условия можно записать в виде [2, 3]

$$z = -1, \quad \theta_1 = \theta_2, \quad \theta_1' = \theta_2', \quad v_1 = v_2, \quad v_1' = v_2' \quad (1.6)$$

$$v_2'' - v_1'' = \beta v_1', \quad v_2''' - v_1''' = -\alpha k^2 v_1$$

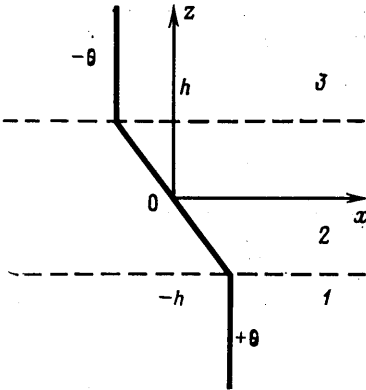
$$z=1, \theta_2=\theta_3, \theta_2'=\theta_3', v_2=v_3, v_2'=v_3' \quad (1.7)$$

$$v_3''-v_2''=\beta v_3', v_3'''-v_2'''=-\alpha k^2 v_3$$

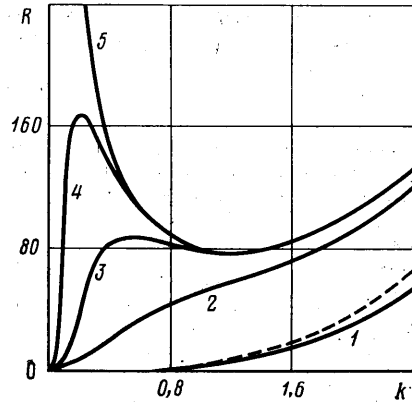
где α и β — коэффициенты нормального и касательного сопротивлений перегородок, в качестве единиц измерения которых принято отношение динамической вязкости к полуширине слоя.

Краевая задача (1.2)–(1.7) определяет спектр декрементов λ нормальных возмущений в зависимости от параметров задачи R, P, k, α и β .

2. Построим точное решение сформулированной краевой задачи. В силу симметрии уравнений и граничных условий решения распадаются на четные и нечетные, что позволяет искать решение только в половине области, например при $z \leq 0$.



Фиг. 1



Фиг. 2

Поскольку вещественность декремента λ краевой задачи (1.2)–(1.7) строго доказать не удастся, при исследовании нейтральных возмущений предположим λ отличным от нуля.

В области 1 решение уравнений (1.2)–(1.3), убывающие при $z \rightarrow -\infty$, можно записать в виде

$$z \leq -1, v_1 = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + c_3 \varphi_3, \theta_1 = \lambda^2 P(P-1) c_3 \varphi_3 \quad (2.1)$$

$$\varphi_1 = \exp(k(z+1))$$

$$\varphi_2 = \frac{\exp(\sqrt{k^2 - \lambda}(z+1)) - \varphi_1}{\sqrt{k^2 - \lambda} - k} - \varphi_1$$

$$\varphi_3 = \left(\frac{\exp(\sqrt{k^2 - \lambda P}(z+1)) - \varphi_1}{\sqrt{k^2 - \lambda P} - k} - \varphi_2 - \varphi_1 \right) / \left(\sqrt{k^2 - \lambda P} - \sqrt{k^2 - \lambda} \right) - \varphi_2 - \frac{1}{2} \varphi_1$$

где частные решения φ_i сохраняют линейную независимость и при $\lambda=0$.

В области 2 решение, четное относительно $z=0$, имеет вид

$$v_2 = \sum_{i=1}^3 c_{3+i} \frac{\text{ch } \mu_i z}{\text{ch } \mu_i} \quad (2.2)$$

$$\theta_2 = \sum_{i=1}^3 c_{3+i} (\mu_i^2 - k^2) (\lambda + \mu_i^2 - k^2) \frac{\text{ch } \mu_i z}{\text{ch } \mu_i}$$

где μ_i — корни уравнения

$$(\mu_i^2 - k^2)^3 + \lambda(1+P)(\mu_i^2 - k^2)^2 + \lambda^2 P(\mu_i^2 - k^2) + Rk^2 = 0 \quad (2.3)$$

В нечетном решении гиперболический косинус всюду нужно заменить гиперболическим синусом.

Граничные условия (1.6) на проницаемой перегородке определяют систему однородных алгебраических уравнений относительно шести комплексных коэффициентов c_i . Условия разрешимости этой системы определяют декременты λ .

3. При анализе решения рассматривались только нейтральные возмущения ($\lambda_i=0$). Как показал численный эксперимент, нейтральной устойчивостью обладают лишь монотонные возмущения ($\lambda_i=0$).

На фиг. 2 приведены нейтральные кривые для различных значений нормального и касательного сопротивлений (кривые 1-5 соответствуют сопротивлениям $\alpha=\beta=0, 10^2, 10^3, 10^4, \infty$). В случае полностью проницаемых перегородок (кривая 1) имеет место неустойчивость, при любых числах Рэлея абсолютная, относительно длинноволновых возмущений. С ростом сопротивления перегородок в области конечных волновых чисел устойчивость равновесия системы повышается, а при сопротивлении ~ 1000 на нейтральной кривой появляется минимум с $k=1,2$. При дальнейшем увеличении сопротивления абсолютная неустойчивость практически вырождается, а положение минимума нейтральной кривой остается неизменным.

В предельном случае твердых непроницаемых для жидкости границ ($\alpha=\beta\rightarrow\infty$) минимальное критическое число Рэлея равно 79,3, а волновое число равно 1,2. Заметим, что критические параметры здесь ниже, чем в задаче Рэлея с твердыми, хорошо проводящими тепло границами ($R_*=106, k_*=1,55$). Наблюдаемый эффект объясняется тем, что в рассматриваемом случае возмущения температуры оказываются локализованными не только в слое между твердыми границами, но и проникают во внешние слои жидкости, эффективно увеличивая размер области развития возмущений. Аналогичная ситуация имеет место в задаче о возникновении конвекции в горизонтальном слое жидкости, заключенном между твердыми массивами конечной теплопроводности [1], для которой критические параметры в случае одинаковой теплопроводности массивов и жидкости оказываются практически совпадающими с приведенными выше значениями. Такое совпадение связано, по-видимому, с тем, что во внешних изотермических слоях жидкости тепловые возмущения индуцируют движение жидкости слабо.

Расчет нейтральных кривых при $\beta>\alpha$ показал слабую их зависимость от величины касательного сопротивления. Отличие практически наблюдается лишь в области малого нормального сопротивления перегородок. Нейтральная кривая для $\alpha=0, \beta=\infty$ изображена на фиг. 2 штриховой линией. Остальные нейтральные кривые для $\beta=\infty$ в пределах точности построения рисунка совпадают с соответствующими кривыми при $\alpha=\beta$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. Бирих Р. В., Рудаков Р. Н. Влияние проницаемой перегородки на конвективную неустойчивость горизонтального слоя жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 1, с. 157-159.
3. Бирих Р. В., Рудаков Р. Н. Конвективная устойчивость горизонтального слоя жидкости с тонкой проницаемой произвольно расположенной перегородкой. — В сб.: Конвективные течения. Пермь, 1981, с. 12-17.

Пермь

Поступила в редакцию
21.V.1984

УДК 532.526.011:518.5

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ — СТОКСА В ОКРЕСТНОСТИ ЗАДНЕЙ КРОМКИ ПЛАСТИНЫ

БОГОЛЕПОВ В. В.

Появление локальной особенности в решениях для окрестности задней кромки пластины при до- или сверхзвуковом ее обтекании делает необходимым рассмотрение течения в локальной области, которая в первом приближении описывается уравнениями Навье — Стокса для несжимаемого газа. В работе получены численные решения для такой области как для тонкой пластины, так и для пластины с толщиной. Представлены картины линий тока, распределения функций течения по поверхности пластины и в следе за ней. Для пластины с конечной толщиной численное решение получено в широком диапазоне изменения местного числа Рейнольдса.

1. Решение для окрестности задней кромки пластины $x \sim O(1/Re)$ (число Рейнольдса Re_0 посчитано по параметрам набегающего потока и длине пластины) при до- или сверхзвуковом внешнем потоке и больших, но докритических числах Re_0 , получено в работах [1-3] соответственно. Оказалось, что в обоих случаях задняя кромка пластины обтекается без образования срывных зон, напряжение трения τ на поверхности пластины монотонно возрастает по мере приближения к задней кромке и соответственно на самой кромке приблизительно в 1,34 и 1,80 раза пре-