

УДК 532.516

УВЛЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ ДВИЖУЩЕЙСЯ ПОВЕРХНОСТЬЮ

БАЙКОВ В. И., ШУЛЬМАН З. П.

Изучению задачи захвата жидкости извлекаемой из нее поверхностью посвящены многие работы [1–5]. Все они используют развитую в [1–2] схему решения, которая ограничена требованием малости толщины h_0 увлеченной пленки по сравнению с капиллярной постоянной Лапласа. В данной работе изложен новый подход и на его основе решена задача увлечения стенкой вязкоупругой жидкости второго порядка.

1. Пусть вертикальная пластина непрерывно извлекается из ванны с жидкостью с постоянной скоростью U (фиг. 1). Из-за действия сил тягести пластина захватывает с собой лишь часть приводимой ею в движение жидкости. Поэтому на свободной поверхности жидкости существует линия зстоя h_s (перпендикулярная плоскости чертежа), где скорость равна нулю и происходит разветвление направления движения. Линии тока, проходящие через линию зстоя, отделяют пристеночную зону жидкости, уносимой стенкой, от остающейся в ванне.

Примем линию зстоя за начало отсчета и направим ось x вдоль направления движения стенки, а ось y — перпендикулярно к ней. Запишем уравнения движения и граничные условия

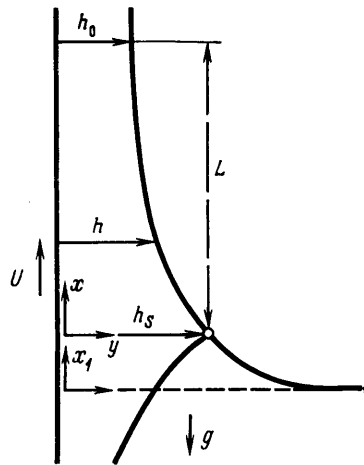
$$\frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - g + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial uv}{\partial x} + \frac{\partial v^2}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} \right) \quad (1.2)$$

$$p - p_0 = -\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right]^{-1/2} + \left[\tau_{xx} \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 + \tau_{yy} - 2\tau_{xy} \frac{dh}{dx} \right] \times \left[1 + \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right]^{-1} \quad (y=h) \quad (1.3)$$

$$\tau_{xy} \left[1 - \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right] = (\tau_{xx} - \tau_{yy}) \frac{dh}{dx} \quad (y=h) \quad (1.4)$$

$$u = U, \quad v = 0 \quad (y=0), \quad v = u \frac{dh}{dx} \quad (y=h) \quad (1.5)$$



Фиг. 1

Здесь u, v — составляющие скорости по осям x, y ; $\tau_{xx}, \tau_{xy}, \tau_{yy}$ — компоненты тензора напряжений; p — давление; $p_0 = \text{const}$ — давление в газе; ρ — плотность; g — ускорение свободного падения; σ — коэффициент поверхностного натяжения; h — координата свободной поверхности жидкости.

Из динамических условий (1.3), (1.4) получаем

$$p - p_0 = \tau_{yy} - \frac{dh}{dx} \tau_{xy} - \sigma \frac{d^2 h}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (y = h) \quad (1.6)$$

Проинтегрируем уравнение (1.2) по y от h до y и воспользуемся кинематическим равенством (1.5) и соотношением (1.6), тогда

$$p(x, y) = p_0 - \sigma \frac{d^2 h}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right]^{-1/2} + \tau_{yy} - \rho v^2 + \frac{\partial}{\partial x} \int_h^y (\tau_{xy} - \rho uv) dy \quad (1.7)$$

После подстановки (1.7) в (1.1) и последующего интегрирования по y от 0 до h с учетом условий (1.4), (1.5) найдем интегральный баланс количества движения

$$\begin{aligned} & h \frac{d}{dx} \left\{ \sigma \frac{d^2 h}{dx^2} \left[1 + \left(\frac{dh}{dx} \right)^2 \right]^{-1/2} \right\} - \rho g h - \tau_{xy} |_{y=0} + \\ & + \frac{d}{dx} \int_0^h [\tau_{xx} - \tau_{yy} - \rho(u^2 - v^2)] dy + \frac{d^2}{dx^2} \int_0^h \int_0^h (\tau_{xy} - \rho uv) d\eta dy = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Уравнение (1.8) в принципе позволяет определить форму свободной поверхности $h(x)$ жидкости и найти толщину увлеченной пленки h_0 . Однако практически это трудно разрешимая задача, поскольку весьма сложно априори указать распределение скоростей во всей области течения. Проведем возможные упрощения.

2. Область течения, ограниченную снизу плоскостью, перпендикулярной извлекаемой стенке, и стремящуюся вверх к постоянной толщине h_0 , назовем зоной динамического мениска. Очевидно, что длина L зоны динамического мениска значительно превышает ее ширину h_0 , тогда естественным образом появляется малый параметр $\varepsilon = h_0/L \ll 1$. Следовательно, изменение характеристик вдоль оси x гораздо слабее, чем в поперечном y направлении. Перепишем (1.8) в следующих безразмерных переменных:

$$\begin{aligned} & h^* \frac{\varepsilon^3}{Ca} \frac{d}{dx^*} \left\{ \frac{d^2 h^*}{dx^{*2}} \left[1 + \varepsilon^2 \left(\frac{dh^*}{dx^*} \right)^2 \right]^{-1/2} \right\} - T^2 h^* - \tau_{xy}^* |_{y=0} + \\ & + \varepsilon \frac{d}{dx^*} \int_0^{h^*} [\tau_{xx}^* - \tau_{yy}^* - T(\gamma Ca)^{1/2} (u^{*2} - \varepsilon^2 v^{*2})] dy^* + \\ & + \varepsilon^2 \frac{d^2}{dx^{*2}} \int_0^{h^*} \int_0^{h^*} [\tau_{xy}^* - \varepsilon T(\gamma Ca)^{1/2} u^* v^*] d\eta^* dy^* \end{aligned}$$

$$x^* = \frac{\varepsilon x}{h_0}, \quad y^* = \frac{y}{h_0}, \quad h^* = \frac{h}{h_0}, \quad u^* = \frac{u}{U}, \quad v^* = \frac{v}{\varepsilon U}, \quad \tau_{ik}^* = \frac{\tau_{ik} h_0}{\mu_c U}$$

$$Re = U h_0 \frac{\rho}{\mu_c} = T(\gamma Ca)^{1/2}, \quad Ca = \frac{\mu_c U}{\sigma} T = h_0 \left(\frac{\rho g}{\mu_c U} \right)^{1/2}, \quad \gamma = \sigma \rho^{1/2} (g \mu_c^4)^{-1/2}$$

где μ_c — характерная вязкость.

Пренебрежем здесь членами порядка ε^2 . Оценку капиллярной силы следует проводить весьма осторожно. Параметр Ca , стоящий в знаменателе сомножителя, при небольших скоростях извлечения может быть весьма мал. В общем случае различных значений Ca только силы поверхностного натяжения определяют форму поверхности в области застоя, где производится сшивка решений динамического и статического менисков. По этой причине, отбрасывая величины порядка ε^2 , приходится сохранять член, характеризующий поверхностное натяжение. Тогда для зоны динамического мениска получим уравнение, которое запишем в размерном виде

$$\sigma h \frac{d^3 h}{dx^3} - \rho g h - \tau_{xy} |_{y=0} + \frac{d}{dx} \int_0^h (\tau_{xx} - \tau_{yy} - \rho u^2) dy = 0 \quad (2.1)$$

Соотношение (1.6), которое понадобится в дальнейшем, также упрощается

$$p - p_0 = -\sigma \frac{d^2 h}{dx^2} + \tau_{yy} \quad (y=h) \quad (2.2)$$

3. Рассмотрим область течения, находящуюся ниже линии застоя и отделенную от пристеночной зоны линиями тока, проходящими через точки застоя. Здесь характерная скорость движения жидкости меньше скорости извлечения пластины, а характерный масштаб движения жидкости для случая широкой и глубокой ванны много больше толщины увлеченной пленки h_0 . Поэтому пространственные производные скоростей и напряжений будут значительно меньше, чем в области динамического мениска. Тогда в уравнениях (1.6), (1.8) можно пренебречь вязкими и инерционными членами по сравнению с силами поверхностного натяжения и тяжести и квалифицировать эту область течения как зону статического мениска. В результате

$$p - p_0 = -\sigma \frac{d^2 h}{dx_1^2} \left[1 + \left(\frac{dh}{dx_1} \right)^2 \right]^{-3/2} \quad (y_1=h) \quad (3.1)$$

$$\frac{d}{dx} \left\{ \sigma \frac{d^2 h}{dx_1^2} \left[1 + \left(\frac{dh}{dx_1} \right)^2 \right]^{-3/2} \right\} - \rho g = 0 \quad (3.2)$$

Здесь ради удобства последующего интегрирования введена система координат (x_1, y_1) , связанная с горизонтальной поверхностью жидкости (фиг. 1). Двукратное интегрирование (3.2) при граничных условиях горизонтальности поверхности жидкости вдали от пластины

$$\frac{d^2 h}{dx_1^2} \left[1 + \left(\frac{dh}{dx_1} \right)^2 \right]^{-3/2} \rightarrow 0, \quad \frac{dh}{dx_1} \rightarrow -\infty \quad (x_1 \rightarrow 0)$$

позволяет получить

$$\frac{dh}{dx_1} \left[1 + \left(\frac{dh}{dx_1} \right)^2 \right]^{-1/2} = \frac{\rho g}{2\sigma} x_1^2 - 1 \quad (3.3)$$

При неподвижной стенке для решения (3.3) следует ставить условие $h=0$ при $x_1=b$, где b (высота подъема жидкости по стенке под действием капиллярных сил) в случае полностью смачиваемой пластины определяется требованием $dh/dx_1=0$.

Движение пластины изменяет эти условия, поскольку извлеченная пленка отжимает статический мениск от стенки. Полагаем, что статический мениск примыкает к жидкой пленке толщиной h_0 , тогда

$$h=h_0, \quad \frac{dh}{dx_1} = 0 \quad (x_1=b) \quad (3.4)$$

Интегрируя уравнение (3.3) с применением (3.4), находим форму поверхности жидкости в зоне статического мениска

$$(h-h_0) \left(\frac{\rho g}{\sigma} \right)^{1/2} = \sqrt{2} - \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{2+1}}{\sqrt{2-1}} - \left(4-x_1^2 \frac{\rho g}{\sigma} \right)^{1/2} + \frac{1}{2} \ln \frac{2+(4-x_1^2 \rho g/\sigma)^{1/2}}{2-(4-x_1^2 \rho g/\sigma)^{1/2}} \quad (3.5)$$

4. Для определения толщины h_0 увлеченной пленки срастим решение (3.5) с решением (2.1). Очевидно, что на линии застоя h_s напряжение в жидкости, определяемое со стороны как динамической, так и статической зоны, должно быть одним и тем же. Тогда, приравняв правые части (2.2) и (3.1) и опуская член τ_{yy} , поскольку он на линии застоя того же порядка малости, что и члены, отброшенные в (3.1), получаем условие срачивания решений динамического и статического менисков

$$\frac{d^2 h}{dx^2} = -\frac{d^2 h}{dx_1^2} \left[1 + \left(\frac{dh}{dx_1} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (h=h_s) \quad (4.1)$$

Применим развитый подход для решения задачи увлечения вязкоупругой жидкости второго порядка [6]

$$\tau_{ik} = \mu A_{ik}^{(1)} + \beta_1 A_{im}^{(1)} A_{mk}^{(1)} + \beta_2 A_{ik}^{(2)} \quad (4.2)$$

Здесь $\mu > 0$, $\beta_1, \beta_2 < 0$ — материалы константы; $A_{ik}^{(1)}, A_{ik}^{(2)}$ — тензоры Ривлина — Эриксона. Из уравнения (4.2) и условий (1.5) следует

$$\tau_{xy} = \mu \frac{\partial u}{\partial y} \quad (y=0) \quad (4.3)$$

$$\tau_{xx} - \tau_{yy} = 4\mu \frac{\partial u}{\partial x} + 2\beta_2 \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2v \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right]$$

Анализ порядка величин в (4.3) показывает, что

$$\tau_{xy} = O\left(\frac{\mu U}{h_0} \right), \quad \tau_{xx} - \tau_{yy} = O\left(\frac{\beta_2 U^2}{h_0^2} \right) = O\left(We \frac{\mu U}{h_0} \right)$$

где $We = \beta_2 U / \mu h_0$ — число Вейссенберга.

Рассмотрим случай, когда We имеет самое большое порядок единицы, а отношение нормальных напряжений к силам инерции $We/Re = \beta_2 / \rho h_0^2 \gg 1$. Это означает, что в уравнении (2.1) инерционными силами допустимо пренебречь, а влияние нормальных напряжений можно рассматривать как возмущающий фактор. Тогда после подстановки (4.3) в (2.1) и выделения наиболее существенных членов получим

$$\sigma h \frac{d^3 h}{dx^3} - \rho g h - \mu \frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{y=0} - 2\beta_2 \frac{d}{dx} \int_0^h \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy = 0 \quad (4.4)$$

Исходя из следующего распределения скорости в области постоянной толщины h_0 пленки, аппроксимируем профиль скорости в зоне динамического мениска выражением (4.5)

$$u_0 = U - \frac{\rho g}{\mu} h_0^2 \left(\frac{y}{h_0} - \frac{y^2}{2h_0^2} \right), \quad Q = U h_0 - \frac{\rho g}{3\mu} h_0^3 \quad (4.5)$$

$$u = U - 3 \left(U - \frac{Q}{h} \right) \left(\frac{y}{h} - \frac{y^2}{2h^2} \right), \quad Q = \int_0^h u dy = \text{const}$$

Здесь Q – расход жидкости. Из (4.4), (4.5) приходим к дифференциальному уравнению для формы поверхности жидкости второго порядка в зоне динамического мениска

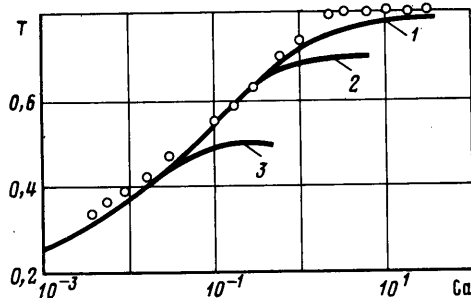
$$\sigma h^3 \frac{d^3 h}{dx^3} + (3h - h_s) \mu U - \rho g h^3 - 2\beta_2 U^2 \left(3 - \frac{h_s}{h} \right) \left(\frac{h_s}{h} - 1 \right) \frac{dh}{dx} = 0 \quad (4.6)$$

$$h_s = \frac{3Q}{U} = 3h_0 - \frac{\rho g h_0^3}{\mu U}$$

где h_s получено из (4.5) с учетом того, что на линии застоя h_s по определению $u=0$. Уравнение (4.6) следует интегрировать при граничных условиях

$$h \rightarrow h_0, \quad \frac{dh}{dx} \rightarrow 0, \quad \frac{d^2 h}{dx^2} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty) \quad (4.7)$$

Заметим, что и в (4.6), (4.7) для формы поверхности динамического мениска, и в решении (3.5) статической зоны фигурирует лишь одна неизвестная величина h_0 , для определения которой имеем условие срачивания (4.1).



Фиг. 2

На фиг. 2 представлены полученные путем расчета зависимости безразмерной толщины пленки $T = h_0 (\rho g / \mu U)^{1/2}$ от безразмерной скорости извлечения $Ca = \mu U / \sigma$ при значениях упругого фактора $\beta = \beta_2 (\rho g \sigma)^{1/2} / \mu^2$: 0; -0,1; -1 (кривые 1-3). Для ньютоновской жидкости ($\beta=0$) при $Ca > 3$ имеем $T \approx 0,8$ или $h_0 \approx 0,8 (\mu U / \rho g)^{1/2}$, т. е. поверхностное натяжение в этих условиях не проявляется. Если $Ca < 3$, то капиллярные силы существенно влияют на толщину пленки T . Упругие свойства жидкости играют двойную роль. С одной стороны, они уменьшают область скоростей извлечения Ca , где имеют значение силы поверхностного натяжения, с другой при малых Ca не влияют на толщину увлекаемой пленки.

На фиг. 2 приведено сравнение полученных теоретических результатов и имеющихся экспериментальных данных для ньютоновских жидкостей [7]. Наблюдается хорошее согласие между теорией и экспериментом во всем диапазоне скоростей извлечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. Собрание трудов. Т. 1. М.: Наука, 1969. 512 с.
2. Дерягин Б. В. О толщине слоя жидкости, остающегося на стенках сосудов после их опорожнения, и теория нанесения фотоэмульсии при поливе кинопленки. — Докл. АН СССР, 1943, т. 39, № 1, с. 11-14.
3. White D. A., Tallmadge J. A. Theory of drag out of liquids on flat plates. — Chem. Engng Sci., 1965, v. 20, № 1, p. 33-37.
4. Esmail M. N., Hummel R. L. Nonlinear theory of free coating onto a vertical surface. — A. I. Ch. E. Journal, 1975, v. 21, № 5, p. 958-965.
5. Буркина Р. С., Вилюнов В. Н. Асимптотика решения задачи увлечения жидкости движущейся пластинкой. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 6, с. 52-56.
6. Астарига Дж., Марруччи Дж. Основы гидромеханики неньютоновских жидкостей. М.: Мир, 1978. 309 с.
7. Spiers R. P., Subbaraman C. V., Wilkinson W. L. Free coating of a Newtonian liquid onto a vertical surface. — Chem. Engng. Sci., 1974, v. 29, № 2, p. 389-396.

Минск

Поступила в редакцию
2.IV.1984