МЕХАНИКА
ЖИДКОСТИ И ГАЗА
№ 4 · 1985

УДК 533.6.011.72

ОБ ЭВОЛЮЦИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ, РАСХОДЯЩИХСЯ ПО НАГРЕТОМУ ГАЗУ

МАКАРОВ С. Н., ФИЛИППОВ Б. В.

Поведение слабых цилиндрических и сферических волн конечной амплитуды в диссипативном газе описывается вблизи волнового фронта обобщенным уравнением Бюргерса [1]. Известно построение различных типов решения для этого уравнения при больших числах Рейнольдса [1–3]. При эволюции возмущений, расходящихся по нагретому газу, представляет интерес исследование данного уравнения в области $\mathrm{Re} \lesssim 1$, где Re – эффективное число Рейнольдса в начальный момент времени. Непосредственное применение метода последовательных приближений к указанной задаче ограничивается условием $\mathrm{Re} \ll 1$ и с ростом числа Рейнольдса и усложнением формы начальной волны становится все более затруднительным.

В настоящей работе в явном виде строится приближенное решение задачи Коши для обобщенного уравнения Бюргерса в случае цилиндрической симметрии в области $\mathrm{Re} \lesssim 1$. В качестве начальной волны выбирается произвольное возмущение, представленное абсолютно интегрируемой на вещественной оси функцией. Приводится интегральная оценка погрешности в зависимости от величины Re. Обсуждается вопрос о соответствии структуры решения преобразованию Коула – Хопфа. Все рассуждения, изложенные ниже, без труда переносятся на сферически-симметричный случай.

1. Рассматривается поведение одномерных расходящихся волн конечной амплитуды в вязком теплопроводном газе. Пусть ρ_0 и $e_0 = u_0^2$ – невозмущенные плотность и удельная внутренняя энергия, l – характерная длина волны, ε – малый параметр, который может быть определен как отношение характерного периода волны к характерному времени задачи. Обобщенное уравнение Бюргерса [1, 2] применительно к решению задачи Коши для расходящихся волн представим в безразмерном виде

$$
\begin{gathered}
v_\tau + \frac{pv}{2(\tau+1)} + vv_\theta - \Gamma v_{\theta\theta} = 0, \qquad \tau \geqslant 0, \qquad p = 1, 2 \\
t = \frac{u_0 \varepsilon t'}{l}, \qquad \theta = \frac{r'}{l} - \frac{z_0 t}{\varepsilon}, \qquad \tau = \frac{(\gamma+1)t}{2\tau_0} - 1 \qquad (1.1) \\
v = \frac{\tau_0 u'}{\varepsilon u_0}, \qquad \Gamma = \frac{\tau_0 b}{(\gamma+1)\rho_0 u_0 l \varepsilon}, \qquad z_0 = \sqrt{\gamma(\gamma-1)}, \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v}
\end{gathered}
$$

Здесь b – диссипативный коэффициент [1], размерные величины обозначены штрихом. Начальному моменту времени τ_0 при постановке задачи Коши соответствует $\tau=0$. Область задания начального условия $u'(r')$, $r' \geqslant 0$, отвечает в переменных θ, τ области $-2z_0\tau_0/(\gamma+1)\varepsilon \leqslant \theta$, при $\varepsilon \ll 1$ можно считать, что $\theta \in \mathbf{R}$.

С помощью замены [1] $v = w/\sqrt{\tau+1}$, $z = 2\sqrt{\tau+1}$ уравнение (1.1) в случае цилиндрической симметрии приводится к квазиплоскому виду

$$
w_z + ww_\theta - {}^1/_2 \Gamma z w_{\theta\theta} = 0, \quad z \geqslant 2 \qquad (1.2)
$$

Предположим, что начальное возмущение $w(\theta, z=2)$ достаточно быстро убывает при $|\theta| \to \infty$ ($u' \to 0$, $r' \to 0$, ∞). Рассмотрим некоторую нелинейную фурье-замену неизвестной функции для (1.2)

$$w(\theta, z)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int\exp(i\theta(k_1+\ldots+k_n))\times$$

$$\times G_n(k_1,\ldots,k_n,z)P(k_1,z)\ldots P(k_n,z)\,dk_1\ldots dk_n \qquad (1.3)$$

Здесь $P(k, z)$ играет роль новой неизвестной функции, G_n, $n\geqslant1$,— коэффициенты замены. Потребуем, чтобы уравнение (1.2) было линейным эволюционным уравнением в терминах $P(k, z)$. Тогда, подставляя (1.3) в (1.2) и формально приравнивая нулю коэффициенты подынтегральных выражений в каждом из n-кратных интегралов, имеем

$$n=1:\quad P_z+{}^1/_2\Gamma zk^2P=0,\quad P(k,z)=\exp(-{}^1/_4z^2k^2\Gamma)P_0 \qquad (1.4)$$

$$n\geqslant1:\quad G_{n_z}(k_1,\ldots,k_n,z)+\frac{\Gamma z}{2}\left(\sum_{i\neq j}^{n}k_ik_j\right)G_n(k_1,\ldots,k_n,z)=$$

$$=-iG_m(k_1,\ldots,k_m,z)[k_1+\ldots+k_m]G_{n-m}(k_{m+1},\ldots,k_n,z),\quad G_1(k_1)=k_1 \qquad (1.5)$$

По повторяющемуся индексу $1\leqslant m<n$ здесь и ниже производится суммирование. Начальное условие $w(\theta, 2)$ однозначно определяет функцию $P_0(k)$ при фиксированных значениях набора $G_n(k_1,\ldots,k_n,z=2)$, $n\geqslant1$, выбор которого можно осуществить, исходя из соображений удобства.

Согласно (1.3), коэффициенты G_n симметричны относительно перестановок аргументов $k_1,\ldots,k_n$, а уравнения (1.5), которыми они описываются, определены с точностью до произвольной, антисимметричной хотя бы по одной перестановке набора $k_1,\ldots,k_n$ функции. Несложно проверить, что правую часть (1.5) с точностью до антисимметричной по циклической перестановке аргументов функции можно представить в виде

$$-iG_m[k_1+\ldots+k_m]G_{n-m}=-{}^1/_2i(k_1+\ldots+k_n)G_nG_{n-m} \qquad (1.6)$$

При достаточно больших Γ и $z\geqslant2$ производной в левой части (1.5) можно пренебречь. В этом случае алгебраическая цепочка уравнений (1.5), (1.6) допускает явное решение

$$G_n^\circ=\frac{(-i/\Gamma z)^{n-1}}{n}(k_1+\ldots+k_n),\qquad n\geqslant1 \qquad (1.7)$$

Подстановка (1.4), (1.7) в (1.3) с последующим суммированием ряда дает

$$w^\circ(\theta,z)=Q_\theta\left(1-\frac{Q}{\Gamma z}\right)^{-1}$$

$$Q(\theta,z)=-i\int_{\mathbf{R}}\exp\left(i\theta k-\frac{\Gamma z^2k^2}{4}\right)P_0(k)\,dk \qquad (1.8)$$

где функция Q является решением уравнения теплопроводности с переменным коэффициентом диффузии, равным ${}^1/_2\Gamma z$.

Перейдем в (1.8) к физическим переменным τ, $v^\circ(\theta,\tau)$

$$v^\circ=\frac{Q_\theta}{\sqrt{\tau+1}}\left(1-\frac{Q}{2\Gamma\sqrt{\tau+1}}\right)^{-1},\qquad Q_\tau-\Gamma Q_{\theta\theta}=0 \qquad (1.9)$$

и коротко обсудим полученный результат.

Выражение (1.9) является приближенным решением задачи Коши для уравнения (1.1) ($p=1$) при выполнении введенных ранее ограничений на начальное условие. Степень нелинейности (1.9) характеризуется отклонением знаменателя в формуле для $v^\circ(\theta, \tau)$ от 1; при $\tau \to \infty$ или $|Q| \ll 1$, что соответствует малым амплитудам, (1.9) переходит в решение линеаризованного уравнения (1.1). За исключением множителей $1/\sqrt{\tau+1}$, выражение (1.9) структурно идентично решению обычного уравнения Бюргерса, записанному в форме Коула – Хопфа; подробнее этот вопрос рассмотрен ниже. Условие вывода (1.8) содержит два момента: с одной стороны, отбрасывание производной G_{nz} осуществляется в предположении малых чисел Рейнольдса, с другой стороны, в правой части (1.3) учитываются, согласно (1.7), все члены последующего нелинейного разложения (по степеням числа Рейнольдса). При $\mathrm{Re} \to 0$ такой учет является излишним, при $\mathrm{Re} \leqslant 1$, напротив, играет в данной конкретной задаче основную роль.

2. Рассмотрим оценку величины погрешности для (1.9). Величина невязки L уравнения (1.1), получающаяся после подстановки (1.9), в точности равна производной v_τ°, взятой в предположении, что в определении (1.9) фиксированы все величины, кроме $1/\sqrt{\tau+1}$ в нелинейной части знаменателя. Допустим также, что выполняется неравенство

$$V^\circ(\theta, \tau) = \int\limits_\theta^\infty v^\circ(\theta, \tau)\, d\theta \geqslant 0, \qquad \theta \in R, \qquad \tau \geqslant 0$$

имеющее место в большинстве физически интересных случаев. После несложных преобразований находим

$$L = -\frac{1}{2(\tau+1)} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(V^\circ(\theta, \tau) + 2\Gamma \left(\exp\left(-\frac{V^\circ}{2\Gamma} \right) - 1 \right) \right) \tag{2.1}$$

Отметим, что величина невязки не более чем линейна по $v^\circ(\theta, \tau)$. Количественно ее можно оценить исходя из закона сохранения. При условии, что $V(\tau) = V(\theta = -\infty, \tau)$, $V_0 = V(\tau = 0)$, закон сохранения точного уравнения (1.1) [2] и закон сохранения (1.1) с учетом невязки имеют соответственно вид

$$V_\tau + \frac{V}{2(\tau+1)} = 0, \qquad V = \frac{V_0}{\sqrt{\tau+1}} \tag{2.2}$$

$$V_\tau^\circ + \frac{\Gamma}{\tau+1} \left(1 - \exp\left(-\frac{V^\circ}{2\Gamma} \right) \right) = 0, \qquad V^\circ = 2\Gamma \ln\left(1 + \frac{c}{\sqrt{\tau+1}} \right) \tag{2.3}$$

Постоянную c можно определить из условия совпадения (2.2), (2.3) при $\tau = 0$: $c = \exp(\mathrm{Re}) - 1$, где $\mathrm{Re} = V_0/2\Gamma$ – эффективное число Рейнольдса при $\tau = 0$.

Точное решение нелинейного уравнения (1.1) и приближенное нелинейное решение (1.9) имеет смысл рассматривать на таких временах τ, когда амплитуды волн все еще не слишком малы по сравнению с начальными. Введем поэтому величину погрешности $N(\tau)$ как разность площадей под графиками приближенного и точного решений (1.1), отнесенную к начальной площади: $N(\tau) = (V^\circ(\tau) - V(\tau))/V_0$. Подставляя сюда выражения (2.2), (2.3), находим, что максимальное значение $N(\tau)$ при фиксированном Re составляет

$$N^*(\mathrm{Re}) = \frac{1}{\mathrm{Re}} \ln \frac{M}{\mathrm{Re}} + \frac{1}{M} - \frac{1}{\mathrm{Re}}, \qquad M = \exp(\mathrm{Re}) - 1 \tag{2.4}$$

$$0 \leqslant V^\circ(\tau) - V(\tau) \leqslant V_0 N^*(\mathrm{Re}), \qquad \tau \geqslant 0 \tag{2.5}$$

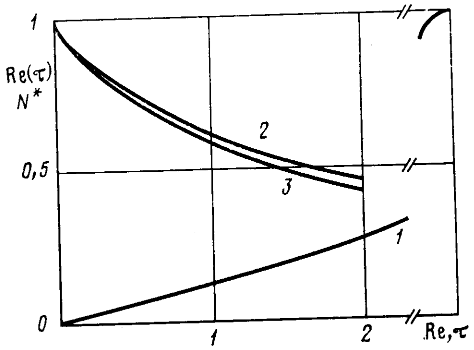
График функции $N^*(\mathrm{Re})$ изображен на фигуре (кривая *1*). Из анализа (2.5) и фигуры следует, что приближенное решение (1.9) справедливо при малых числах Рейнольдса и дает качественно верное описание при числах Рейнольдса $\mathrm{Re} \leqslant 1$; например, при $\mathrm{Re} = 1$ максимальная по τ абсолютная погрешность не превосходит 12% от первоначального значения V_0, а при $\mathrm{Re} = 1/2$ – 6%. При $0 \leqslant \mathrm{Re} \leqslant 2$ $N^*(\mathrm{Re}) \sim \mathrm{Re}/8$ с хорошей точностью.

3. Возвратимся к замечанию о структуре решения (1.9). Осуществим в (1.1) замену Коула – Хопфа:

$$\varphi(\theta, \tau) = \exp\left(\frac{V(\theta, \tau)}{2\Gamma} \right) = 1 - \frac{Q}{2\Gamma\sqrt{\tau+1}} \tag{3.1}$$

$$Q_\tau - \Gamma Q_{\theta\theta} = \frac{\Gamma\varphi \ln \varphi}{\sqrt{\tau+1}} + \frac{Q}{2(\tau+1)} \tag{3.2}$$

Разлагая в уравнении (3.2) правую часть в ряд по $Q/2\Gamma\sqrt{\tau+1}$, в первом приближении имеем $Q_\tau - \Gamma Q_{\theta\theta} = 0$, и соотношение (1.9) выполняется. Количественным оправданием сохранения точного определения (3.1) при приближенном решении (3.2) служат формулы (2.4), (2.5). Согласно п. 2, выражение (1.9) отражает скорее процесс доминирования диссипативного затухания над геометрическим: $\sqrt{\tau+1}\,|Q_\tau| \gg |Q|/2\sqrt{\tau+1}$, чем малость самой «амплитуды» V_0; хотя с ее ростом радиальные эффекты, конечно, усиливаются и прямую роль начинает играть число Рейнольдса Re. Поэтому как непосредственный вывод (1.9), так и возможный учет следующих поправок более предпочтительны на основе решений системы (1.5), поскольку последние зависят только от диссипативных и геометрических (Γ, z) и не зависят по определению от амплитудных характеристик волны.



Рассмотрим в качестве примера поведение цилиндрической N-волны с прямым порядком следования фаз при сравнительно малых Re. Выбирая $Q = -(2a\Gamma/\sqrt{\tau+1})\exp(-\theta^2/4\Gamma(\tau+1))$ и определяя постоянную a по начальному условию V_0^+, имеем

$$v^\circ = \frac{\theta}{\tau+1}\left(1 + \frac{\exp(\theta^2/4\Gamma(\tau+1))}{\exp(\mathrm{Re}(\tau))-1}\right)^{-1}$$

$$\mathrm{Re}(\tau) = \ln\left(1 + \frac{\exp(\mathrm{Re})-1}{\tau+1}\right) \qquad (3.3)$$

Здесь $\mathrm{Re}(\tau)$ — эффективное число Рейнольдса. Графики функции $\mathrm{Re}(\tau)$, вычисленной согласно (3.3) и путем непосредственного численного интегрирования (1.1) [4], приведены при Re=1 на фигуре (кривые *2*, *3*).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Руденко О. В., Солуян С. И.* Теоретические основы нелинейной акустики. М.: Наука, 1975. 287 с.
2. *Лейбович С., Сибасс Р.* Примеры диссипативных и диспергирующих систем, описываемых уравнениями Бюргерса и Кортевега – де Вриза.– В кн.: Нелинейные волны. М.: Мир, 1977, с. 113–150.
3. *Васильева О. А., Карабутов А. А., Лапшин Е. А., Руденко О. В.* Взаимодействие одномерных волн в средах без дисперсии. М.: Изд-во МГУ, 1983. 151 с.
4. *Sachdev P. L., Seebass R.* Propagation of spherical and cylindrical N-waves.— J. Fluid Mech., 1973, v. 58, № 1, p. 197–205.

Ленинград

Поступила в редакцию 3.III.1984