

УДК 533.6.011:537.84

ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕЖИМОВ В СТАЦИОНАРНЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ МГД-ТЕЧЕНИЯХ ВСЛЕДСТВИЕ ВЫКЛЮЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ СРЕДЫ

БАРМИН А. А., ГЛИНОВ А. П., КУЛИКОВСКИЙ А. Г.

Исследуются особенности сверхзвуковых магнитогидродинамических (МГД) течений, обусловленных обращением в нуль электропроводности газа вследствие его охлаждения. Рассмотрение ведется на примере истечения газа из расширяющегося сопла с вмороженным в него вначале магнитным полем ($Re_m \gg 1$), перпендикулярным плоскости течения.

Аналитически на основе качественной модели [1] и в результате численного эксперимента показано, что наряду со стационарным течением имеет место периодический режим, когда от проводящей области, расположенной в верхней части сопла, периодически отделяется слой нагретого газа типа электрической дуги. Между этим слоем и проводящим газом в начальном участке образуется зона газодинамического течения с однородным магнитным полем, отличным от поля на выходе из сопла. После выхода слоя из сопла процесс повторяется.

Установлено, что возникновение таких слоев происходит в результате развития перегретой неустойчивости в областях с малой электропроводностью, в которых температура примерно постоянна из-за конкуренции процессов джоулева нагрева и охлаждения вследствие расширения. Периодические режимы возникают при магнитных полях на выходе из сопла, как больших, так и меньших начального, когда в стационарном течении имеются указанные изотермические зоны.

Образование периодических режимов при стационарных МГД-течениях в сопле Лавала, когда проводимость газа растет от малой величины на входе вследствие джоулева нагрева, наблюдалось в численных экспериментах [2, 3]. По-видимому, возникающие здесь колебания обусловлены граничным условием. Возникновение узких хорошо проводящих слоев плазмы в результате начального возмущения температуры в непроводящем газе наблюдалось ранее при численном исследовании одномерных течений в импульсном ускорителе [4-6].

1. Постановка задачи. Рассмотрим течение проводящего газа в плоском расширяющемся канале при наличии электромагнитного поля, когда электропроводность газа является заданной функцией температуры $\sigma = \sigma(T)$, причем $\sigma = 0$ при $T < T_*$. В случае, когда в основной части канала поперечные градиенты параметров малы, а вклад от скачков параметров вблизи стенок несуществен, исследование течения можно проводить в квазиодномерном приближении [7]. Стенки канала предполагаются идеально проводящими, а вязкость, теплопроводность и потери на излучение не учитываются. Не учитывается также энергия ионизации, что справедливо при малой степени ионизации. Пусть скорость течения u , напряженности электрического E и магнитного поля H направлены соответственно вдоль осей x , y , z , тогда система уравнений, описывающая такое течение, имеет вид [7, 8]

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho b}{\partial t} + \frac{\partial \rho u b}{\partial x} &= 0 \\ \rho \frac{\partial u}{\partial t} + \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (Hb) + \frac{\partial}{\partial x} (cEb) &= 0 \\ \frac{c}{4\pi} \frac{\partial H}{\partial x} &= -\sigma E', \quad E' = cE - uH \\ \rho \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \rho u \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \frac{p}{b} \frac{\partial ub}{\partial x} &= \sigma (E')^2 \\ p &= R\rho T, \quad \varepsilon = c_v T \end{aligned}$$

Здесь E' — собственное электрическое поле, b — ширина канала вдоль оси u , остальные обозначения общеприняты.

Будем рассматривать сверхзвуковое течение газа, тогда во входном ($x=0$) и выходном ($x=L$) сечениях канала заданы следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} x=0: \quad \rho &= \rho_0, \quad p = p_0 = R\rho_0 T_0, \quad H = H_0 \\ u &= u_0 > \sqrt{\gamma p_0 / \rho_0 + H_0^2 / 4\pi \rho_0} = a_+ \\ x=L: \quad H &= H_b \end{aligned}$$

При численном анализе нестационарных течений начальные условия задавались относительно произвольно, но согласованно с граничными условиями и обеспечивали разгон газа.

Для простоты аналитического анализа ограничимся случаем больших значений магнитных чисел Рейнольдса, когда можно считать, что выключение проводимости происходит в узких по сравнению с характерным линейным размером задачи зонах, фронтах рекомбинации [9].

2. Стационарные режимы течения. Построим сначала стационарные решения поставленной задачи. В этом случае систему запишем в следующем безразмерном виде:

$$ub/V = m = 1, \quad cEb = e = \text{const} \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{b^2} \frac{dV}{dx} + \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\gamma M_0^2} \frac{T}{V} + \frac{H^2}{8\pi} \right) = \frac{V}{b^2} \frac{d \ln b}{dx} \quad (2.2)$$

$$\frac{dH}{dx} = \text{Re}_m \frac{\sigma(T)}{b(x)} [HV - e], \quad \text{Re}_m = \frac{4\pi u_0 \sigma_0 L}{c^2} \quad (2.3)$$

$$\frac{T}{(\gamma-1)M_0^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{V}{b} \right)^2 + \frac{e}{4\pi} H = \varepsilon = \text{const} \quad (2.4)$$

Здесь V — удельный объем, величины u , V , T , b , σ отнесены к своим значениям u_0 , V_0 , T_0 , b_0 , $\sigma_0 = \sigma(T_0)$ в некотором, например начальном, сечении, H , E — к $u_0 \sqrt{V_0}$, x — к L .

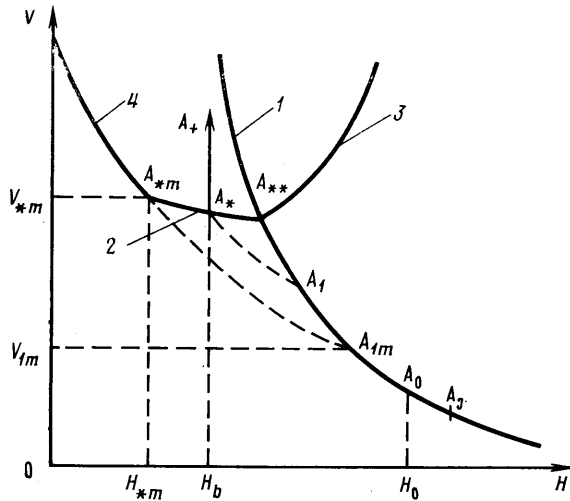
При исследовании сформулированной задачи весь канал можно разбить на несколько областей, в каждой из которых характер течения и изменения поля различен.

В начальной области I происходит плавное расширение газа, его охлаждение и вследствие этого медленное уменьшение его проводимости. Протяженность этой области L_1 определяется, в частности, углом расширения канала и может быть достаточно большой ($L_1 \sim L$). Предполагая начальную скорость газа и его проводимость большими, будем считать, что в области I магнитное число Рейнольдса $\text{Re}_m = 4\pi \sigma_0 u_1 L_1 / c^2 \gg 1$. В этом случае левой частью в уравнении (2.3) можно пренебречь, в результате получим интеграл в замороженности

$$HV = e = \text{const} \quad (2.5)$$

С помощью его магнитное поле можно исключить из уравнений (2.2) и (2.4) и получить изменение газодинамических величин вдоль канала, которое будет таким же, как в газовой динамике, но с измененным уравнением состояния [8]. Так как рассматриваются сверхзвуковые течения, то с расширением канала будет происходить разрежение и охлаждение потока.

В области II температура близка к T_* , так что проводимость мала и необходимо учитывать диссипацию. Ширина этой области L_2 определяется граничными условиями и характером зависимости $\sigma(T)$. При сделанных



Фиг. 1

предположениях L_2 может быть малой по сравнению с L_1 , так что в области II можно не учитывать изменение поперечного сечения канала и считать течение строго одномерным. Тогда, пренебрегая в уравнении (2.2) db/dx , получим

$$\frac{V}{b_x^2} + \frac{T}{V} \frac{1}{\gamma M_0^2} + \frac{H^2}{8\pi} = \tau(b_x) \equiv \text{const} \quad (2.6)$$

где b_x — значение b в рассматриваемом сечении.

Анализ таких течений [9, 10] показывает, что в них происходит разрежение потока, температура падает до T_* и при этом электропроводность становится равной нулю. С точки зрения масштаба L_1 область II является разрывом — фронтом сверхбыстрой рекомбинации. Соотношениями на таком разрыве будут (2.1), (2.4), (2.6), в которых $b = b_1 = \text{const}$, соответствующей положению фронта в канале, и дополнительное условие $T = T_*$. Здесь величины без индексов соответствуют состоянию за разрывом, а константы определены по состоянию перед ним (индекс 1). При этом абсолютная скорость разрыва $D_r = u_1 + mb_1 V_1$.

Анализ решений удобно провести на плоскости HV . Течению в области I соответствует часть гиперболы (2.5) (линия 1 на фиг. 1), лежащей выше точки Жуге A_J , в которой $D_r = u + a_+$. При этом для заданного канала и начальных данных каждой точке гиперболы будет отвечать свое сечение (т. е. значение x). Если в каком-то сечении канала возникает фронт рекомбинации, то состоянию за ним будет отвечать точка A_* , определяемая соотношениями (2.4), (2.6) и условием $T = T_*$. Совокупность таких точек образует отрезок A_*A_{**} линии 2 на фиг. 1, на которой $T = T_*$. Точке A_{**} в зависимости от начальных данных отвечает либо волна рекомбинации Жуге ($A_J A_{J*}$), либо рекомбинация максимальной интенсивности ($A_1 A_{1m}$). При этом из сечений канала выше по потоку, чем сечение, отвечающее

A_{1m} (отрезок гиперболы A_0A_{1m}), скачок рекомбинации невозможен, так как в силу законов сохранения (2.4), (2.6) температура за такими разрывами при любом скачке H больше температуры выключения проводимости T_* .

Точка A_{**} соответствует волне рекомбинации нулевой интенсивности, т. е. случаю, когда проводимость падает до нуля в непрерывном течении.

Легко построить решение всей задачи, когда значение магнитного поля на выходе из сопла H_b удовлетворяет условию $H_{**} < H_b < H_{**}$, где H_{**} и H_{**} — значение поля в точках A_{**} и A_{**} соответственно. В этом случае решение состоит из течения в области I (отрезок A_0A_1 гиперболы I), скачка рекомбинации (переход A_1A_{1+} , соответствующий течению области II) и сверхзвукового газодинамического течения в расширяющемся канале, которое для простоты рассматривается как расчетное (отрезок $A_{1+}A_{1+}$ вертикальной прямой $H=H_b$). При этом местоположение фронта рекомбинации, т. е. точки A_1 , определяется из условия $H(A_{1+})=H_b$ с помощью соотношений (2.2) и (2.4).

При $H_b \rightarrow H_{**}$ интенсивность фронта рекомбинации стремится к нулю. При уменьшении H_b интенсивность волны рекомбинации растет и она перемещается вверх по потоку (точка A_1 движется вниз по гиперболе I). При этом в зависимости от начальных данных волна становится либо волной Жуге ($A_1=A_J$), расположенной в критическом сечении канала, либо волной максимальной интенсивности ($A_1=A_{1m}$).

Для построения решения в случае $H_b > H_{**}$ или $H_b < H_{**}$ проанализируем качественно поле интегральных кривых системы (2.2)–(2.4). Запишем уравнения (2.2) и (2.4) в виде

$$\frac{M^2-1}{M^2} \frac{dV}{dx} = \frac{V d \ln b}{dx} - \frac{Re_m}{4\pi u} [\gamma HV - (\gamma-1)e] [HV - e] \sigma(T) \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{dT}{\gamma-1} &= \frac{\gamma M_0^2}{4\pi} [HV - e] \frac{dH}{V} + T d \left(\frac{1}{V} \right) = \\ &= \frac{M^2}{M^2-1} \left\{ \frac{\gamma M_0^2}{4\pi} \left[HV - \left(1 - \frac{1}{\gamma M^2} \right) e \right] \frac{dH}{V} - \frac{T}{V} d \ln b \right\} \end{aligned} \quad (2.8)$$

В случае плавного расширяющегося канала и больших чисел Re_m величина $k/Re_m \ll 1$, так что изоклины уравнения (2.7) в рассматриваемой области $u > a_+$ лежат при $\sigma(T) \sim 1$ в окрестности поверхностей (2.5) и $\gamma HV = (\gamma-1)e$, а при $\sigma(T) \sim k/Re_m$ в окрестности $\sigma(T)=0$, т. е. $T=T_*$. Изоклины уравнения (2.3) — поверхности (2.5) и $T=T_*$. Отметим, что проекция изоклины уравнения (2.8) пересекает линию $T(\sigma H) = T_*$ в окрестности точек A_{**} и A_{**} . Первое очевидно. В т. A_{**} $T=T_*=T_m = \min T$ вдоль кривой, задаваемой (2.4) и (2.6). Отсюда можно найти, что

$$HV - e(1 - 1/\gamma M^2) = 0 \quad (2.9)$$

т. е. множитель перед dH в (2.8) обращается в нуль. Картина проекций интегральных кривых на плоскость HV представлена на фиг. 2.

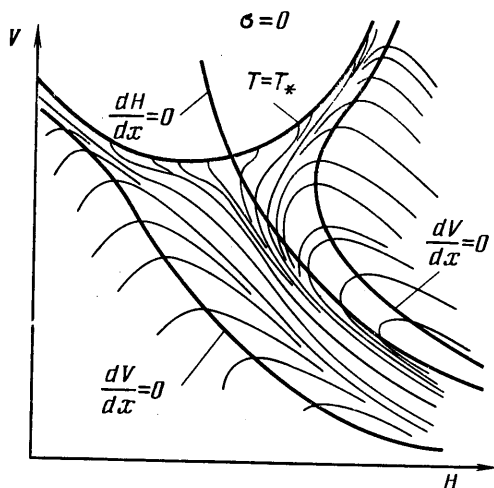
Из изложенного следует, что существует два пучка интегральных кривых, расположенных между линиями $T(H, V) = T_*$ и изоклинами уравнения (2.7), вдоль которых температура почти постоянна и близка к температуре включения ($T \approx T_*$). Этим интегральным кривым соответствуют течения, в которых происходит расширение газа и его проводимость остается малой. Протекающий по газу электрический ток за счет джоулевой диссипации поддерживает температуру почти постоянной, несмотря на расширение газа. При этом течение будет тем ближе к изотермическому, чем круче зависимость $\sigma = \sigma(T)$ и больше Re_m , т. е. чем ближе изоклины уравнения (2.7) к линии $T(V, H) = T_*$ и к гиперболе (2.6).

Из поля интегральных кривых и сказанного выше следует, что при $Re_m \rightarrow \infty$ существуют две предельные интегральные кривые, описывающие предельное изотермическое течение Батлера. Одна начинается в т. A_{**} , и вдоль нее, согласно (2.8), с расширением канала магнитное поле растет.

Вторая начинается в т. A_{*m} , и вдоль нее магнитное поле убывает. Таким образом, изотермическое течение может следовать только за фронтом рекомбинации нулевой или максимальной интенсивности. Отметим, что фронты рекомбинации промежуточной интенсивности являются неэволюционными как переходы от идеально проводящего газа к изотермическому течению. Действительно, фронт рекомбинации рассматриваемого типа (сверхбыстрый) должен удовлетворять условию $u > a_{*+}$, где a_{*+}^2 — большой корень уравнения

$$\frac{\gamma M_0^2}{T} a_{*+}^2 - \frac{H}{e - HV} a_{*+} - 1 = 0 \quad (2.10)$$

Из (2.9), (2.10) следует, что скорость газа в т. A_{*m} равняется a_{*+} , т. е. волна рекомбинации максимальной интенсивности является волной Жуге относительно изотермического течения. При этом для более слабых фронтов



Фиг. 2

рекомбинации $u < a_{*+}$, т. е. они не эволюционны. В случае т. A_{**} идеальное течение непрерывно переходит в изотермическое. Можно показать, что граница между этими течениями — непрерывный фронт рекомбинации — эволюционна, когда $u < a_{*+}$, т. е. такой переход может иметь место. В случае нестационарных автомодельных задач такие изотермические течения рассматривались ранее в [10–12].

Связь между H и V в изотермических течениях соответственно для $H < H_{*m}$ и $H > H_{**}$ получим, интегрируя (2.8) при $T = T_* = \text{const}$ и удовлетворяя условиям прохождения кривых через точки A_{*m} и A_{**} .

$$\frac{\alpha^2}{V} = \left(\frac{\beta H_{*m}}{\gamma - 1} - 1 \right) \exp \beta (H - H_{*m}) + \beta H + 1, \quad H \leq H_{*m} \quad (2.11)$$

$$\frac{\alpha^2}{V} = - \exp \beta (H - H_{**}) + \beta H + 1, \quad H \geq H_{**} \quad (2.12)$$

$$\alpha^2 = \frac{e^2 \gamma M_0^2}{4\pi T_*}, \quad \beta = \frac{e \gamma M_0^2}{4\pi T_*}$$

Решениям (2.11), (2.12) соответствуют на фиг. 1 линии 3 и 4. Заметим, что изменение магнитного поля для (2.11) ограничено некоторой величиной H_{\max} , соответствующей обращению плотности газа в 0.

перемещения пропорциональна скорости изменения магнитного поля $D_r = -K(A_*)dH/dt$. Функцию $K(A_*)$ можно вычислить, используя соотношения (2.4), (2.6) и распределение параметров по длине канала в идеальном МГД-течении. Для дальнейшего существенно, что $K(A_*) \geq 0$, причем знак равенства имеет место в т. A_{*m} , т. е. в этой точке фронт рекомбинации неподвижен. Неотрицательность $K(A_*)$ легко следует из фиг. 1. Действительно, увеличение магнитного поля за волной рекомбинации приводит к перемещению т. A_1 , соответствующей состоянию перед фронтом, вверх по гиперболе 1, т. е. к увеличению V_1 , и тем самым перемещению вниз по каналу. Изменение площади непроводящей области IIIa определяется соотношением

$$\frac{dS}{dt} = u_2 b_2 - D_r b_1$$

где u_2 — скорость токового слоя, движущегося вместе со средой. Используя это соотношение и выражение для D_r , представим уравнение (3.1) в виде

$$\begin{aligned} a_1(\Delta H) \frac{d\Delta H}{dt} &= (H_b - \Delta H) \left(\frac{u_2}{u_1} a_2 - 1 \right) - \frac{\Delta H}{\text{Re}_m(\Delta T)} \\ \Delta H &= H_b - H, \quad \Delta T = (T - T_*)/T_* \\ a_2(\Delta H) &= \frac{S + (1-H)b_1 K(H_1, b_1)}{b_1 l}, \quad \tau = \frac{tu_1}{l} \\ \text{Re}_m(\Delta T) &= \frac{4\pi l u_1 \sigma(\Delta T)}{c^2}, \quad \text{Re}_m(0) = 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь магнитное поле отнесено к H_1 — полю перед фронтом рекомбинации. Так как в волне рекомбинации H убывает ($H(A_*) < H(A_1) = H_1$ (фиг. 1)), а $K(H, b_1) \geq 0$, то $a_1 > 0$.

Вследствие перепада магнитного давления на токовом слое последний действует на среду как поршень, тормозящий течение при $H_b > H$ или ускоряющий при $H_b < H$. Остановимся на первом случае. Перед токовым слоем образуется волна сжатия, которая со временем превратится в ударную волну. Применим закон сохранения импульса к газу, находящемуся в объеме $A_1 B_1 C_1 D_1$, содержащем ударную волну S и токовый слой II (фиг. 3)

$$\frac{S_2 \rho_2}{b_2} \frac{du_2}{dt} + \rho_2 (u_{s1} - u_2) (D_s - u_{s1}) = \left(p_{s1} + \frac{H^2}{8\pi} \right) - \left(p_3 + \frac{H_b^2}{8\pi} \right) \quad (3.3)$$

Здесь u_{s1} , p_{s1} — скорость и давление перед ударной волной, т. е. значения параметров без учета тормозящего действия токового слоя, D_s — скорость ударной волны, p_3 — давление непосредственно за токовым слоем.

Изменение импульса газа в рассматриваемом объеме происходит как за счет изменения скорости всей массы газа между волной и токовым слоем (первое слагаемое в (3.3)), так и за счет изменения скорости газа при прохождении им ударной волны (второе слагаемое). При оценке порядков величин в дальнейшем будем пренебрегать первым слагаемым в левой части уравнения (3.3), считая его по порядку величины не больше второго, а также разностью газодинамических давлений ($p_{s1} - p_3$) по сравнению с магнитным. Тогда, считая ударную волну сильной, из (3.3) получим следующее конечное соотношение, связывающее изменение скорости в волне со скачком магнитного поля:

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{u_{s1}}{u_1} \left[1 - \frac{\sqrt{\gamma-1}}{\gamma+1} \frac{H_1}{\sqrt{4\pi \rho_{s1} u_{s1}}} \sqrt{\Delta H (2H_b - \Delta H)} \right] = f(\Delta H) \frac{b_1}{b_2} \quad (3.4)$$

$$f(0) = \frac{u_{s1} b_2}{u_1 b_1} = \frac{V_{s1}}{V_1} > 1$$

Будем считать, что газ за ударной волной остается непроводящим. Для определения температуры в токовом слое применим к нему уравнение притока тепла в интегральной форме

$$c_p \int \rho \frac{dT}{dt} dx = \int \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} dx + \left(\frac{c}{4\pi} \right)^2 \int \left(\frac{dH}{dx} \right)^2 \frac{dx}{\sigma(T)} + \int \frac{dp}{dt} dx$$

Здесь λ — коэффициент теплопроводности. Заменяя среднее давление в слое величиной $(H_b^2 - H^2)/8\pi + p_s$ и пренебрегая расширением слоя за счет прогрева газа вследствие теплопроводности, получим

$$(H_b - \Delta H) \frac{d\Delta H}{d\tau} + c_1 \frac{d\Delta T}{d\tau} = \frac{(\Delta H)^2 - \text{Re}_m (c_2 \Delta T - c_3)}{\text{Re}_m} \quad (3.5)$$

$$c_1 = \frac{4\pi c_p \rho_* T_*}{H_1^2}, \quad c_2 = \frac{4\pi \lambda T_*}{u_{s1} l H_1^2}, \quad c_3 = \frac{4\pi dp_s}{H_1^2 d\tau} + c_2 \left(1 - \frac{T_2 + T_3}{2T_*} \right)$$

Здесь T_3, p_3 — значения температуры и давления за токовым слоем, T_2 — перед ним. Величина $(dp_s/d\tau)$ связана с падением давления вследствие перемещения токового слоя по каналу.

Если рассматривать величины l, u_1, H_1, b_1, c_3 как параметры, то уравнения (3.2), (3.5) с соотношением (3.4) образуют динамическую систему относительно ΔH и ΔT , которая описывает локальное поведение токового слоя. Исследуем качественно эту систему.

Очевидно, что точка $C_0(0, 0)$ является стационарной, отвечающей состоянию, при котором токовый слой отсутствует ($\Delta H = \Delta T = 0$). Можно показать, что C_0 — нелинейный устойчивый узел, в который все интегральные кривые из области $\Delta H > 0, \Delta T > 0$ с ростом τ входят за конечное время.

Другие нестационарные точки системы определяются уравнением

$$F(\Delta H) = c_2 \Delta T (\Delta H) + c_3,$$

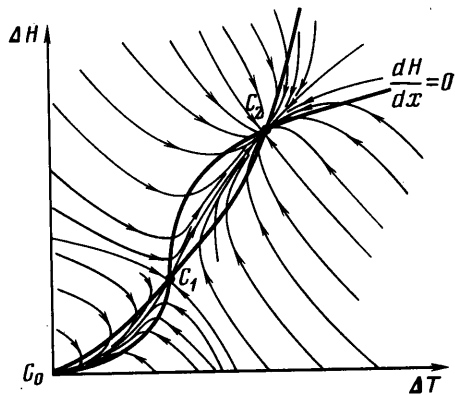
$$F(\Delta H) = \Delta H [f(\Delta H) (H_b - \Delta H) - 1]$$

$$\Delta H^2 = \text{Re}_m (\Delta T) [c_2 \Delta T + c_3] \quad (3.6)$$

У функции $F(\Delta H)$ выражение в квадратных скобках положительно при $\Delta H = 0$ в случае $H_b V_{s1} > H_1 V_1$, отрицательно при $\Delta H = H_b$ и поэтому обращается в нуль при $\Delta H = H^*$, где $H^* \in [0, H_b]$. Таким образом, $F(0) = F(H^*) = 0$ и $F(\Delta H) > 0$ при $\Delta H \in [0, H^*]$, т. е. $F(\Delta H)$ имеет хотя бы один максимум на отрезке $[0, H^*]$. Так как $c_1 \Delta T (\Delta H) + c_3$ — растущая функция, то при $\max F(\Delta H) > c_1 \Delta T (H^*) + c_3$ уравнение (3.5) заведомо имеет два решения, т. е. существуют еще две стационарные точки c_1 и c_2 ($\Delta H(c_1) < \Delta H(c_2)$).

Заметим, что увеличение магнитного поля на выходе из канала H приводит к появлению стационарных точек, а увеличение эффекта охлаждения слоя (рост параметров c_2 и c_3) — к их исчезновению. Можно показать, что C_1 является седлом, а C_2 устойчивым узлом. Картина интегральных кривых, когда точки C_1 и C_2 существуют, представлена на фиг. 4.

При перемещении токового слоя в канале параметры в уравнениях (3.2), (3.5) медленно меняются, т. е. изменяется положение точек C_1 и C_2 . Так как в C_1 — седло, то она не может описать токовый слой при его движении в канале. Действительно, при малом изменении ее положения точка, соответствующая параметрам слоя, переходит на интегральную кривую, входящую либо в C_0 , либо в C_2 . В первом случае дуга гаснет за конечное время. Наличие узловой т. C_2 обеспечивает существование токо-



Фиг. 4

вого слоя, если его параметры все время находятся в области притяжения этой точки. Последнее возможно, когда время приближения к C_2 вдоль интегральной кривой τ_0 меньше характерного времени изменения параметров вдоль канала $t_0 = L/u_{s1}$, где, например, L — длина канала. Оценка дает

$$\frac{t_0}{\tau_0} = \frac{4\pi\sigma_0}{c^2} \sqrt{\frac{\lambda Lu_{s1}(1-H_1 V_1/H_b V_{s1})}{c_p \rho T}}$$

При $t_0/\tau_0 \gg 1$ возникает решение, которому на плоскости ΔH , ΔT соответствует линия, описываемая точкой C_2 при изменении параметров в (3.2), (3.5) при движении токового слоя.

Образовавшийся токовый слой экранирует область непроводящего газа внутри канала от внешнего магнитного поля. Эта область в процессе движения расширяется, магнитное поле в ней вследствие этого падает, что приводит к усилению фронта рекомбинации. В зависимости от параметров задачи токовый слой может погаснуть либо внутри канала (точки C_1 и C_2 сливаются и исчезают, а состояние системы переходит в т. C_0), либо после выхода из него. После этого внешнее магнитное поле проникает внутрь канала и образуется разрыв магнитного поля на границе проводящей области, что приводит к образованию нового токового слоя и повторению процесса. Таким образом, при больших значениях H_b течение в целом является периодическим.

При $H_b \Delta H > 4\pi(\gamma+1)\rho_{s1} T_*/(\gamma-1)$ ударная волна перед токовым слоем будет ионизирующей. В этом случае толщина проводящего газа, экранирующего внешнее магнитное поле, становится большой, так что можно пренебречь диффузией поля в области с непроводящим газом (III a) и тем самым опустить в уравнении (3.2) последний член. Теперь это уравнение не зависит от температуры и может рассматриваться совместно с (3.3) независимо от уравнения (3.5).

Можно показать, что при $\Delta H < H_b$, $u_{s1} > u_2$ указанная система имеет одну стационарную точку C_3 , являющуюся либо фокусом, либо узлом с входящими в нее интегральными кривыми при росте τ . Как и в предыдущем случае, движение токового слоя в канале будет описываться траекторией точки C_3 . При этом скорость ударной волны и магнитное поле в канале будут флуктуировать с малой амплитудой. После выхода слоя из канала процесс также повторяется.

Для $H_b < H_{**}$ токовый слой в отличие от рассмотренного случая будет ускоряться магнитным полем. При этом $u_2 b_2/u_1 b_1 = f(\Delta H)$ таково, что $f(0) = H_b V_2/H_1 V_1$, $f'(\Delta H) > 0$ ($\Delta H = H - H_b > 0$). Пользуясь этим, можно доказать, что система (3.2), (3.5) может иметь особые точки C_2 , C_3 , соответствующие квазистационарным токовым слоям, аналогичным случаю $H_b > H_{**}$.

4. Численный эксперимент. Для проверки и уточнения полученного на основе качественной модели результата был проведен численный эксперимент — расчет нестационарной задачи, сформулированной в п. 1 при различных значениях определяющих параметров.

Для расчета форма канала и зависимость $\sigma = \sigma(T)/\sigma(T_0)$ брались в виде

$$b = 1 + 0,1x \quad (x \leq 0,3) \quad b = 0,53 + 2x \quad (0,3 \leq x \leq 0,9)$$

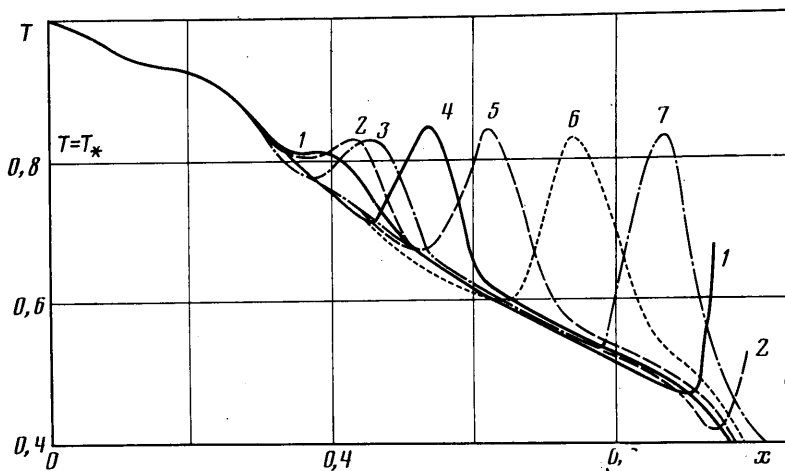
$$b = 91,5(x-0,9)^2 + 2(x-0,9) + b(0,9) \quad (0,9 \leq x \leq 1)$$

$$\sigma(T) = 0 \quad (T < T_*), \quad \sigma = \frac{T - T_*}{1 - T_*} \quad (T_* < T < 1), \quad \sigma = 1 \quad (T > 1)$$

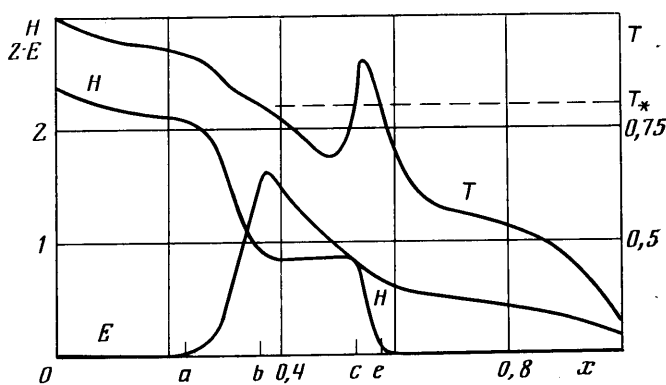
Показатель адиабаты $\gamma = 5/3$. Расчет проводился в Лагранжевых переменных разностным методом [13]. Порядок разностной аппроксимации уравнений газовой динамики был $O(\tau^2, h^2)$, а уравнения индукции — $O(\tau, h)$, где τ и h — шаги по времени и пространственной координатам. Разностная система решалась методом раздельных прогонок [14]. Основные расчеты проводились при $Re_m = 4\pi\sigma_0 u_0 L/c^2 = 200$.

В результате расчетов были установлены следующие факты.

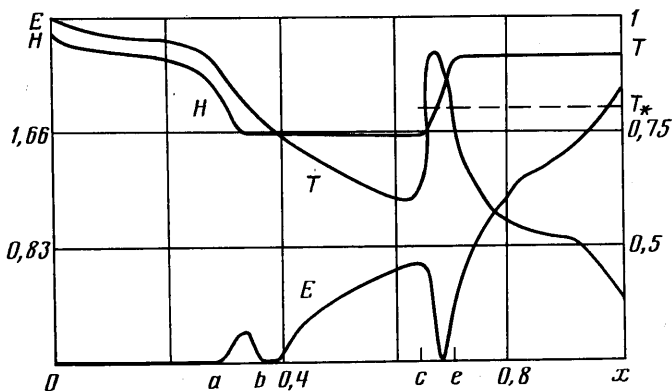
При $H_{**} < H_{k1} < H_b < H_{k2} < H_{**}$ в канале устанавливается устойчивый стационарный режим течения, соответствующий описанному в п. 2. Для



Фиг. 5



Фиг. 6



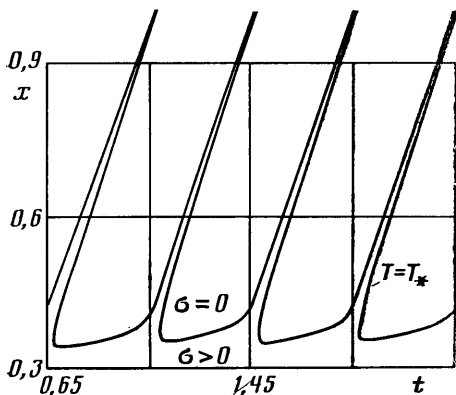
Фиг. 7

$H_{k1} < H_b < H_{*m}$ и $H_{**} < H_b < H_{k2}$ течение содержит зоны, моделируемые при $Re_m \gg 1$ изотермическим течением разрежения. В численной реализации они при рассматриваемых параметрах устойчивы из-за конечности Re_m и наличия «схемной вязкости». Ширина этих зон невелика ($\Delta x \approx 0,075$). В приводимых расчетах $H_{k1} \approx 0,75$, $H_{k2} = 2,1$, $H_{*m} = 4,4$, $H_{**} = 1,7$.

При $H_b < H_{k1}$ или $H_b > H_{k2}$ развитие неустойчивости в течении Батлера приводит к образованию токового слоя и возникновению течения, описанного в п. 3. Процесс развития токового слоя виден на фиг. 5, где

изображены профили температуры вдоль канала в последовательные моменты. (Представлен случай $H_b=0$.)

Структура течения в некоторый момент времени представлена на фиг. 6 и 7 для $H_b=0$ и 2,2 соответственно. Здесь $0a$ — зона идеального МГД-течения (собственное электрическое поле $E'=0$), ab — волна рекомбинации, bc — зона газодинамического течения с однородным полем, ce — токовый слой и $e1$ — зона газодинамического течения в выходной части канала.



Фиг. 8

Периодический характер течения виден на фиг. 8, где на плоскости xt нанесены области проводящего и непроводящего газа.

При уменьшении разности $|H_b - H|$ интенсивность токовых слоев ослабевает и они в соответствии с качественной теорией затухают внутри канала, например при $H_b=0,5$.

Расчеты подтвердили также качественные выводы о различии между случаями $H_b > H_{**}$ и $H_b < H_{**}$. В первом из-за тормозящего действия магнитного поля скорость токового слоя меньше и тем самым период процесса больше (1,0 по сравнению с 0,42 для второго случая). Кроме того, на внутренней границе токового слоя образуется волна сжатия ($p/p_1=2,3$), наличие которой приводит к большей температуре внутри слоя, росту ее в процессе движения, а также расширению самого слоя. При этом максимальная температура растет примерно линейно от координаты положения слоя.

В случае $H_b < H_{**}$ ширина токового слоя и его скорость постоянны во время движения (фиг. 5). Отметим, что необходимое условие существования слоя $H_b V_{s1}/H_1 V_1 > 1$ (п. 3) выполняется для всех рассчитанных случаев.

Таким образом, при $H_{k1} < H_b < H_{k2}$ имеют место стационарные режимы течения. При $H_{**} < H_b < H_{**}$ реализуется идеальное МГД-течение с волной рекомбинации и областью газодинамического течения. При $H_{k2} > H_b > H_{**}$, $H_k < H_b < H_{**}$ за фронтом рекомбинации имеют место изотермические течения. При $H < H_{k1}$ и $H > H_{k2}$ в результате развития неустойчивости в изотермическом течении возникает периодический режим, в котором от проводящей области периодически отделяются токовые слои, распространяющиеся вниз по каналу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бармин А. А., Куликовский А. Г. Об особенностях сверхзвуковых МГД-течений, связанных с включением проводимости при охлаждении газа. — В сб.: Избранные вопросы современной механики. Ч. 1. М.: Изд-во МГУ, 1981, с. 153–164.
2. Брушлинский К. В., Морозов А. И. Расчет двумерных течений плазмы в каналах. — В сб.: Вопросы теории плазмы. Вып. 8. М.: Атомиздат, 1974, с. 88–163.
3. Брушлинский К. В., Калугин Г. А., Козлов А. И. Численное моделирование течения ионизирующегося газа в канале. Препринт № 50. М.: Ин-т прикл. матем. им. М. В. Келдыша АН СССР, 1982.
4. Беляев С. А., Гольдина Д. А., Лесков Л. В., Куликов Ю. Н., Курдюмов С. П., Попов Ю. П., Савичев В. В., Самарский А. А., Филиппов С. С. Расчет нестационарного ускорения плазмы в одномерном приближении. М., 1969. 55 с.
5. Самарский А. А., Курдюмов С. П., Куликов Ю. Н., Лесков Л. В., Попов Ю. П., Савичев В. В., Филиппов С. С. Магнитогидродинамическая модель нестационарного ускорения плазмы. — Докл. АН СССР, 1972, т. 206, № 2, с. 307–310.
6. Савельев В. В. Двумерный расчет течения ионизирующегося газа в канале ускорителя. — Письма в Журн. техн. физики, 1976, т. 2, вып. 13, с. 593–596.
7. Вагажин А. Б., Любимов Г. А., Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах. Гл. 1. М.: Наука, 1970, с. 54–128.

8. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. М.: Физматгиз, 1962. 246 с.
9. Бармин А. А., Куликовский А. Г. Фронты ионизации и рекомбинации в электромагнитном поле.— Гидромеханика-1970. Т. 5. Итоги науки. М.: ВИНТИ АН СССР, 1971, с. 6–31.
10. Butler D. S. One-dimensional flow in an ionizing gas.— J. Fluid Mech., 1965, v. 23, № 1, p. 1–21.
11. Бармин А. А., Куликовский А. Г. Задача о поршне при наличии волн рекомбинации в магнитном поле.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 4, с. 136–142.
12. Бармин А. А. Простые волны разряжения с электропроводностью, близкой к нулю, при наличии электромагнитного поля в случае, когда проводимость зависит от температуры. М., 1970. 29 с. (Отчет Ин-та мех. МГУ № 1125).
13. Годунов С. К., Рябенский В. С. Разностные схемы. Введение в теорию. М.: Наука, 1977. 439 с.
14. Самарский А. А., Попов Ю. П. Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975. 351 с.

Москва

Поступила в редакцию
30.X.1984