

УДК 532.592

## УЕДИНЕННЫЕ ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ВОЛНЫ РОССБИ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

СУТЫРИН Г. Г.

В тонком слое жидкости на вращающейся сфере могут распространяться низкочастотные волны Россби, аналогичные дрейфовым волнам в плазме. Теория волн Россби развивалась в основном для квазигеострофических движений малой амплитуды (вихрь относительной скорости намного меньше угловой скорости вращения сферы  $\Omega$  и толщина слоя  $H$  мало отличается от невозмущенной  $H_0$ ) [1]. Особый интерес вызывают уединенные волны, близкие к осесимметричным и описывающие одиночные вихревые образования, равномерно перемещающиеся против направления вращения сферы (на запад). Квазигеострофические волны малой амплитуды, внутри которых жидкость вращается в сторону, противоположную вращению сферы (антициклонически), рассматривались в [2, 3].

Антициклоны конечной амплитуды исследовались в [4], где было показано, что структура уединенной волны зависит от предыстории ее образования. В данной работе выводятся уравнения для описания медленной эволюции течений конечной амплитуды в тонком сферическом слое однородной вращающейся жидкости и анализируется структура гладкой осесимметричной уединенной волны Россби.

Уравнения теории мелкой воды на сфере имеют вид

$$R \cos \theta \frac{\partial H}{\partial \tau} + \frac{\partial v_\lambda H}{\partial \lambda} + \frac{\partial v_\theta H \cos \theta}{\partial \theta} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_\lambda}{\partial \tau} + \frac{1}{R \cos \theta} \frac{\partial B}{\partial \lambda} = \omega_z v_\theta, \quad \frac{\partial v_\theta}{\partial \tau} + \frac{\partial B}{\partial \theta} = -\omega_z v_\lambda \quad (2)$$

$$\omega_z = 2\Omega \sin \theta + \frac{1}{R \cos \theta} \left( \frac{\partial v_\theta}{\partial \lambda} - \frac{\partial v_\lambda \cos \theta}{\partial \theta} \right) \quad (3)$$

$$B = gH + \frac{1}{2}(v_\lambda^2 + v_\theta^2)$$

Здесь  $R$  — радиус сферы,  $\lambda$  — долгота,  $\theta$  — широта,  $\tau$  — время,  $v_\lambda$  и  $v_\theta$  — зональная и меридиональная составляющие скорости,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\omega_z$  — вертикальная составляющая абсолютного вихря.

Рассмотрим движения с горизонтальным масштабом  $L$  и максимальным изменением толщины слоя  $\Delta H_0$ , локализованные вблизи широты  $\theta_0$ . Масштаб скорости  $V$  определим из геострофического баланса сил

$$V = A \frac{L_R^2 f_0}{L}, \quad L_R = \frac{\sqrt{gH_0}}{f_0}, \quad f_0 = 2\Omega \sin \theta_0, \quad A = \frac{\Delta H_0}{H_0}$$

где  $A$  — амплитуда,  $L_R$  — масштаб Россби. В качестве масштаба временной изменчивости  $T$  выберем масштаб времени волны Россби

$$T = \frac{L}{V_R}, \quad V_R = \frac{L_R^2 f_0}{R} \operatorname{ctg} \theta_0$$

где  $V_R$  — максимальная фазовая скорость линейных волн Россби.

Введем безразмерные переменные

$$x=R\lambda \cos \theta_0/L, \quad y=R(\theta-\theta_0)/L, \quad t=\tau/T$$

$$v_x=v_\lambda/V, \quad v_y=v_\theta/V, \quad h=H/H_0, \quad h'=(h-1)/A$$

и представим скорость течения из (1) следующим образом:

$$v_x=-\frac{\partial \psi}{h \partial y}-\frac{AM}{Qh} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x h' dx, \quad v_y=\frac{\partial \psi}{Mh \partial x}, \quad M=\frac{\cos \theta}{\cos \theta_0}, \quad Q=\frac{V}{V_R} \quad (4)$$

Здесь  $\psi$  — некоторый аналог функции тока. Из (1)–(2) вытекает, что потенциальный вихрь  $\omega_z/H$  сохраняется в движущейся частице. При этом уравнение эволюции относительной аномалии потенциального вихря  $q$  в безразмерных переменных принимает вид

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{Q}{M} J(\psi, q) + \frac{\partial \psi}{\partial x} = A \left[ \frac{\partial q}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^x h' dx - h' \frac{\partial q}{\partial t} \right] \quad (5)$$

$$J(\psi, q) = \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial q}{\partial x}, \quad q = \frac{1}{A} \left( \frac{\omega_z H_0}{f_0 H} - I \right) = \frac{Bu \omega - I h'}{h} \quad (6)$$

$$\omega = \frac{\partial v_y}{M \partial x} - \frac{\partial (M v_x)}{M \partial y}, \quad Bu = \frac{L_R^2}{L^2}, \quad I = \frac{\sin \theta}{\sin \theta_0}$$

Для медленных движений при условии, что

$$\frac{1}{f_0 T} = \frac{A Bu}{Q} \ll 1$$

получим из (2) с учетом (4) интеграл Бернулли

$$h' + \frac{A Bu}{2h^2} \left[ M^{-2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 \right] = I \psi + A \int_{\psi_0}^{\psi} q d\psi + c \quad (7)$$

где  $c$  определяется граничными условиями задачи. При этом (6) принимает вид

$$Bu \left[ M^{-2} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \psi}{h \partial x} \right) + M^{-1} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{M}{h} \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \right] = q + (I + Aq) h' \quad (8)$$

Система уравнений (5), (7)–(8) для переменных  $q$ ,  $h$  и  $\psi$  замкнута и описывает медленную эволюцию течений конечной амплитуды в тонком сферическом слое с учетом отклонения скорости течения от геострофической.

Для волновых решений, зависящих от  $(x+ut, y)$ , правая часть (5) обращается в нуль, и приходим к уравнению

$$J \left( q + \frac{I}{A}, \varphi \right) = 0, \quad \varphi = \frac{I}{A} - \frac{\psi}{u}$$

откуда следует

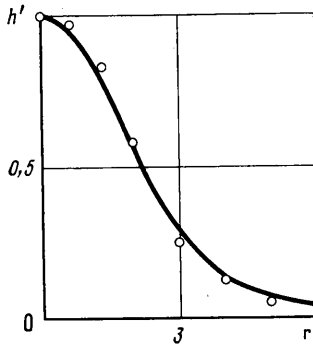
$$q = F(\varphi) - \frac{I}{A}$$

Рассмотрим уединенные волны, движение в которых затухает при удалении от центра волны:  $q \rightarrow 0$ ,  $\psi \rightarrow 0$  при  $r \rightarrow \infty$ ,  $r = [(x+ut)^2 + y^2]^{1/2}$ . Этому условию удовлетворяет зависимость  $F(\varphi) = \varphi$  и  $c = 0$ .

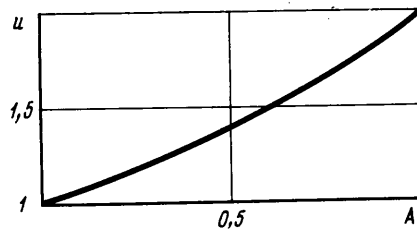
Для средних широт при  $L \ll R$  используется приближение  $\beta$ -плоскости ( $M=I=1$ ). В этом случае при  $q = -\psi/u$  в диапазоне  $1 < u < 2,05$  существуют нетривиальные осесимметричные решения системы (7)–(8), ограничен-

ные в нуле и убывающие при  $r \rightarrow \infty$  как  $r^{-1/2} \exp(-r)$ . Такие решения описывают гладкие уединенные антициклоны, перемещающиеся на запад быстрее линейных волн Россби, как и волны малой амплитуды.

Наиболее быстро перемещается волна предельной амплитуды при  $A=1,03$ , профиль которой при  $Bu=1$  приведен на фиг. 1. В этом случае абсолютный вихрь в центре антициклона обращается в нуль. Для антициклона предельной амплитуды профиль возвышения, измеренный во вра-



Фиг. 1



Фиг. 2

щающемся параболическом сосуде при  $H_0=0,3$  см [5] (точки на фиг. 1), хорошо согласуется с теоретическим (фиг. 1).

На фиг. 2 представлена зависимость фазовой скорости  $u$  от амплитуды  $A$ . С уменьшением амплитуды волны ее фазовая скорость убывает, горизонтальный масштаб растет и орбитальная скорость становится близкой к геострофической. Для волны малой амплитуды из (7)–(8) приходим к уравнению ( $h'(0)=1$ )

$$\frac{d^2 h'}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dh'}{dr} - h' + 2,4h'^2 = 0, \quad Bu = u - 1 = 0,6A$$

которое рассматривалось в [2, 3], причем в [2] учитывалось отклонение формы волны от осесимметричной вследствие сферичности слоя. Так что как в сферическом слое, так и в приближении  $\beta$ -плоскости зависимость фазовой скорости  $u$  и масштаба уединенной волны гладкого типа от амплитуды при  $A \ll 1$  оказывается одинаковой.

За исключением случая  $A=1$  в лабораторных экспериментах [5] антициклоны получались более компактными, чем уединенная волна при  $F(\varphi)=\varphi$ . Дело может быть в том, что внутри замкнутых изолиний  $\varphi$  зависимость  $F(\varphi)$  может быть иной и определяться предысторией образования возмущения [4]. Вопрос о том, при каких условиях образуется уединенная волна рассмотренного вида, остается открытым.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Каменкович В. М., Кошляков М. Н., Монин А. С. Синоптические вихри в океане. Л.: Гидрометеоздат, 1982, 264 с.
2. Петвашвили В. И. Красное пятно Юпитера и дрейфовый солитон в плазме. — Письма в ЖЭТФ, 1980, т. 32, вып. 11, с. 632–635.
3. Charney J. G., Flierl G. R. Oceanic analogues of large-scale atmospheric motions. — In: Evolution of Physical Oceanography / Ed. Warren B. A., Wunsch C. Massachusetts Institute of Technology, 1981, p. 504–552.
4. Сутырин Г. Г. К теории уединенных антициклонов во вращающейся жидкости. — Докл. АН СССР, 1985, т. 280, № 5, с. 1101–1105.
5. Антипов С. В., Незлин М. В., Снежкин Е. Н., Трубников А. С. Солитон Россби в лаборатории. — ЖЭТФ, 1982, т. 82, вып. 1, с. 145–160.

Москва

Поступила в редакцию  
3.V.1984