

УДК 532.542:539.37:612.18

## НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ТРУБКАХ ИЗ ВЯЗКОУПРУГОГО АКТИВНОГО МАТЕРИАЛА

КЛОЧКОВ Б. Н., РЕЙМАН А. М., СТЕПАНЯНЦ Ю. А.

Приведены результаты численного решения уравнений, описывающих в квазиодномерном приближении движение жидкости в трубке из вязкоупругого материала с немонотонной S-образной статической характеристикой. Рассмотрены некоторые возможности получения более простых моделей с сосредоточенными параметрами для таких течений. Обсуждается применение теории к проблеме тонуса кровеносных сосудов.

Активность кольцевых гладких мышц, образующих стенки мельчайших артериальных сосудов, считается причиной многих физиологических эффектов, наблюдаемых в экспериментах на целом органе и на отдельных сосудах [1, 2]. Среди таких эффектов особое внимание привлекали авторегуляция, т. е. тенденция к постоянству расхода крови при изменениях давления, и вазомоции — колебательные изменения просвета сосуда.

Известны попытки теоретического изучения таких явлений на основе моделей, описанных в [3–5]. Главное содержание исследований этого направления [6] заключалось в поисках физически необходимых следствий того, что статическая характеристика давление — радиус для сосуда имеет падающий участок [7], и в качественном сопоставлении результатов с данными наблюдений. Однако до сих пор математические свойства подобных моделей не изучены полностью [8, 9].

Предлагаемая статья, ставящая своей целью восполнение этого пробела, в краткой форме подводит итоги аналитического и численного исследований, которые авторы проводили, начиная со статьи [10] (см. также [11, 12]). Подробное изложение с обширным иллюстративным материалом и довольно полной библиографией содержится в работе [13].

1. Уравнения движения ньютоновской несжимаемой жидкости с вязкостью  $\mu$  в трубке радиуса  $R^0(x^0, t^0)$  и средним по сечению давлением  $p^0(x^0, t^0)$  сводятся к системе [4, 5]

$$\frac{\partial p^0}{\partial t^0} - \frac{H}{t_r} [R^0 - P_3^0(p^0)] = H \frac{\partial R^0}{\partial t^0} \quad (1.1)$$

$$R^0 \frac{\partial R^0}{\partial t^0} = \frac{1}{16\mu} \frac{\partial}{\partial x^0} \left[ (R^0)^4 \frac{\partial p^0}{\partial x^0} \right] \quad (1.2)$$

Здесь  $P_3^0$  — кубический полином,  $H = K/R_0^0$ ,  $K$  и  $t_r$  — высокочастотный «модуль упругости» и время релаксации материала стенки,  $R_0^0$  — значение  $R^0$ , при котором определены константы  $K > 0$ ,  $t_r > 0$ ; прочие обозначения общеприняты.

Если ввести вспомогательную переменную  $\varphi^0 = R^0 - p^0/H$ , то (1.1), (1.2) легко приводятся к виду

$$\begin{aligned} \psi_1(\varphi^0, p^0) \frac{\partial p^0}{\partial t^0} &= \frac{\partial}{\partial x^0} \left[ \psi_2(\varphi^0, p^0) \frac{\partial p^0}{\partial x^0} \right] + \psi_3(\varphi^0, p^0) \\ \frac{\partial \varphi^0}{\partial t^0} &= \psi_4(\varphi^0, p^0) \end{aligned} \quad (1.3)$$

т. е. к вырожденной (с одним диффузионным процессом) системе реакционно-диффузионного типа, но со сложно организованными коэффициентами емкости  $\psi_1$  и диф-

фузии  $\psi_2$ . Возможность сведения к (1.3) позволяет прибегать, хотя и с известной осторожностью, к аналогиям с другими реакционно-диффузионными моделями, широко распространенными в теоретической биофизике [14]. В частности, можно ожидать, что решения (1.1), (1.2) на бесконечной прямой  $|x^\circ| < \infty$ , соединяющие два однородных состояния при  $x \rightarrow \pm\infty$ , будут иметь характер стационарной волны бегущего локального расширения или сужения трубки, которое сопровождается «ступенчатым» изменением давления.

Существование у системы (1.1), (1.2) (с линеаризованным вторым уравнением) решений типа  $R=R(\xi)$ ,  $p=p(\xi)$  впервые отмечено в статье [5], где были получены некоторые частные «консервативные» решения типа уединенных, периодических или квазиудирных волн. Другой класс аналитических решений со ступенчатым изменением давления был построен в [10]. В принципе линеаризация не изменяет качественных особенностей решения, однако нелинейная зависимость расхода от давления и радиуса может быть существенна (например, при вычислении расхода через сосуд при вынужденных колебаниях [15]).

Рассмотрим для (1.1), (1.2) задачу с граничными условиями  $p^\circ = p_\pm^\circ$  при  $x \rightarrow \pm\infty$  в случае, когда  $P_3^\circ(p_\pm^\circ) = R_+^\circ = R_-^\circ$ . Введем безразмерные переменные

$$p(\xi) = \frac{p^\circ}{p_*}, \quad R(\xi) = \frac{R^\circ}{R_*}, \quad x = \frac{x^\circ}{x_*}, \quad t = \frac{t^\circ}{t_*}$$

$$P_3(p) = \frac{P_3^\circ(pp_*)}{R_*}, \quad p_* = p_+^\circ - p_-^\circ, \quad R_* = R_+^\circ$$

$$t_* = t_r, \quad x_* = \frac{R_+^\circ}{4} \sqrt{\frac{p_* t_r}{\mu}}, \quad b = \frac{p_*}{HR_*}$$

$$\xi = x - at, \quad g = \frac{g^\circ}{g_*} = -R_*^4 \frac{\partial p}{\partial x}, \quad g_* = \frac{\pi R_*^4 p_*}{8\mu x_*}$$

где  $g$  — расход,  $a$  — скорость волны. После подстановки в (1.1), (1.2) и однократного интегрирования (1.2) по  $\xi$  с учетом условия  $R(\pm\infty) = 1$  получим систему

$$\frac{dR}{d\xi} = \frac{1}{a} [R - P_3(p)] + \frac{1 - R^2}{R^4} \frac{ab}{2} \quad (1.4)$$

$$\frac{dp}{d\xi} = \frac{1 - R^2}{R^4} \frac{a}{2}$$

Анализ уравнений (1.4) показывает, что возможны либо одно, либо три состояния равновесия (при этом два крайних являются седлами при всех возможных значениях параметров). Решения типа стационарных волн, соответствующие переходам из одной седловой точки в другую по сепаратрисам (их часто называют автоволнами), здесь в отличие от [10] удается получить только численно. Пример распределений  $R$ ,  $p$  и расхода  $g$  в волнах, представленный ниже, построен при

$$P_3(p) = 1,954p^3 - 5,139p^2 + 4,007p + 0,1606 \quad (1.5)$$

$$H = 2,256 \cdot 10^8 \text{ дин/см}^2, \quad t_r = 31,4 \text{ с}, \quad \mu = 0,03 \text{ г/(см} \cdot \text{с)}$$

$$p_+^\circ = 72,305 \text{ мм Hg}, \quad p_-^\circ = 18,1515 \text{ мм Hg}, \quad R_+^\circ = R_-^\circ = 11 \text{ мкм}$$

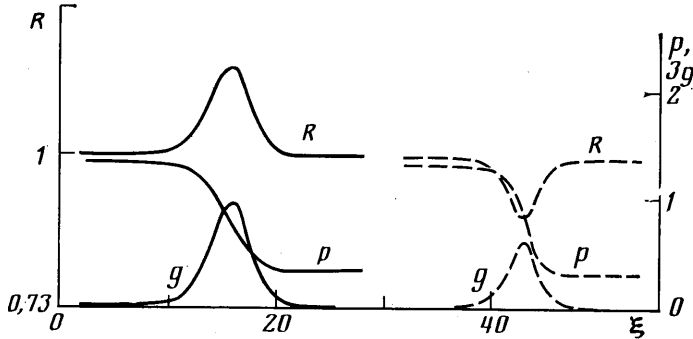
$$x_* = 2,39 \text{ см}, \quad g_* = 5,789 \cdot 10^{-7} \text{ см}^3/\text{с}, \quad p_* = 54,1535 \text{ мм Hg}$$

$$b = 0,291$$

Зависимость (1.5) соответствует аппроксимации экспериментальных данных [7] полиномом по методу наименьших квадратов. Значения  $H$  и  $t_r$  оценены по результатам эксперимента со ступенчатым изменением давления внутри артериолы [16].

Сплошные кривые на фиг. 1 изображают волну локального расширения, штриховые кривые — волну локального сужения, распространяющиеся со скоростями  $a_p=1,778$  и  $a_c=1,958$  соответственно ( $a_p^\circ=0,135$  см/с,  $a_c^\circ=0,149$  см/с).

2. Естественно предположить, что в трубке конечной длины  $L^\circ$ , много большей, чем характерный размер волны, может осуществиться течение, близкое к стационарным волнам, по крайней мере когда граничные значения давления близки к  $p_\pm^\circ$  в задаче о стационарной волне.



Фиг. 1

Возвратимся к уравнениям (1.1), (1.2) и перейдем к такой же, как в п. 1, системе безразмерных величин. Тогда получим

$$b \frac{\partial p}{\partial t} - R + P_3(p) = \frac{\partial R}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$R \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( R^4 \frac{\partial p}{\partial x} \right) \quad (2.2)$$

Пусть на входе и выходе трубка соединена через постоянные сопротивления  $Z_\pm^\circ$  с резервуарами, где давления  $p_\pm^\circ$  постоянны. Тогда в безразмерной форме граничные условия примут вид

$$p - Z_+ R^4 \frac{\partial p}{\partial x} = p_+(x=0), \quad p + Z_- R^4 \frac{\partial p}{\partial x} = p_-(x=L) \quad (2.3)$$

$$L = \frac{L^\circ}{x_*}, \quad Z_\pm = \frac{\pi R_*^4 Z_\pm^\circ}{8 \mu x_*}$$

Рассмотрим вначале задачу для трубки большой, но конечной длины, когда  $Z_\pm=0$ , а  $p_\pm$  совпадают с заданными в п. 1 при  $x \rightarrow \pm\infty$ . Значения  $p_+$  и  $p_-$  лежат на двух растущих участках кривой  $R=P_3(p)$  в точках пересечения с прямой  $R=1$ ;  $p_+=1,335$ ,  $p_-=0,335$ . Значения безразмерных параметров  $b$  и кривой  $P_3(p)$ , и характерные масштабы размерных величин также взяты из п. 1. Примем  $L^\circ=100$  см, следовательно,  $L=41,841$ . Начальные условия зададим в виде

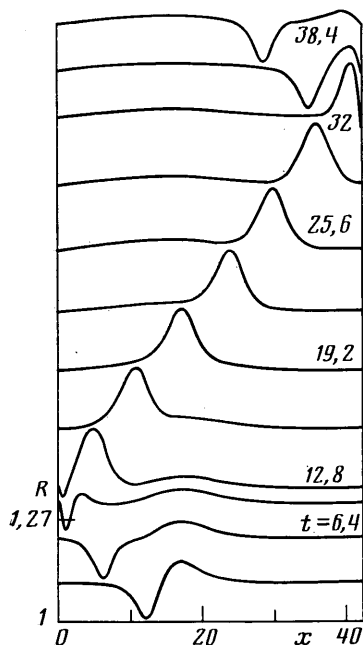
$$p(x, 0) = 1,335 - 0,0239x, \quad R(x, 0) = 1 \quad (2.4)$$

Результаты решения проиллюстрированы на фиг. 2, где кривые приведены через равные промежутки времени. Задача решалась численно с помощью метода [17]. Увеличение времени счета в 10 и более раз дает аналогичную картину.

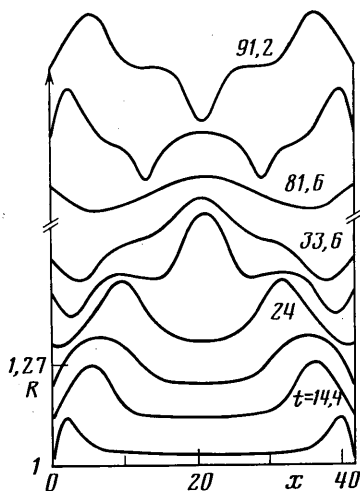
Сравнение со стационарными волнами, изображенными на фиг. 1, показывает, что решение довольно быстро (время релаксации  $t_r$  мало по

сравнению с временем счета) выходит на режим квазистационарных волн [11–13]. Отличие от стационарных волн невелико; оно, вероятно, связано с конечностью длины трубки и конечным временем счета.

Численные решения уравнений (2.1), (2.2) показывают, что начальные условия влияют на то, какая из двух волн образуется вначале — сжатия или расширения. Так, если начальные условия соответствуют (2.4), то



Фиг. 2



Фиг. 3

сначала, как видно из рис. 2, образуется волна сжатия. Если же в (2.4) принять начальный радиус равным 1,091, то сначала образуется волна расширения, которая движется в сторону меньшего давления.

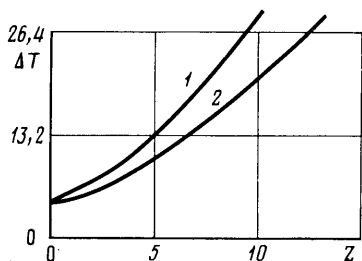
Если одно граничное значение давления лежит на растущем (нижнем или верхнем), а другое на падающем участках кривой  $R=P_3(p)$ , то картина несколько усложняется (по сравнению с фиг. 2): волны расширения и сжатия взаимодействуют не только с концами трубки, но и друг с другом [11–13].

Если же граничные значения давлений (возможно, совпадающие) лежат внутри падающего участка кривой  $R=P_3(p)$ , то волны сжатия и расширения повторяются периодически. На фиг. 3 представлено решение уравнений (2.1), (2.2) в случае, когда граничные давления одинаковы, равны начальному и лежат вместе с начальным радиусом  $R(x, 0) = P_3(p(x, 0))$  внутри падающего участка кривой  $R=P_3(p)$  (все кривые, кроме двух в середине, приведены через равные промежутки времени).

Таким образом, рассмотренные решения уравнений (2.1), (2.2) можно приближенно интерпретировать как движение и взаимодействие между собой и с концами трубки волн сжатия и расширения, близких к предсказываемым решениям п. 1. Заметим, что при численных расчетах использовались простейшие начальные распределения  $p$  и  $R$ . Возможно, что специальным выбором начальных условий можно добиться появления других квазистационарных волн.

Как позволяют думать расчеты, проведенные при  $Z_{\pm} \neq 0$  и прежних значениях прочих параметров (кроме начального радиуса), наличие внешних сопротивлений сказывается сильнее всего на взаимодействии волны

с граничным сечением. В частности, при увеличении  $Z_+$  от нуля волна сжатия ( $R(x, 0)=1$ ) отражается от входного сечения с некоторой задержкой, время которой монотонно растет с ростом  $Z_+$ . Аналогичная картина наблюдается на выходном конце при отражении волны расширения ( $R(x, 0)=1,091$ ), когда увеличивается  $Z_-$  (см. фиг. 4 и [13]; время задержки  $\Delta T$  оценивалось по возникновению четко выраженной волны; для кривой 1  $Z=Z_+$ ,  $Z_-=0$ , а для кривой 2  $Z=Z_-$ ,  $Z_+=0$ ).



Фиг. 4

Характерная ширина волны, пока она по своей природе близка к стационарной, не зависит от длины трубки. Если параметры уравнений и граничные условия фиксированы, то при уменьшении длины трубки неизбежно наступает ситуация, когда четко выраженная волновая картина исчезает, а затем вообще реализуется устойчивое стационарное течение.

Приведем для наглядности некоторые числовые данные. Для того чтобы качественная картина волн, как на фиг. 2, наблюдалась в трубке длиной  $L^0=1$  см при значениях параметров кривой  $P_3(p)$ , вязкости  $\mu$  и модуля  $H$ , как в п. 1, время  $t_r$  пришлось бы принять равным  $\sim 3 \cdot 10^{-3}$  с. Тогда линейные размеры волн составляли бы  $\sim 0,1$  см, а их скорости превышали 10 см/с. Столь малые  $t_r$  и столь большие скорости едва ли правдоподобны для реальных кровеносных микрососудов. При параметрах кривой  $P_3(p)$  и значениях  $\mu$ ,  $H$ ,  $t_r$ , как в п. 1, трубка с  $L^0 < 1$  см устойчива, что соответствует наблюдениям за артериолами [7, 16]. Однако в принципе могут существовать и неустойчивые артериолы, в которых распространяются квазистационарные волны расширения или сжатия. Действительно, линейный размер автоволны приближенно дается формулой [10]

$$l_a = \sqrt{\frac{t_r (R^0)^3}{8\mu\alpha}}, \quad \alpha = -\frac{dP_3^0}{dp^0} > 0$$

Поэтому условие существования автоволн в артериолах ( $l_a \ll 1$  мм  $\ll L^0=1$  см) может быть выполнено за счет больших значений  $\alpha$ . Скорость автоволн  $a \approx [(R^0)^3 H / 16\mu t_r]^{1/2}$  [10].

Существует некоторое критическое значение длины  $L_*^0$ , зависящее от граничных условий и других параметров задачи, выше которого ( $L^0 \gg L_*^0$ ) волновые процессы в трубке существуют, а ниже ( $L^0 < L_*^0$ ) — отсутствуют (состояния на падающем участке кривой  $R^0 = P_3^0(p^0)$  устойчивы) [11–13], см. также и [18]. Значение  $L_*^0$  сравнимо с характерной шириной волны. Когда  $L^0 \sim L_*^0$ , но устойчивое стационарное состояние не достигается, решение уравнений (2.1), (2.2) приближается по своему характеру к автоколебательному. В этом случае вблизи  $L_*^0$  в неустойчивой области можно получить аналитически<sup>1</sup> решение уравнений (2.1), (2.2) в виде ряда по малому параметру  $\epsilon$  [19]. Если  $Z_{\pm} = 0$ , то первый член ряда имеет вид стоячей волны с бегущим заполнением и амплитудой  $\epsilon \sim (L^0 - L_*^0)^{1/2}$ . Численные расчеты показывают, что при указанных в п. 1 значениях параметров задачи  $L_*^0 = 13$  см. Чтобы  $L_*^0$  уменьшить до 1 см, время релаксации  $t_r$  нужно принять равным 0,18 с при неизменных остальных параметрах.

Если  $L^0 < L_*^0$ , то трубка устойчива. В этом случае для получения установившегося решения уравнений (2.1), (2.2) положим  $\partial/\partial t = 0$ . Тогда, интегрируя (2.2) один раз и считая, что вместо  $P_3(p)$  может быть полином любой степени  $P(p)$ , из (2.1), (2.2) получим уравнения

$$R = P(p), \quad R^k \frac{dp}{dx} = -C \quad (2.5)$$

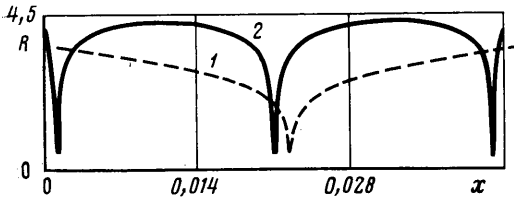
где  $C$  — постоянная интегрирования.

<sup>1</sup> Результаты вблизи границы устойчивости получены совместно с Е. Е. Киреевой.

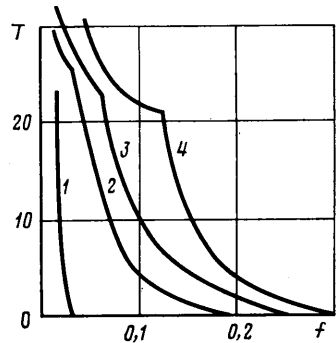
Пусть  $P(p) = R_0 + k(p - p_0)^2$ , где  $k > 0$  — реологическая постоянная, а  $R_0$ ,  $p_0$  фиксированы. На концах трубки заданы давления:  $p_+ = p_0 + \Delta p/2$ ,  $p_- = p_0 - \Delta p/2$ , причем  $\Delta R = k(\Delta p/2)^2$ , где  $\Delta p$  — перепад давления на концах трубки, а  $\Delta R$  — максимальное изменение радиуса трубки (величина пережатия). Определим ширину пережатия вдоль трубки  $\Delta x$  как расстояние вдоль трубки между двумя точками с  $R = R_0 + \Delta R/2$ . Интегрируя (2.5) по  $x$  один раз от 0 до  $L/2$ , а другой — от  $(L - \Delta x)/2$  до  $L/2$ , найдем отношение  $\Delta x/L$  как функцию  $\Delta R/R_0$  в виде

$$\frac{\Delta x}{L} = \frac{f(\Delta R/R_0)}{\sqrt{2}f(2\Delta R/R_0)}, \quad f(y) = \frac{y^4}{72} + \frac{y^3}{7} + \frac{3y^2}{5} + \frac{4y}{3} + 2 \quad (2.6)$$

Можно показать, например с помощью прямого дифференцирования, что функция  $\Delta x/L$  как функция  $\Delta R/R_0$  является монотонно убывающей.



Фиг. 5



Фиг. 6

Из (2.6) следует, что если пережатие мало ( $\Delta R/R_0 \ll 1$ ), то  $\Delta x/L = 0,71$ , а если пережатие велико ( $\Delta R/R_0 \gg 1$ ), то  $\Delta x/L = 0,044$ . Заметим, что в (2.6) не входит  $k$  и  $\Delta x/L$  определяется исключительно геометрическим фактором  $\Delta R/R_0$ , являющимся отношением величины пережатия радиуса трубки  $\Delta R$  к величине минимального значения радиуса  $R_0$ .

Зависимость  $R = P(p)$  может быть более сложной — например, иметь несколько падающих участков. Некоторые указания на последнюю возможность содержатся в [7]. На фиг. 5 в качестве примера приведены установившиеся решения уравнений (2.1), (2.2) в устойчивой области, качественно совпадающие с наблюдаемыми эффектами [20], для следующих зависимостей:

$$P(p) = 0,45 + 373,26(p - 0,74)^2$$

$$P(p) = 0,45 + 43,6610^6(p - 0,65)^2(p - 0,74)^2(p - 0,83)^2$$

(кривые 1, 2 соответственно). Появление таких больших пережатий значительно увеличивает гидродинамическое сопротивление сосуда и может являться фактически его закрытием.

Важно, что наличие внешних сопротивлений  $Z_{\pm}$  дестабилизирует трубку и уменьшает при прочих равных условиях критическую длину  $L_{*}^{\circ}$ . Можно показать, что при достаточно больших значениях внешних сопротивлений  $Z_{\pm}$  существуют автоколебания при физиологически допустимых значениях параметров даже для кривой (1.5) [13].

Рассмотрим вопрос о возбуждении волн в трубке изменением давления во входном сечении. Если эти изменения малы по амплитуде и совершаются вокруг значения, которому соответствует устойчивое стационарное решение, то получатся нестационарные течения, описываемые, например, в [15]. Если увеличить амплитуду настолько, что трубка окажется «дестабилизированной», то при не слишком большой скорости изменения

давления будут успевать формироваться волны или автоколебания (так называемый ждущий режим возбуждения).

Пусть, например, параметры уравнений заданы согласно п. 1, а начальные и граничные условия — в виде

$$\begin{aligned} p(x, 0) &= 0,335, \quad R(x, 0) = 1 \\ Z_{\pm} &= 0: p_{+} = 0,335 + h \sin(2\pi ft) \quad (0 \leq t \leq 1/2f) \\ p_{+} &= 0,335 \quad (t > 1/2f), \quad p_{-} = 0,335 \end{aligned}$$

Численное решение показывает, что в ответ на такой единичный импульс входного давления при определенном соотношении между  $h$ ,  $f$  могут возбуждаться волны. На фиг. 6 показана зависимость времени существования волн  $T$  от  $f$  при разных  $h$ :  $h_1=0,6$ ,  $h_2=0,9$ ,  $h_3=1,2$ ,  $h_4=1,8$ .

Сначала вблизи входного сечения трубки возбуждается волна расширения, а затем волна сжатия, которые распространяются в сторону выходного сечения. С увеличением параметра  $f$  задержка в возбуждении второй волны (сжатия) уменьшается. Начиная с некоторого  $f(h)$  возбужденные волны уже не достигают выходного сечения (гасят друг друга). Расстояние от входа до места исчезновения волн уменьшается с увеличением  $f$  и при достаточно большой частоте  $f(h)$  остаются нестационарные движения лишь вблизи входа.

3. Оценивая значения параметров, входящих в уравнения (1.1), (1.2), по данным работ [7, 16], легко прийти к выводу о том, что в физиологических условиях наиболее вероятно либо стационарное течение, либо течение «автоколебательного» типа. Поэтому для практических расчетов можно попытаться заменить распределенную модель (1.1), (1.2) более простой моделью с сосредоточенными параметрами. Ниже кратко рассматривается процедура, позволяющая сделать это с учетом природы решений квазиодномерных задач.

Из уравнения (2.2) после интегрирования по  $x$  получим точные соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L R^2 dx = 2[g(0, t) - g(L, t)] \quad (3.1)$$

$$g = -R^4 \frac{\partial p}{\partial x}, \quad p(L, t) - p(0, t) = - \int_0^L \frac{g(x, t)}{R^4(x, t)} dx$$

Умножая уравнение (2.2) на  $x$  и интегрируя, получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^L x R^2 dx = -2Lg(L, t) + 2 \int_0^L g(x, t) dx \quad (3.2)$$

Предположим, что относительные изменения  $R$  по  $x$  невелики в том смысле, что  $R = R_m(t)(1 + O(\epsilon_1))$ ,  $\epsilon_1 \ll 1$ , и интеграл в левой части (3.2) можно заменить на  $L^2 R_m^2 / 2$ . Тогда из (3.1), (3.2) следует, что с точностью до членов порядка  $\epsilon_1$

$$\int_0^L g(x, t) dx \approx \frac{L}{2} [g(L, t) + g(0, t)] \quad (3.3)$$

Используя условия на концах трубки:  $p_{+} - p(0, t) = Z_{+} g(0, t)$ ,  $p(L, t) - p_{-} = Z_{-} g(L, t)$ , а также уравнения (3.1), (3.3), можно последовательно найти  $p(0, t)$ ,  $p(L, t)$  и среднее давление

$$p_m(t) = \frac{1}{2} [p(0, t) + p(L, t)]$$

С указанной выше точностью  $R_m(t)$  и  $p_m(t)$  связаны уравнением

$$R_m \frac{dR_m}{dt} = \frac{2}{L} \left[ 4 + \frac{L}{R_m^4} \left( \frac{1}{Z_+} + \frac{1}{Z_-} \right) \right]^{-1} \left[ \frac{p_+}{Z_+} \left( 2 + \frac{L}{R_m^4 Z_-} \right) + \frac{p_-}{Z_-} \left( 2 + \frac{L}{R_m^4 Z_+} \right) - \frac{2p_m}{Z_+ Z_-} \left( \frac{L}{R_m^4} + Z_+ + Z_- \right) \right] \quad (3.4)$$

Модельное реологическое уравнение связывает непосредственно  $p_m$  и  $R_m$

$$\frac{dR_m}{dt} = b \frac{dp_m}{dt} - R_m + P_s(p_m) \quad (3.5)$$

Вероятно, уточнения можно достигнуть еще путем замены уравнения (3.5) на то, которое получается путем более аккуратного осреднения, а именно на

$$\frac{dR_m}{dt} = b \frac{dp_m}{dt} - R_m + \frac{P_s(p(0, t)) + P_s(p(L, t))}{2} \quad (3.6)$$

Уравнения (3.4), (3.5) (или (3.6)) образуют обобщенную модель с сосредоточенными параметрами, сводящуюся при  $p_- \rightarrow 0$ ,  $Z_- \rightarrow 0$  к ранее исследованной [3, 9]. В другом частном случае, когда  $Z_{\pm} \gg LR_m^{-4}$  (малое внутреннее сопротивление трубки), из (3.4) следует

$$R_m \frac{dR_m}{dt} = \frac{1}{L} \left[ \frac{p_+}{Z_+} + \frac{p_-}{Z_-} - p_m \left( \frac{1}{Z_+} + \frac{1}{Z_-} \right) \right] \quad (3.7)$$

Для системы (3.4), (3.5) может существовать, как и в случае, исследованном ранее [9], от одного до трех состояний равновесия, тогда как для системы (3.7), (3.5) состояние равновесия единственно. Когда оно неустойчиво, возникают автоколебания (существует устойчивый предельный цикл [9]).

В данной работе учтены замечания и предложения С. А. Регирера, возникшие при обсуждении результатов и рукописи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Физиология человека и животных. Т. 23: Регуляция сосудистого тонуса. М.: ВИНТИ, 1979. 192 с. (Итоги науки и техники).
2. Basar E., Weiss C. Vasculature and circulation. Amsterdam: Elsevier, 1981. 272 p.
3. Регирер С. А., Руткевич И. М., Усик П. И. Модель сосудистого тонуса.— Механика полимеров, 1975, № 4, с. 585—589.
4. Регирер С. А., Руткевич И. М. Волновые движения жидкости в трубках из вязкоупругого материала. Волны малой амплитуды.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 1, с. 45—53.
5. Руткевич И. М. Волновые движения жидкости в трубках из вязкоупругого материала. Стационарные нелинейные волны.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 4, с. 86—95.
6. Регирер С. А. Механические аспекты местной регуляции кровообращения.— В кн.: Регуляция кровообращения в скелетн. мышцах. Рига: Зинатне, 1980, с. 113—117.
7. Burrows M. E., Johnson P. C. Diameter, wall tension and flow in mesenteric arterioles during autoregulation.— Amer. J. Physiol., 1981, v. 241, № 6, p. H829—H837.
8. Скобелева И. М. Модель сосудистого тонуса (Численный эксперимент).— Механика композитных материалов, 1980, № 1, с. 107—112.
9. Киреева Е. Е., Клочков Б. Н. Нелинейная модель сосудистого тонуса.— Механика композитных материалов, 1982, № 5, с. 887—894.
10. Клочков Б. Н. Автоволновые процессы в кровеносных сосудах мышечного типа.— В кн.: Автоволновые процессы в системах с диффузией. Горький, 1981, с. 233—242.
11. Киреева Е. Е., Клочков Б. Н., Рейман А. М., Розенблюм Л. А., Степанянц Ю. А. О возможности автоволновых движений в малых кровеносных сосудах с активной мышечной стенкой.— В кн.: Тез. докл. стендовых сообщений 1-го Всес. биофизич. съезда. Москва, 1982. Т. 2, М., 1982, с. 159 (Ин-т биологич. физ. АН СССР).



12. Клочков Б. Н., Рейман А. М., Степаняц Ю. А. О математическом моделировании волновых явлений в артериолах.—В кн.: Тез. докл. 3-й Всес. конф. по пробл. биомеханики. Т. 1. Рига, 1983, с. 220—222.
13. Киреева Е. Е., Регирер С. А., Клочков Б. Н., Рейман А. М., Степаняц Ю. А. Исследования по биомеханике. Механика мышечной ткани: течение в активных трубках.—Отчет Ин-та механики МГУ, 1983, № 2818. 80 с.
14. Васильев В. А., Романовский Ю. М., Язго В. Г. Автоволновые процессы в распределенных кинетических системах.—Усп. физ. н., 1979, т. 128, вып. 4, с. 625—666.
15. Киреева Е. Е., Регирер С. А. Волновые движения жидкости в трубках из вязкоупругого материала. Вынужденные колебания.—Изв. АН СССР. МЖГ, 1984, № 4, с. 94—99.
16. Johnson P. C., Intaglietta M. Contributions of pressure and flow sensitivity to autoregulation in mesenteric arterioles.—Amer. J. Physiol., 1976, v. 231, № 6, p. 1686—1698.
17. Пасконов В. М. Стандартная программа для решения задач пограничного слоя.—В кн.: Числ. методы в газовой динамике. Вып. 2. М.: Изд-во МГУ, 1963. с. 110—116.
18. Скобелева И. М. О возможных режимах течения ньютоновской жидкости в трубках из активного материала.—Изв. АН СССР. МЖГ, 1985, № 3, с. 88—93.
19. Nicolis G., Prigogine I. Self-organization in nonequilibrium systems. New York — Wiley, 1977. 491 p. (рус. пер.: Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. М.: Мир, 1979. 512 с.).
20. Сонина Р. С., Хаюгин В. М. Поведение артериальных микрососудов подчелюстной мышцы лягушки во время ее сокращения.—В кн.: Актуальные вопросы нарушений гемодинамики и регуляции микроциркуляции в клинике и эксперименте. М., 1984, с. 197—198.

Горький

Поступила в редакцию  
8.V.1984