

УДК 532.54:532.135

**О ВОЗМОЖНЫХ РЕЖИМАХ ТЕЧЕНИЯ НЬЮТОНОВСКОЙ  
ЖИДКОСТИ В ТРУБКАХ ИЗ АКТИВНОГО МАТЕРИАЛА**

**СКОБЕЛЕВА И. М.**

Численно исследовано в квазиодномерном безынерционном приближении осесимметричное течение ньютоновской жидкости в трубке конечной длины из нелинейного активного материала, способного в ответ на увеличение растягивающих напряжений уменьшать соответствующие деформации. Таким свойством обладают, в частности, снабженные мышечными слоями стенки мельчайших артериальных сосудов. Представлены данные об общих закономерностях смены режимов течения в зависимости от среднего давления, длины трубки и некоторых реологических параметров.

На основе доступных в свое время экспериментальных данных П. И. Усик предложил в 1973 г. простейшую модель реологических свойств стенки кровеносного сосуда, образованной активно работающими мышечными клетками (см. [1]). В этой модели учтены временные эффекты, собственные вязкоупругим телам, и возможность существования падающего участка на статической характеристике трубки в переменных давление – радиус (современные данные об этих свойствах для артерий представлены в работах [2–5]). В сочетании с квазиодномерными уравнениями движения жидкости модель П. И. Усика позволила поставить задачу об особенностях движения крови в активном сосуде [6]. В число проведенных до настоящего времени исследований входят линейный анализ устойчивости [6], аналитическое обнаружение нелинейных стационарных волн в трубке бесконечной длины [7, 8], численные расчеты для трубок конечной длины [9–12]. Однако из-за отсутствия в постановке задачи сравнительно большого числа параметров, допускающих варьирование, предложенная в [6] система уравнений еще не исследована исчерпывающим образом. Ниже предпринята попытка восполнить некоторые из имеющихся пробелов.

1. Рассмотрим в квазиодномерном безынерционном приближении течение несжимаемой жидкости с постоянной вязкостью  $\mu$  в трубке переменного радиуса  $R^\circ(x^\circ, t^\circ)$  и конечной длины  $L$ , на входе и выходе которой поддерживаются постоянные давления  $p_+^\circ$  и  $p_-^\circ$  соответственно. Радиус трубки  $R^\circ(x^\circ, t^\circ)$  и трансмуральное давление  $p^\circ(x^\circ, t^\circ)$ , равное разности среднего по сечению давления в жидкости и принятого постоянным давлением вне трубки, связаны соотношениями, в безразмерном виде принимающими форму

$$R \frac{\partial R}{\partial t} = \frac{\xi}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left( R^4 \frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad \frac{\partial R}{\partial t} = \beta \frac{\partial p}{\partial t} - [R - P_3(p)] \quad (1.1)$$

$$\xi = \frac{r_0^2 (p_+^\circ - p_-^\circ) t_r}{4\mu L^2} \quad \beta = \frac{p_+^\circ - p_-^\circ}{K}$$

Здесь сохранены обозначения [10] с той разницей, что радиус трубки обозначен через  $R$ . Полином 3-й степени  $P_3(p)$  соответствует S-образной статической характеристике трубки, изображенной на фиг. 1.

В качестве масштабов длины, времени, давления и радиуса приняты соответственно величины  $L$ ,  $t_r$  (время ретардации материала стенки [6]),  $p_+^\circ - p_-^\circ$  и некоторое характерное значение радиуса  $r_0$  (способ его конкретного выбора здесь несуществен из-за сравнительно небольшого диапазона изменений  $R^\circ(x^\circ, t^\circ)$ ). В исходных уравнениях  $K$  имеет смысл

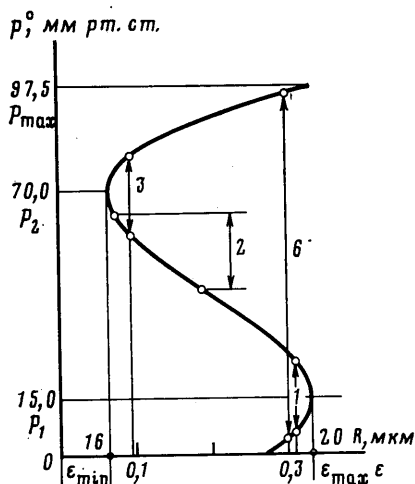
мгновенного модуля упругости, поэтому  $\beta < 1$ ; физический смысл параметра  $\xi$  — отношение  $t_r$  к характерному гидродинамическому времени, которое может изменяться в весьма широких пределах.

В качестве граничных и начальных условий возьмем следующие:

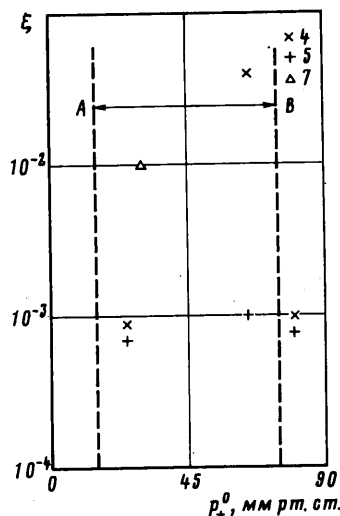
$$p(0, t) = p_+, \quad p(1, t) = p_- \quad (1.2)$$

$$R(x, 0) = R_0 = \text{const}, \quad p(x, 0) = p_+ - x \quad (1.3)$$

В систему (1.1)–(1.3) входит с учетом коэффициентов  $P_3$  девять безразмерных параметров. В принципе их число можно было бы уменьшить до семи, однако ради удобства вычислений этого здесь не сделано.



Фиг. 1



Фиг. 2

Одна из основных целей работы состоит в изучении поведения системы (1.1)–(1.3), прежде всего — разграничения стационарных и периодических (при  $t \rightarrow \infty$ ) решений, при изменении параметров  $\xi$  (за счет изменения  $L$  и  $t_r$ ) и  $p_+$  с одновременным сохранением перепада давлений  $p_+^0 - p_-^0$  и параметров статической характеристики  $R^0 = P_3^0(p^0)$ . Последние показаны на фиг. 1. Вместо использованной ранее в [10] здесь приведена кривая  $P_3^0(p^0)$ , соответствующая данным работы [4] (на существование этой работы было любезно указано Б. Н. Ключковым). Такая замена не влияет на качественный характер результатов. Кроме  $t_r$ ,  $L$ , все величины выбраны в диапазоне, соответствующем физиологическим условиям в артериолах (исключения специально оговариваются):  $r_0 = 1.5 \cdot 10^{-3}$  см,  $\mu = 0.03$  г/см·с,  $p_+^0 - p_-^0 \approx 20$  мм рт. ст.,  $\beta = 0.5$ . Численное решение системы (1.1)–(1.3) во всех случаях выполнялось методом прогонки с итерациями на ЭВМ БЭСМ-6.

2. Ранее выполненные исследования позволяли думать, что при достаточно больших значениях параметра  $\xi$  существует устойчивое стационарное решение системы (1.1)–(1.2), а ниже некоторых критических значений  $\xi = \xi_1$  реализуются (при  $t \rightarrow \infty$ ) периодические по времени режимы течения. Кроме того, существование стационарных волн в трубке бесконечной длины, доказанное аналитически для близкой к (1.1) системы уравнений [7, 8], означало, что ниже некоторых других (вообще говоря, условных) критических значений  $\xi = \xi_2$  на достаточном удалении от концов трубки сформируются структуры, близкие к стационарным волнам.

Расчеты, выполненные при различных произвольно выбранных в (1.3)  $R_0$  для трех характерных случаев (см. фиг. 1)

Номер	$p_+$	$p_-$	$p_+^\circ$ мм рт. ст.	$p_-^\circ$ мм рт. ст.
1	1,3	0,5	25	6
2	3,25	2,25	65	45
3	4	3	80	60

дали для  $\xi_1$ ,  $\xi_2$  значения, показанные на фиг. 2 (здесь приведены также результаты других вариантов расчета). Точки 4 соответствуют  $\xi_1$ , точки 5 —  $\xi_2$ , а отрезок  $AB$  — падающему участку. Даже при отсутствии более подробных данных видно, что сдвиг среднего давления, выводящий одно из граничных условий  $p_\pm$  за пределы падающего участка, стабилизирует систему (при фиксированном перепаде давлений). Сравнение полученных здесь и в [10] результатов для случая 2 показывает, что значение  $\xi_1$  слабо зависит от  $\beta$ .

Сопоставление с предсказаниями линейной теории устойчивости [6], развитой для случая 2, затруднено тем, что в ней фигурируют значения радиуса и дифференциального модуля упругости в невозмущенном состоянии. Однако можно усилить соответствующее неравенство из [6] и выразить достаточное условие устойчивости в виде

$$\xi > (a^2 r_*^3 - 4\beta r_*)^{-1} \equiv \xi_1', \quad a^2 = \pi^2 (-G) / 4(p_+^\circ - p_-^\circ) \quad (2.1)$$

Здесь  $r_*$  — минимальный безразмерный радиус трубки при стационарном течении, а  $(-G) = -dp^\circ/d\xi > 0$  имеет смысл наименьшего по длине трубки дифференциального модуля на падающем участке статической характеристики. Оценка по формуле (2.1) дает  $\xi_1' = 0,047$ , т. е. значение, весьма близкое к  $\xi_1 = 0,04$  (фиг. 2). Малое различие между  $\xi_1$ ,  $\xi_1'$  установлено также и для других вариантов численного решения задачи в случае 2 [10]. Добавим, что расчеты, в которых в качестве начальных условий вместо (1.3) было использовано стационарное решение, полученное численно для  $\xi > 0,04$ , непосредственно показали, что оно устойчиво относительно малых конечных возмущений при всех  $\xi \geq 0,04$  и неустойчиво при  $\xi < 0,04$ , причем неустойчивость приводит к развитию колебательного режима течения.

Отметим, что анализ решения при других видах зависимости  $R_0(x)$  может составить предмет отдельной публикации.

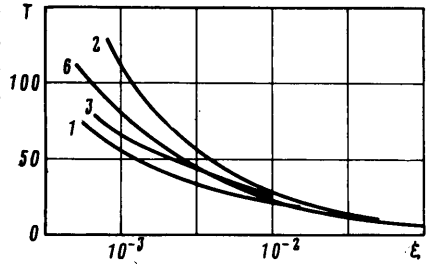
3. Когда  $\xi < \xi_1$ , решение при  $t \rightarrow \infty$  имеет колебательный характер, причем период колебаний  $T$  — один и тот же для всех  $x$ , но зависит от  $\xi$  и  $p_+$ , как показано на фиг. 3 (кривые 1—3). Если  $\xi$  близко к  $\xi_1$ , то (для случая 2)  $T$  совпадает по порядку величины с периодом консервативных волн, определяемым из линейной теории; аналогичный результат был получен ранее [10]. Монотонное и непрерывное увеличение  $T$  с уменьшением  $\xi$  сохраняется вплоть до весьма малых ( $\sim 10^4$ ) значений  $\xi$ .

Форма трубки, неизменная при  $\xi > \xi_1$ , периодически колеблется при  $\xi < \xi_1$ , однако примечательных особенностей формы, пока  $\xi$  не приблизится к  $\xi_2$ , не наблюдается.

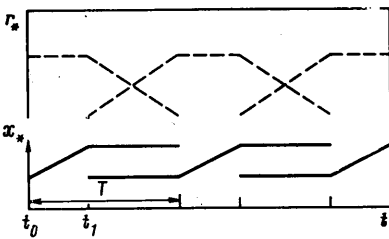
В качестве иллюстрации приведем более подробное описание результатов, полученных для случая 1, когда  $\xi_1 = 9 \cdot 10^{-4}$ . При  $\xi = 8 \cdot 10^{-4}$  максимальное сечение трубки периодически и незначительно смещается вдоль оси трубки относительно своего стационарного положения. При  $\xi = \xi_2 = 7 \cdot 10^{-4}$  режим качественно преобразуется: на расстоянии примерно  $1/5$  длины от входа в момент времени  $t_0$  возникает выраженная волна локального расширения, движущаяся вниз по потоку. Радиус максимального сечения при этом практически совпадает с максимальным радиусом при стационарном режиме. После того как волна расширения достигает сечения, отстоящего от выхода примерно на  $1/5$  длины, в момент времени  $t_1$  начинается «перетекание» поверхности трубки: расширение уменьшается, не смещаясь, и одновременно с этим в месте его первоначального воз-

никновения рождается новое расширение, которое затем в виде волны вновь перемещается вниз по потоку. Такой характер поведения формы трубки сохраняется по крайней мере до  $\xi = 5,5 \cdot 10^{-4}$ . Схематически этот процесс представлен на фиг. 4, где  $r_*(t)$ ,  $x_*(t)$  — максимальное значение радиуса трубки и координата его положения. Перетеканию соответствует та часть цикла, когда одновременно существует два локальных максимума. Практическое постоянство  $r_*(t)$  и  $x_*(t)$  в другой части цикла позволяет считать тождественной природу этих волн и стационарных волн в бесконечно длинной трубке [8].

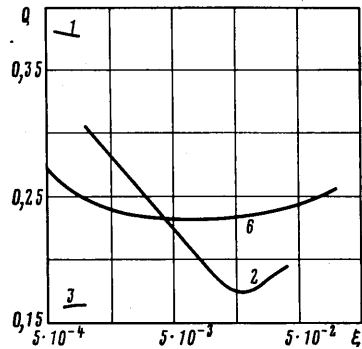
В случае 2 обнаруживаются аналогичные (в указанном смысле) «квазистационарные» волны сужения, распространяющиеся вверх по потоку, существующие в течение части цикла при  $\xi < \xi_2 = 10^{-3}$  вплоть до  $\xi = 8 \cdot 10^{-4}$ . Относительная величина сужения достигает  $\sim 10\%$  радиуса трубки при стационарном течении. Наконец, в случае 3 волны такого же типа обнаружены в интервале  $\xi_2 > \xi > 6,8 \cdot 10^{-4}$ , причем минимальное сечение в волне и в стационарном течении практически совпадают.



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

Оценка скорости волн показывает, что она может в 5 раз и более превосходить характерную скорость жидкости, т. е. в принятых обозначениях  $\dot{x}_* \sim 1/T \gg Q\xi$ .

Безразмерный (отнесенный здесь к  $\pi r_0^4 (p_+^0 - p_-^0) / \mu L$ ) расход жидкости  $Q$  (средний за период  $T$ ) через активную трубку есть, вообще говоря, немонотонная функция  $\xi$ . Правые концевые точки кривых на фиг. 5 соответствуют значениям  $\xi_1$ . В случае 2 с уменьшением  $\xi$  расход сначала уменьшается, а затем возрастает по сравнению со своим стационарным значением  $Q_s$  при  $\xi > \xi_1$ . Наибольшее снижение расхода не превышает  $10\%$  от  $Q_s$ , тогда как при  $\xi \ll \xi_1$  наблюдается значительное ( $\sim 50\%$ ) его увеличение. В случаях 1, 3 расход практически сохраняется постоянным.

4. Приведем еще некоторые дополнительные сведения о зависимости характера решения от граничных значений давления.

Пусть значения  $p_{\pm}$  выбраны соответственно на верхней и нижней ветвях статической характеристики:  $p_+ \approx 1,05$ ;  $p_- \approx 0,05$  ( $p_{\pm}^0 = 96$  и  $5$  мм рт. ст., случай 6 фиг. 1). В этом случае при  $\xi \geq 0,11$  течение стационарно, а при  $\xi < 0,11$  становится периодическим. При  $0,1 \geq \xi > 0,01$  распространяющиеся по трубке волны не имеют постоянной скорости и амплитуды, а при  $\xi = \xi_2 = 0,01$  они становятся квазистационарными: вверх по потоку в течение части цикла ( $\sim 0,6 T$ ) движется волна локального сужения, которая

затем, отразившись от входа, в виде волны локального расширения распространяется вниз по потоку, причем вдвое быстрее волны сужения. Амплитуда волны сужения составляет около 23% входного радиуса, а волны расширения — около 10%. Такая картина сохраняется до  $\xi = 5 \cdot 10^{-4}$ , так же как и отношение скоростей. Кривые  $b$  на фиг. 3, 5 изображают зависимости  $T(\xi)$  и  $Q(\xi)$ ; заметим, что  $\min Q(\xi) = Q(\xi_2)$ . Относительные скорости распространения квазистационарных волн с уменьшением  $\xi$  возрастают.

Вообще говоря, соотношение между скоростями волн расширения и сужения может меняться на обратное, если выбрать граничное значение давления  $p_+$  вблизи от верхней точки бифуркации статической кривой, сохраняя равными соответствующие граничные радиусы  $R_+$  и  $R_-$ . В рассмотренном здесь случае значение  $p_-$  находится вблизи нижней точки бифуркации.

Предварительные расчеты для случая  $p_+ = p_- = 1$  ( $p_+^{\circ} = p_-^{\circ} = 60$  мм рт. ст.) показали, что существует значение  $\xi_1 = 0,09$ , такое, что при  $\xi > \xi_1$  жидкость в трубке радиуса  $R_1 = P_3(p_+) = \text{const}$  покоится, а при  $\xi < \xi_1$  малые начальные возмущения радиуса приводят к колебательному режиму, при котором в трубке возникает локальное симметричное расширение, составляющее, например, при  $\xi = 0,05$  около 50% стационарного значения радиуса. Это расширение со временем уменьшается, не смещаясь. Одновременно вблизи концов трубки возникают области локального сужения, составляющего в среднем около 10% от  $R_1$ , которое постепенно увеличивается, приближаясь к середине трубки. Эта фаза цикла заканчивается возникновением в среднем сечении локального сужения, которое спадает и снова переходит в расширение.

5. Подведем в заключение некоторые итоги. Квазиодномерная модель течения в активной трубке (1.1) действительно обладает теми свойствами, которые были приписаны ей в начале п. 2. Хотя существующие (в том числе и описанные выше) численные решения не охватывают непрерывно весь возможный диапазон изменения граничных давлений  $p_{\pm}$ , можно все же рассчитывать, что при фиксированном  $p_+^{\circ} - p_-^{\circ}$  кривая зависимости критического значения  $\xi_1(p_+)$  плавно соединит найденные точки, но с изменением  $p_+^{\circ} - p_-^{\circ}$  эта кривая будет существенно деформироваться. В отличие от рассмотренных здесь случаев 1, 3, 6 произвольному заданию  $p_{\pm}$  соответствуют при  $t \rightarrow \infty$  неодинаковые граничные радиусы трубки, равные  $R_{\pm} = P_3(p_{\pm})$  (например, точке 7 на фиг. 2 соответствует  $p_{\pm}^{\circ} = 30$  и 10 мм рт. ст. и  $R_+ \neq R_-$ ). Это обстоятельство может сказаться количественно на функции  $\xi_1(p_+, p_+^{\circ} - p_-^{\circ})$  и, вероятно, качественно на значениях  $\xi_2$ , поскольку возникающие при  $\xi < \xi_2$  квазистационарные волны предположительно соответствуют существующим у (1.1) решениям, соединяющим два стационарных состояний с одинаковыми значениями  $R$  при  $x \rightarrow \pm \infty$ .

В п. 2—4 подчеркнута существование квазистационарных волн вплоть до определенных малых значений  $\xi$ . Это связано не столько с фактической ограниченностью объема проведенных вычислений, сколько с тем, что в каждом из рассмотренных вариантов граничных условий при некотором  $\xi = \xi_3 < \xi_2$  наблюдалось скачкообразное удвоение периода колебаний (волн). Например, в случае 3  $\xi_3 = 6,7 \cdot 10^{-4}$ . Этот факт дает основание предполагать возможность существования бифуркаций удвоения периода [13], что представляет самостоятельный интерес и требует отдельного тщательного исследования. Для ответа на вопрос о возможности реализации в физиологических экспериментах условий, при которых может возникнуть бифуркация удвоения периода, необходимы дополнительные эксперименты по определению реологических параметров материала стенки малых сосудов.

Заметим, что сравнение последовательности решений, получаемых для все меньших и меньших  $\xi$  при фиксированной длине трубки, и решений типа стационарных волн в трубке бесконечной длины [8, 12] имеет смысл лишь в определенных пределах. Об этом свидетельствует возможность су-

ществования в первом случае нескольких волн одновременно, тогда как во втором такая ситуация невозможна [12].

Лишь небольшая часть результатов, которые до сих пор принесло исследование системы (1.1), может быть сопоставлена с физиологическими данными, касающимися кровеносных сосудов. По всей видимости, для этой цели более подходящими являются усовершенствованные нульмерные модели, однако некоторые специальные задачи имело бы смысл рассмотреть и на основе квазиодномерного приближения. К их числу принадлежит, например, задача о реакции трубки на ступенчатое изменение давлений  $p_+^0 = p_-^0$ , соответствующая схеме экспериментов в [3].

Автор благодарит С. А. Регирера за полезные обсуждения.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Регирер С. А., Руткевич И. М., Усик П. И. Модель сосудистого тонуса.— Механика полимеров, 1975, № 4, с. 585–589.
2. Johnson P. C. Autoregulatory responses of cat mesenteric arterioles measured in vivo.— *Circul. Res.*, 1968, v. 22, № 2, p. 199–212.
3. Johnson P. C., Intaglietta M. Contributions of pressure and flow sensitivity to autoregulation in mesenteric arterioles.— *Amer. J. Physiol.*, 1976, v. 231, № 6, p. 1686–1698.
4. Burrows M. E., Johnson P. C. Diameter, wall tension and flow in mesenteric arterioles during autoregulation.— *Amer. J. Physiol.*, 1981, v. 241, № 6, p. 829–837.
5. Джонсон П. Периферическое кровообращение. М.: Медицина, 1982. 440 с.
6. Регирер С. А., Руткевич И. М. Волновые движения жидкости в трубках из вязкоупругого материала. Волны малой амплитуды.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1975, № 1, с. 45–53.
7. Руткевич И. М. Волновые движения жидкости в трубках из вязкоупругого материала. Стационарные нелинейные волны.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1975, № 4, с. 86–95.
8. Клочков Б. Н. Автоволновые процессы в кровеносных сосудах мышечного типа.— В сб.: Автоволновые процессы в системах с диффузией. Горький: Ин-т прикл. физики АН СССР, 1981, с. 233–242.
9. Скобелева И. М. Модель сосудистого тонуса. (Численный эксперимент).— *Механика композитных материалов*, 1980, № 1, с. 107–112.
10. Скобелева И. М. О некоторых режимах течения жидкости в трубках из вязкоупругого материала.— *Докл. АН СССР*, 1983, т. 272, № 3, с. 564–566.
11. Клочков Б. Н., Рейман А. М., Степанянц Ю. А. О математическом моделировании волновых явлений в артериолах.— *Тез. докл. 3-й Всесоюз. конф. по пробл. биомеханики. Т. 1. Рига*, 1983, с. 220–222.
12. Клочков Б. Н., Рейман А. М., Степанянц Ю. А. Нестационарные течения жидкости в трубках из вязкоупругого активного материала.— *Изв. АН СССР, МЖГ*, 1985, N 3, с. 94–102.
13. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем.— *Усп. физ. наук*, 1983, т. 141, вып. 2, с. 343–374.

Москва

Поступила в редакцию  
8.V.1984