

УДК 532.529:533.6.011.3

**ОСЕСИММЕТРИЧНОЕ ПОЛИДИСПЕРСНОЕ ДВУХФАЗНОЕ  
ТЕЧЕНИЕ С КОАГУЛЯЦИЕЙ И ДРОБЛЕНИЕМ ЧАСТИЦ  
ПРИ ПРОИЗВОЛЬНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ ОСКОЛКОВ  
ПО МАССАМ И СКОРОСТЯМ**

РЫЧКОВ А. Д., ШРАЙБЕР А. А.

Течение полидисперсной двухфазной смеси при не очень малых концентрациях дискретного компонента сопровождается массовыми столкновениями частиц различной дисперсности, которые приводят к изменению фракционного состава конденсата. Численное исследование неодиомерного полидисперсного течения впервые было проведено в работе [1], где использовалась гипотеза о «полной» коагуляции частиц при столкновениях. Вместе с тем в условиях, характерных для многих приложений (например, для случая двухфазного течения в соплах Лавалья), столкновения капель сопровождаются не только коагуляцией, но и интенсивным их дроблением [2]. Одним из авторов данной работы ранее были выполнены расчеты параметров полидисперсного осесимметричного течения с коагуляцией и дроблением частиц [3], причем использовалась простейшая («монодисперсная», согласно терминологии [2]) модель дробления. В соответствии с этим предполагалось, что при столкновении частиц  $i-j$  ( $\delta_i > \delta_j$ ,  $\delta$  — диаметр частиц) могут образовываться только осколки фракции  $j$ , начальная скорость и температура которых равны соответствующим параметрам крупной исходной капли. Более общая («полидисперсная») модель дробления, в соответствии с которой осколки могут иметь произвольные начальные размеры, скорости и температуры, используется в [2, 4], однако здесь не учитывается обратное влияние частиц на газ. В настоящей работе приводятся некоторые результаты численного исследования особенностей двумерного полидисперсного течения на базе использования общей модели дробления частиц при столкновениях [2] с учетом обратного влияния частиц. При этом особое внимание уделяется анализу влияния выбора модели дробления на локальные и интегральные параметры потока.

1. Будем считать выполненными все условия, перечисленные, например, в [2], и используем для описания течения модель многоскоростной и многотемпературной среды. При анализе взаимодействия частиц различных фракций применим «непрерывный» подход [2] (т. е. заменим дискретное изменение параметров частиц при столкновениях непрерывным) и метод Лагранжа (т. е. будем рассматривать фиксированные, «меченые» частицы, масса которых меняется с течением времени). Если считать конденсат состоящим из конечного числа  $N$  монодисперсных фракций, которые нумеруются в порядке возрастания размера частиц, исходная система уравнений течения (в форме законов сохранения) может быть записана следующим образом:

$$\nabla y \rho w = 0; \quad \nabla y \rho u w + \frac{\partial}{\partial x} y p = y \sum_{i=1}^N \rho_i A_i (u_i - u) \quad (1.1)$$

$$\nabla y \rho v w + \frac{\partial}{\partial y} y p = y \sum_{i=1}^N \rho_i A_i (v_i - v) \quad (1.2)$$

$$\nabla y \rho H w = y \sum_{i=1}^N \rho_i \{ B_i (T_i - T) + A_i [(u_i - u) u_i + (v_i - v) v_i] \} \quad (1.3)$$

$$\begin{aligned} \nabla y \rho_i w_i = y \left[ n_i \sum_{j=1}^N K_{ji} \Phi_{ji} \rho_j - \rho_i \sum_{j=i}^N K_{ij} n_j + \right. \\ \left. + \sum_{j=i}^N \sum_{k=1}^j K_{kj} (1 - \Phi_{kj}) \rho_k n_j \alpha_{kji} \right] = y D_i \quad (1.4) \end{aligned}$$

$$\nabla y n_i w_i = y \left[ -n_i \sum_{j=i}^N K_{ij} n_j + m_i^{-1} \sum_{j=i}^N \sum_{k=1}^j K_{kj} (1 - \Phi_{kj}) \rho_k n_j \alpha_{kji} \right] \quad (1.5)$$

$$\begin{aligned} \nabla y \rho_i u_i w_i = y \left[ \rho_i A_i (u - u_i) + n_i \sum_{j=1}^i K_{ji} \Phi_{ji} \rho_j (u_{ji} - u_i) + \right. \\ \left. + \sum_{j=i}^N \sum_{k=1}^j K_{kj} (1 - \Phi_{kj}) \alpha_{kji} \rho_k n_j (u_{kji} - u_i) + u_i D_i \right] \quad (1.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla y \rho_i v_i w_i = y \left[ \rho_i A_i (v - v_i) + n_i \sum_{j=1}^i K_{ji} \Phi_{ji} \rho_j (v_{ji} - v_i) + \right. \\ \left. + \sum_{j=i}^N \sum_{k=1}^j K_{kj} (1 - \Phi_{kj}) \alpha_{kji} \rho_k n_j (v_{kji} - v_i) + v_i D_i \right] \quad (1.7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla y \rho_i T_i w_i = y \left\{ \rho_i B_i c_B^{-1} (T - T_i) + n_i c_B^{-1} \sum_{j=1}^i K_{ji} \Phi_{ji} \rho_j [E_{ji} - E_i + \right. \\ \left. + u_i (u_i - u_{ji}) + v_i (v_i - v_{ji})] + c_B^{-1} \sum_{j=i}^N \sum_{k=1}^j K_{kj} (1 - \Phi_{kj}) \alpha_{kji} \rho_k n_j [E_{kji} - E_i + \right. \\ \left. + u_i (u_i - u_{kji}) + v_i (v_i - v_{kji})] + T_i D_i \right\} \quad (1.8) \end{aligned}$$

$$H = \kappa p / [(\kappa - 1) \rho] + 0,5 (u^2 + v^2) = c_p T + 0,5 (u^2 + v^2) \quad (1.9)$$

$$K_{ji} = \pi (\delta_i + \delta_j)^2 |w_j - w_i| C_{ji} / 4 \quad (1.10)$$

$$A_i = \frac{3 \xi_i \eta \operatorname{Re}_i}{4 \rho_B \delta_i^2} = \frac{3 \xi_i \rho |w - w_i|}{4 \rho_B \delta_i}, \quad B_i = \frac{6 \eta c_p \operatorname{Nu}_i}{\rho_B \delta_i^2 \operatorname{Pr}} \quad (1.11)$$

Здесь  $w = u e_x + v e_y$  — вектор скорости (величины с индексами  $i, j, k$  относятся к  $i, j, k$ -й фракциям дискретного компонента, с индексом  $v$  — к веществу частиц, величины без индекса — к газу);  $e_x, e_y$  — орты осей цилиндрической системы координат  $x, y$ ;  $T, p, \rho$  — температура, давление и плотность ( $\rho_i$  — «распределенная» плотность частиц  $i$ , т. е. их масса в единице объема двухфазной смеси);  $H$  — энтальпия торможения;  $\kappa$  — показатель изэнтропии;  $c$  — теплоемкость;  $c_p$  — теплоемкость газа при  $p = \text{const}$ ;  $n_i$  — количество частиц  $i$  в единице объема смеси;  $m$  — масса частиц;  $E_i$  — полная энергия;  $K_{ji}$  — константа взаимодействия;  $C_{ji}$  — коэффициент осаждения;  $A_i, B_i$  — параметры динамического и теплового взаимодействия частиц с газом;  $\eta$  — динамическая вязкость;  $\xi$  — коэффициент аэродинамического сопротивления;  $\operatorname{Nu}, \operatorname{Pr}$  — числа Нуссельта и Прандтля.

При описании взаимодействия фракций в рамках непрерывного подхода интенсивность переноса вещества при столкновениях характеризуется величиной  $\Phi_{ji}$ , которая представляет собой математическое ожидание отношения изменения массы крупной частицы  $i$  к общей массе столкнувшихся с ней мелких частиц  $j$  [2]. Кроме того, в уравнениях (1.4)–(1.8) используются следующие величины:  $\alpha_{kji}$  – массовая нормированная функция распределения по размерам осколков  $i$ , образовавшихся при столкновении  $k-j$  ( $\delta_j > \delta_i$ ,  $\delta_k < \delta_j$ );  $u_{kji}$ ,  $v_{kji}$ ,  $T_{kji}$ ,  $E_{kji} = c_B T_{kji} + 0,5(u_{kji}^2 + v_{kji}^2)$  – начальные значения составляющих скорости, температуры и энергии указанных осколков  $i$ ;  $u_{ji}$ ,  $v_{ji}$ ,  $E_{ji}$  – начальные составляющие скорости и энергия той части массы частиц фракции  $i$ , которая переходит в нее из более мелкой фракции  $j$  [2].

Начальные параметры осколков равны

$$u_{kji} = u_j + \beta(u_k - u_j), \quad v_{kji} = v_j + \beta(v_k - v_j), \quad T_{kji} = T_j + \gamma(T_k - T_j) \quad (1.12)$$

$$\Phi_{ji} u_{ji} = u_j - (1 - \Phi_{ji}) u_{ji} \quad (1.13)$$

где  $\beta$ ,  $\gamma$  – эмпирические константы,  $v_{ji}$ ,  $E_{ji}$  определяются аналогично (1.13).

В уравнении неразрывности частиц  $i$  (1.4) первый член правой части учитывает переход вещества мелких частиц  $j$  во фракцию  $i$ , второй – гибель частиц  $i$  при их взаимодействии с более крупными, третий – «рождение» осколков  $i$  при всевозможных взаимодействиях  $k-j$ . В уравнении (1.5) относительно счетной концентрации частиц, естественно, учитываются только два последних фактора. Уравнения движения и теплообмена частиц (1.6)–(1.8) записаны применительно к случаю использования гипотезы о равномерном распределении избытка импульса и энергии «новых» частиц  $i$  между всеми частицами данной фракции [2]. В (1.6) первый член правой части учитывает обмен продольным импульсом с газом, второй – отличие скорости новой (перешедшей из фракции  $j$ ,  $j < i$ ) части массы фракции  $i$  от скорости старых частиц  $i$ , третий – отличие скорости осколков  $i$  от скорости старых частиц, четвертый – изменение импульса фракции  $i$  за счет поступления в нее нового вещества (ср. уравнение (1.4)).

Структура уравнений (1.7), (1.8) аналогична. В случае использования иных гипотез о перераспределении избытка импульса и энергии «столкновительные» члены должны фигурировать в уравнениях сохранения для газа (1.1)–(1.3) [2].

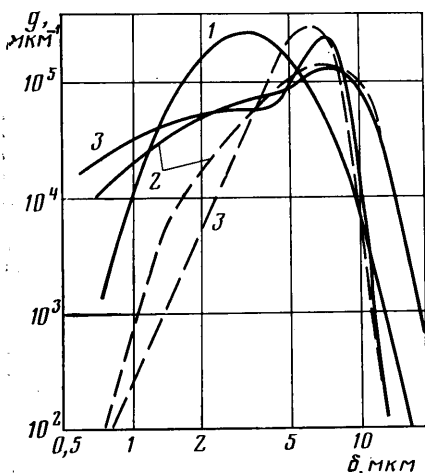
Если в уравнениях (1.4)–(1.8) положить  $\alpha_{kji} = \delta_{ki}$  ( $\delta$  – символ Кронекера),  $\beta = \gamma = 0$ , то из них нетрудно получить уравнения движения частиц для монодисперсной модели дробления [3].

Исходная система уравнений (1.1)–(1.8) распадается на две подсистемы, связанные между собой только через члены межфазового взаимодействия: подсистему (1.1)–(1.3), описывающую течение газа (с учетом обратного влияния частиц), и подсистему (1.4)–(1.8). В сверхзвуковой области обе системы являются « $x$ -гиперболическими», в то время как при дозвуковом течении «газовая» подсистема относится к эллиптическому типу, а «конденсатная» – по-прежнему к  $x$ -гиперболическому [6].

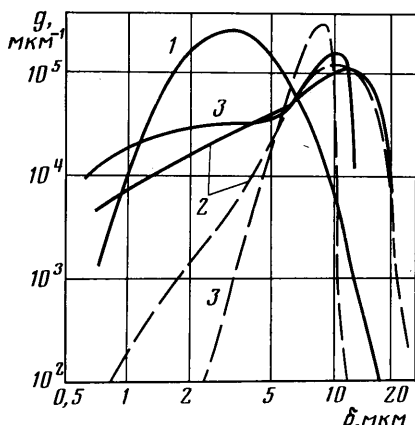
2. Расчеты проводились применительно к соплу Лавала, контур которого  $y_w(x)$  состоит из шести участков: 1) входной цилиндрической части ( $-2,3 \leq x \leq -1,91$ ,  $y_w = 2,5$ , здесь и ниже все размеры отнесены к радиусу минимального сечения сопла  $r_*$ , величины с индексом 0 относятся к входному сечению,  $x=0$  соответствует минимальному сечению); 2) дуги окружности радиусом  $R_1 = 0,75$  ( $-1,91 \leq x \leq -1,38$ ); 3) конуса с полууглом  $\theta = 45^\circ$  ( $-1,38 \leq x \leq -0,71$ ); 4) дуги окружности радиусом  $R_2 = 1$  ( $-0,71 \leq x \leq 0$ ); 5) дуги окружности радиусом  $R_3 = 0,25$  ( $0 \leq x \leq 0,18$ ); 6) профилированной сверхзвуковой части, очерченной по дуге кубической параболы (координаты выходного сечения  $x_a = 20$ ,  $y_a = 12$ ). Дотрансзвуковая область расчи-

тывалась методом установления, причем подсистема (1.4)–(1.8) решалась в стационарной постановке; итерационный процесс организовывался так же, как и в [1, 3].

Сверхзвуковое течение рассчитывалось маршевым методом. Для нестационарного аналога (1.1)–(1.3) во входном сечении задавалось три граничных условия: 1)  $H(x_0, y, t) = \text{const}$ ; 2)  $S(x_0, y, t) = p/\rho^x = \text{const}$ ; 3)  $v(x_0, y, t)/u(x_0, y, t) = (y/y_w) dy_w(x_0)/dx$  (здесь  $S$  – энтропия,  $t$  – время). Граничные условия во входном сечении для уравнений (1.4)–(1.8) определялись на основании обычно используемой гипотезы о равномерно-



Фиг. 1



Фиг. 2

сти и равновесности двухфазного течения. На оси потока и на стенке сопла для газа задавались условия непротекания ( $v=0$  на оси и  $v/u = dy_w/dx$  на стенке). Заметим, что на оси и на предельных траекториях частиц нет необходимости в задании граничных условий для подсистемы (1.4)–(1.8), поскольку для частиц решается в сущности задача Коши с начальными данными во входном сечении. При попадании частиц на стенку сопла предполагалось их полное поглощение [2, 3].

Исходные данные для расчетов принимались следующими:  $p_0 = 4$  Мн/м<sup>2</sup>;  $T_0 = 3500$  К;  $\mu = 20$  кг/к·моль ( $\mu$  – молекулярная масса газа);  $\kappa = 1,2$ ;  $r_* = 0,1$  м;  $c_v = 1900$  Дж/кг·К;  $Pr = 0,75$ . Вязкость газа и вещества частиц аппроксимировались степенными функциями температуры, плотность и поверхностное натяжение – линейными. Фракционный состав исходного конденсата считался нормально-логарифмическим со среднемассовым размером частиц  $\delta_{4,30} = 4$  мкм и среднеквадратичным уклоном  $\sigma = 1,5$ . Рассматривалось 10 фракций, размер частиц которых во входном сечении был равен  $\delta_{i,0}$ , мкм = 0,73; 1,03; 1,46; 2,08; 2,95; 4,19; 5,95; 8,45; 12,0; 17,0. Значения коэффициента сопротивления  $\xi$  рассчитывались по формулам Хендерсона [5], значения  $Nu$ ,  $\alpha_{kj}$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\Phi_{ji}$  – так же, как и в работе [4].

Методика расчета описана в работе [7]. Использовалось сгущение разностной сетки в поперечном направлении, а также перенос левой границы области [7], что позволило вдвое сократить количество узлов по сравнению с [3] при той же точности расчета. Время счета на ЭВМ БЭСМ-6 составляло 3–4 ч.

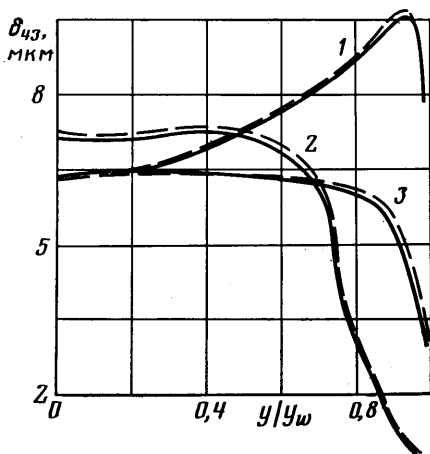
Для сравнения проводились также расчеты с использованием монодисперсной модели дробления [3]. Эти данные приведены на всех фигурах штриховыми линиями (результаты расчета по формулам (1.1)–(1.8) – сплошными линиями).

На фиг. 1 изображены нормированные массовые функции распределения частиц по размерам в трех точках (кривая 1 –  $x = -1,9$ ; 2 –  $x = 0$ ;

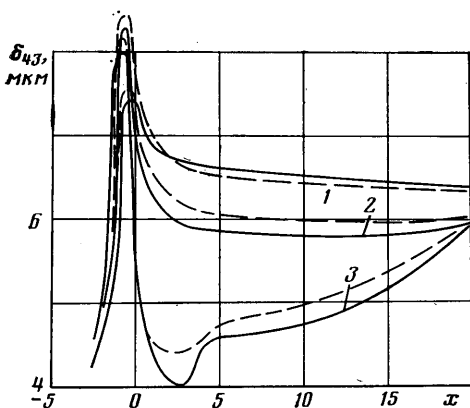
$z - x = 18$ ) на оси потока при  $z = 0,4$  (здесь  $z$  — массовое содержание конденсата;  $g(\delta)d\delta$  — массовая доля частиц  $\delta$ ,  $d\delta$  (интеграл от функции  $g$  по области изменения  $\delta$  равен единице)). Для сечения  $x = -1,9$  результаты расчета по монодисперсной модели не приведены, поскольку они практически совпадают со сплошной линией 1 (напомним, что во входном сечении поток предполагается равновесным, так что на небольшом участке  $-2,3 < x < -1,9$  частицы еще не успели приобрести заметно различающиеся скорости и интенсивность взаимодействия фракций невелика). В то же время в минимальном сечении спектры размеров частиц, рассчитанные по моно- и полидисперсной моделям, существенно различаются, в особенности в области достаточно малых частиц.

Так, при  $\delta \approx 0,7$  мкм значения  $g$ , соответствующие сплошной и штриховой кривым, различаются более чем на два порядка. Это расхождение становится еще больше для сверхзвуковой области (кривые 3).

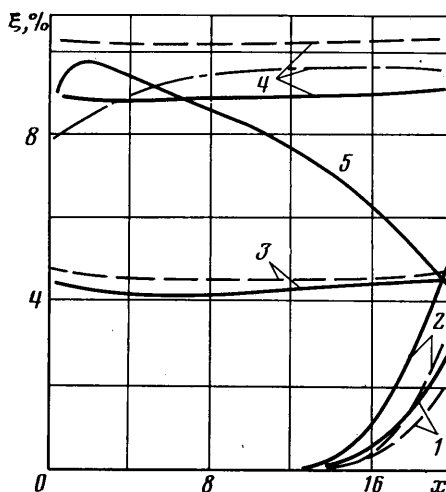
Характерно, что монодисперсная модель приводит к уменьшению содержания как крупных (за счет дробления), так и мелких (за счет взаимодействия с другими фракциями) частиц в сверхзвуковой части сопла (ср. кривые 2 и 3). В то же время при использовании полидисперсной модели содержание тонких фракций продолжает увеличиваться вследствие образования соответствующих осколков при дроблении



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

крупных и средних частиц. В итоге монодисперсная модель (так же как и в одномерных расчетах [2]) приводит к более «острой» функции распределения частиц по размерам практически во всех сечениях потока. Отмеченные явления еще более выражены при повышенном содержании частиц (фиг. 2, здесь  $z = 0,6$ ; обозначения те же, что и на фиг. 1). Интересно, что в этом случае монодисперсная модель приводит к практически полному исчезновению мелких фракций вблизи выходного сечения.

Фигура 3 иллюстрирует изменение среднего размера частиц  $d_{4,3}$  в трех поперечных сечениях сопла при  $z = 0,4$  (кривая 1 —  $x = -0,6$ ; 2 —  $x = 0,6$ ;

$z - x = 18$ ). Полученные из расчета ступенчатые функции  $\delta_{43}(y/y_w)$ , соответствующие дискретному фракционному составу конденсата (10 монодисперсных фракций, см. выше), на графиках фиг. 3 условно сглажены применительно к реальному непрерывному распределению частиц по размерам. Вблизи стенки резкое снижение  $\delta_{43}$  объясняется расслоением предельных траекторий частиц различного размера — крупные частицы концентрируются в центральной зоне. В до- и транзвуковой области использование монодисперсной модели приводит к некоторому завышению среднего размера частиц по всему сечению, а в сверхзвуковой — к завышению на периферии и занижению вблизи оси. В то же время средние по сечению значения  $\delta_{43}$  всегда несколько выше при расчете по монодисперсной модели. Это видно на фиг. 4, где показано продольное распределение среднемассового размера частиц при  $z=0,4$  (кривые 1 соответствуют оси потока, 2 — среднегеометрическому значению по поперечному сечению, 3 — среднерасходному значению).

Расчеты показали, что выбор модели дробления частиц практически не оказывает влияния на параметры газа. Например, при  $z=0,6$  в трех точках выходного сечения ( $y=0$ ;  $y=0,5y_w$ ;  $y=y_w$ ) безразмерные продольные скорости газа при использовании полидисперсной модели равны  $u=1,79$ ;  $1,79$ ;  $2,56$ , а при расчете по монодисперсной модели  $1,76$ ;  $1,76$ ;  $2,57$  соответственно. Интересно, что выбор модели слабо влияет также на скорости частиц и положение их предельных траекторий, за исключением наиболее крупных фракций. Так, при  $z=0,4$  в выходном сечении ординаты предельных траекторий равны  $y_{s,9}=10,96$ ;  $y_{s,10}=10,4$  (полидисперсная модель) и  $y_{s,9}=11,12$ ;  $y_{s,10}=10,59$  (монодисперсная модель). Это расхождение, по-видимому, объясняется влиянием столкновений с мелкими частицами, которые в этой области движутся по более пологим траекториям.

Резкое изменение фракционного состава частиц при переходе от одной модели к другой (см. фиг. 1, 2) при практически неизменных кинематических параметрах приводит к тому, что монодисперсная модель предсказывает искаженное распределение плотности частиц по сечению сопла. Ниже в таблице в качестве примера приведены значения безразмерной распределенной плотности частиц в поперечном сечении потока при  $z=0,4$ . Отмеченное явление особенно заметно вблизи стенки, выше предельных траекторий крупных фракций, где плотности, рассчитанные по различным моделям, различаются в несколько раз.

$x=0,6$			$x \approx 7$		
$y/y_w$	$\Sigma \rho_i / \rho$ модель		$y/y_w$	$\Sigma \rho_i / \rho$ модель	
	полидисперсная	монодисперсная		полидисперсная	монодисперсная
0	0,897	0,919	0	1,759	1,49
0,4	1,012	1,04	0,67	1,036	1,096
0,6	1,156	1,206	0,86	0,422	0,326
0,8	0,379	0,251	0,945	0,079	0,039
0,885	0,056	0,021	0,99	0,0013	0,00019
0,96	0,0076	0,0014			
1	0,0013	0,00016			

На фиг. 5 показано изменение потерь пустотного удельного импульса из-за выпадения частиц на стенку (1, 2), запаздывания (3, 4) и рассеяния (5) по длине сопла (здесь кривые 1, 3, 5 соответствуют  $z=0,4$ , кривые 2, 4 —  $z=0,6$ ; сплошными и штриховыми линиями 3, 4 обозначены потери из-за запаздывания частиц, вычисленные без учета рассеяния, штрихпунктирной кривой 4 — эти же потери для полидисперсной модели,

рассчитанные с учетом рассеяния). Прежде всего отметим, что использование монодисперсной модели приводит к существенному (до 1,5 раз при высоких концентрациях конденсата) занижению потерь из-за выпадения частиц. Естественно, это объясняется различиями во фракционном составе частиц: как известно, прежде всего выпадают на стенку тонкие и средние фракции. Кроме того, несколько завышенными оказываются потери из-за запаздывания. На величину потерь из-за рассеяния выбор модели влияет очень слабо.

Таким образом, приведенные результаты показывают, что расчеты с использованием монодисперсной и полидисперсной (более точной) моделей дают существенно различные значения ряда локальных параметров течения (прежде всего фракционного состава конденсата), а также величины отдельных составляющих потерь удельного импульса. Поэтому для точных расчетов, например для детализации потерь и изыскания путей их уменьшения, следует использовать полидисперсную модель дробления частиц при столкновениях. Вместе с тем для приближенного определения общих характеристик потока вполне пригодна и монодисперсная модель, использование которой позволяет экономить до 30–40% машинного времени.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кисаров Ю. Ф., Липанов А. М. Расчет параметров двухфазного течения в осесимметричном сопле Лавала с учетом коагуляции и дробления частиц.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1975, № 4, с. 161–165.
2. Стернин Л. Е., Маслов Б. Н., Шрайбер А. А., Подвысоцкий А. М. Двухфазные моно- и полидисперсные течения газа с частицами. М.: Машиностроение, 1980. 175 с.
3. Рычков А. Д. Численное исследование двухфазных течений в осесимметричных соплах Лавала с учетом процессов коагуляции и дробления частиц конденсата.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 1, с. 82–90.
4. Маслов Б. Н., Стернин Л. Е., Шрайбер А. А. Численное исследование особенностей двухфазного течения с коагуляцией и дроблением частиц в осесимметричных соплах Лавала.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 3, с. 145–153.
5. Henderson C. B. Drag coefficients of spheres in continuum and rarefield flows.— AIAA Journal, 1976, v. 14, № 6, p. 707–708. Reply by Author to M. J. Walsh.— AIAA Journal, 1977, v. 15, № 6, p. 894–895. (Рус. перев.: Хендерсон. Коэффициенты сопротивления сферы в течениях разреженного газа и сплошной среды.— Ракетная техника и космонавтика, 1976, т. 14, № 6, с. 5–7. Ответ автора Уолшу.— Ракетная техника и космонавтика, 1977, т. 15, № 6, с. 150–151).
6. Крайко А. Н. Решение прямой задачи теории сопла Лавала при течении смеси газа и инородных (твердых или жидких) частиц.— В кн.: Парожидкостные потоки. Минск: Ин-т тепло- и массообмена, 1977, с. 136–154.
7. Рычков А. Д. Применение прямых вариационных методов для оптимизации осесимметрических сопел Лавала в случае равновесных и неравновесных двухфазных течений.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1982, № 1, с. 181–183.

Новосибирск,  
Киев

Поступила в редакцию  
14.II.1984