

УДК 532.524

## РЕЖИМЫ ДВУМЕРНЫХ ВОЛН ТОНКОГО СЛОЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

ДЕМЕХИН Е. А., ШКАДОВ В. Я.

Первые эксперименты по плоским волнам в стекающей под действием веса пленке жидкости выполнены в [1, 2]. Наблюдались два типа волн: регулярные, близкие к синусоидальным, волны и крупноамплитудные образования с крутым передним фронтом и затухающими осцилляциями перед ним. В [3, 4] была построена теория, полностью описавшая первый тип волн.

Количественные данные по второму типу волн отсутствовали. Так как эти волны создавались резкими возмущениями в начальном сечении и вследствие малой длины рабочего участка успевали проходить расстояние порядка четырех-пяти длин волн, то было не ясно, являются ли они нестационарными образованиями, следом начального возмущения. В более поздних экспериментальных работах [5-7] содержатся отрывочные сведения о втором типе волн. Только в 70-х годах были проведены эксперименты, убедительно показавшие, что синусоидальные режимы Капицы — не единственные [8-10]. В этих экспериментах впервые были представлены данные по амплитудам, скоростям, профилям волн для второго режима течения.

В [11, 13] содержатся попытки описать второй волновой режим. Однако в настоящее время нет теории, дающей количественное соответствие с [8-10]. В [14] было показано, что кроме однопараметрического семейства периодических волн, ответвляющегося от плоскопараллельного решения (первое семейство), существует еще одно семейство волн (второе семейство). Это семейство ответвляется от волн первого семейства с удвоенным периодом и при стремлении волнового числа к нулю переходит в положительный солитон  $c > 3$ . В [15] показано наличие других семейств кроме указанных выше.

Работы [14, 15] посвящены в основном математической стороне задачи. В настоящей работе впервые построены теоретические решения, полностью количественно описывающие второй режим течения.

Периодические стационарные волны в стекающем под действием силы тяжести слое вязкой жидкости при умеренных числах Рейнольдса можно описать уравнениями [3, 4]

$$h_{xxx} + \delta \left( \frac{6(c - q_0)^2}{h^3} - \frac{c^2}{h} \right) h_x + \frac{h_3 - ch + c - q_0}{h^3} = 0 \quad (1)$$

$$h(0) = h(2\pi/\alpha), \quad h_x(0) = h_x(2\pi/\alpha), \quad h_{xx}(0) = h_{xx}(2\pi/\alpha) \quad (2)$$

$$\frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi/\alpha} h \, dx = 1 \quad (3)$$

Здесь  $h(x)$  — толщина слоя, отсчитываемая от жесткой стенки;  $\alpha$  — волновое число;  $c$  — скорость волны;  $q_0$  — средний на периоде волны расход;  $\delta$  — модифицированное число Рейнольдса,  $\delta = 3^{-7/5} 5^{-1} \gamma^{-1/5} R^{11/5}$ ;  $\gamma = \sigma r^{-1} \nu^{-1/3} g^{-1/6}$  — параметр, описывающий физические свойства жидкости;  $R$  — число Рейнольдса, построенное по среднему расходу при безволновом течении. Все величины сделаны безразмерными отнесением к плотности жидкости, безволновой толщине и безволновой средней скорости. Считается, что нелинейные эффекты искажают расход в слое, оставляя его тол-

щину без изменения. Для перехода к одному параметру  $\delta$  вместо двух  $R$  и  $\gamma$  введено растяжение:  $x \rightarrow \chi x$ ;  $\alpha \rightarrow \alpha/\chi$ ;  $\kappa = 3^{-2/\alpha} \gamma^{1/2} R^{-2/\alpha}$  [16, 17].

Если считать  $\delta$  и  $c$  заданными, то  $\alpha$ ,  $q_0$  и профиль волны должны определяться в ходе решения. Перепишем (1)–(3) в новых переменных

$$h = \frac{H}{\chi}, \quad x = \frac{\xi}{\chi^{1/2}}, \quad c = \frac{D}{\chi^2}, \quad q_0 = c + \frac{1-D}{\chi^3} \quad (4)$$

$$\delta = \Delta \chi^{1/2}, \quad \alpha = A \chi^{-1/2}, \quad \lambda = \frac{2\pi}{A}$$

$$\chi = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda H d\xi \quad (5)$$

$$H_{\xi\xi\xi} + \Delta \left( \frac{6(1-D)^2}{H^3} - \frac{D^2}{H} \right) H_\xi + \frac{H^2 - DH + D - 1}{H^3} = 0 \quad (6)$$

$$H(0) = H(\lambda), \quad H_\xi(0) = H_\xi(\lambda), \quad H_{\xi\xi}(0) = H_{\xi\xi}(\lambda) \quad (7)$$

Если задать  $\Delta$  и скорость волны  $D$ , то длина волны  $\lambda$  и ее профиль  $H(\xi)$  находятся решением (6)–(7). Решение строится сведением к задаче Коши с последующим численным интегрированием. Начальная точка  $\xi=0$  выбирается на вершине волны  $H_\xi=0$ . Неизвестные  $H(0)$ ,  $H_{\xi\xi}(0)$  подбираются так, чтобы обратить невязки  $H(0) - H(\lambda)$ ,  $H_{\xi\xi}(0) - H_{\xi\xi}(\lambda)$  в нуль. В качестве начального приближения использовались  $\Delta$  и  $D > 3$  для положительного солитона,  $\lambda = \infty$ . Решение затем продолжалось по параметру в сторону меньших  $\lambda$ .

Указанным методом была просчитана вся область экспериментальных данных по второму семейству для умеренных чисел Рейнольдса [8–10]: по  $\Delta \in [0,03; 0,12]$  и по волновому числу от нуля (рождение второго семейства) до точки бифуркации и перехода в первое семейство с удвоенным периодом (гибель второго семейства [14]).

В результате расчетов выяснилось, что при изменении периода от бесконечности до  $\lambda_{\min} \approx (1,5-2)l$ , где  $l$  — характерная ширина волны, скорость  $D$  и форма волны практически не меняются (ср. некоторые результаты для периодических волн:  $\Delta = 0,045$ ;  $\lambda_{\min} = 20$ ;  $D = 6,324$ ;  $a = 1,656$ ;  $\Delta =$

$\Delta$	$D$	$a$	$H_{\min}$	$b_1$
0,03	3,646	0,336	0,936	1,37
0,036	4,090	0,628	0,886	2,47
0,0392	4,957	0,976	0,834	3,79
0,045	6,326	1,657	0,749	7,24
0,05	6,872	1,961	0,723	9,47
0,0565	7,241	2,205	0,702	11,70
0,06	7,362	2,301	0,695	12,50
0,07	7,561	2,485	0,687	15,07
0,12	7,706	2,762	0,650	25,70

$= 0,06$ ; 15; 7,310; 2,85;  $\Delta = 0,07$ ; 17; 7,512; 2,469 с данными в таблице для  $\lambda = \infty$ ). Непосредственно перед точкой бифуркации  $\lambda_0$  и исчезновением второго семейства происходит резкое изменение  $D$  и  $H(\xi)$  и переход в первое семейство. Эта область довольно узкая —  $(\lambda_{\min} - \lambda_0)$  порядка  $(0,5-1)l$ . С увеличением  $\Delta$   $(\lambda_{\min} - \lambda_0)$  уменьшается, т. е. каждая отдельная волна сильно внутренне сцеплена и слабо взаимодействует с соседними. Преобразование (4), (5) можно ввести и для первого семейства. Зависимости волн от  $\alpha/\alpha_0 = 0$  до  $\alpha/\alpha_0 \approx 0,3-0,4$ ;  $\alpha_0 = \sqrt{15\delta}$ , при этом сливаются в одну линию с независимым параметром  $\Delta$ . Так как на эксперименте эти волны не реализуются, то везде дальше речь идет только о втором семействе.

Итак, достаточно составить таблицу параметров только уединенных волн и графики их профилей. Параметры любой волны второго семейства (исключая узкую область вблизи  $\lambda_0$ ) можно пересчитать из таблицы солитонов. Для возможности такого пересчета необходимо сделать еще один шаг. Разложим (5) в ряд Лорана

$$\chi = 1 + b_1/\lambda + \dots \quad (8)$$

и ограничимся двумя членами,  $b_1 = b_1(\Delta)$ . Если бы  $H(\xi)$  была финитной функцией, то двухчленное разложение было бы точным. Так как солитон экспоненциально затухает на  $\pm\infty$ , то достаточно далеко от вершины обрезание ряда на  $b_1$  является приближением того же порядка точности, что и приближение конечного  $\lambda$ . В таблице приведены параметры уединенных волн: при каждом  $\Delta$  даны фазовая скорость солитона  $D$ , амплитуда  $a$ , минимальная толщина  $H_{\min}$ , значение параметра  $b_1$ . На фиг. 1 показаны профили уединенных волн при  $\Delta = 0,036; 0,045; 0,06; 0,12$  (кривые 1-4). При увеличении числа Рейнольдса амплитуда волны  $a = H_{\max} - H_{\min}$ , скорость  $D$ , параметр  $b_1$ , характеризующий площадь солитона, растут. Длина осцилляционной части и ее амплитуда также увеличиваются. При достаточно больших  $\Delta$  амплитуда солитона почти в 3 раза превосходит толщину вязкого подслоя, а фазовая скорость более чем в 7 раз превышает среднюю скорость в подслое. Иначе говоря, если имеется последовательность волн с достаточно короткой длиной остаточного слоя, то основной расход в волне переносится ее выступающей частью.

Для перехода к первоначальным переменным необходимо, задав  $\lambda$  и получив из (8) значение  $\chi$ , воспользоваться формулами (4). Таким образом, данные таблицы можно развернуть в зависимости  $c(\delta, \alpha)$ ,  $q_0(\delta, \alpha)$ ,  $a(\delta, \alpha)$ ,  $h_{\min}(\delta, \alpha)$ . Все экспериментальные данные [8-10] по второму семейству могут быть пересчитаны из последних зависимостей. Профиль волны при этом соответствует тому или иному значению  $\Delta$  на фиг. 1.

Было обнаружено, что зависимость  $q_0(\alpha)$  при фиксированном  $\delta$  имеет максимум. Параметры максимума можно определить аналитически

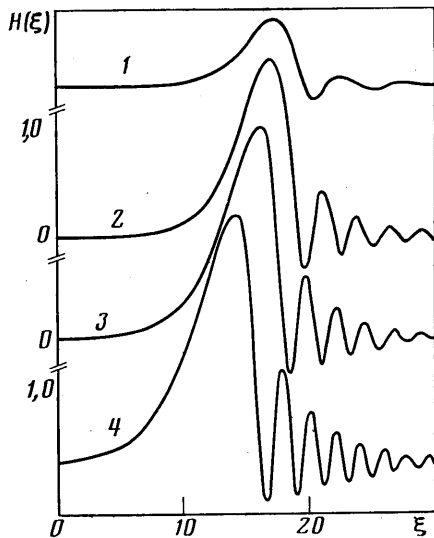
$$\delta = \Delta \left( \frac{3(D-1)}{2D} \right)^{1/3}, \quad \alpha = \frac{\pi(D-3)}{b_1 D} \left( \frac{3(D-1)}{2D} \right)^{1/3}$$

$$q_0 = \frac{4D^3}{27(D-1)^2}, \quad c = \frac{4D^3}{9(D-1)^2} \quad (9)$$

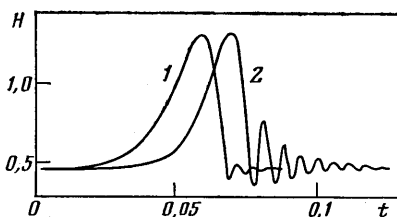
В [3] был обнаружен аналогичный максимум для волн, близких к синусоидальным. Наличие максимума  $q_0$  (точнее, минимума толщины слоя, так как в [3] было проведено другое обезразмеривание) привело к понятию оптимальных режимов, соответствующих наблюдавшимся в эксперименте [3, 4].

Ниже дана экспериментальная зависимость параметра  $\alpha \langle R \rangle / \nu = 15 \alpha \delta q^{1/3}$  (вторая строка) от  $\langle R \rangle / \nu^{3/4} = 7,508 \delta^{3/4} q_0$  ([10], фиг. 10):

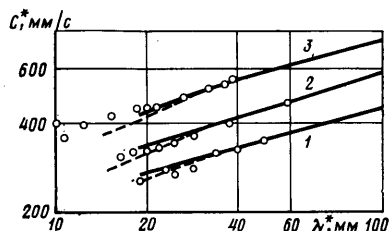
$\langle R \rangle / \nu^{3/4}$	1,0	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0
Эксперимент	0,25	0,45	0,55	0,65	0,75	0,85
Теория	0,47	0,60	0,63	0,65	0,66	0,67



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

Здесь  $\langle R \rangle$  — число Рейнольдса, построенное по среднему расходу при волновом течении, его связь с  $R$ :  $\langle R \rangle = q_0 R$ . Эта зависимость дает граничные значения волнового числа  $\alpha(\delta)$ , ниже которых волновые режимы не существуют. Здесь же приведены значения  $\alpha \langle R \rangle / \kappa$ , посчитанные по (9) (третья строка). Между значениями эксперимента и теоретическими имеется определенное соответствие. Экспериментальная зависимость построена усреднением данных по нескольким жидкостям и довольно приближена. Скажем, если пересчитать приведенные в [8] размерные величины на приведенные в [10] обобщающие эксперименты безразмерные величины, то такие значения ложатся либо выше, либо ниже кривой, приведенной на рис. 10 в [10]. Причем разброс точек порядка различия теории и эксперимента. Учитывая сказанное, следует признать соответствие хорошим.

Сравним профиль и параметры волн, полученных экспериментально и теоретически. Линия 1 на фиг. 2 — экспериментальный профиль волны [10, фиг. 16], линия 2 — теоретический. Параметры экспериментальной волны:  $\nu = 11,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $\sigma/\rho = 55,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}^2$ ;  $\langle R \rangle = 7,9$ ;  $\lambda^* = 55 \text{ мм}$ ;  $c^* = 463 \text{ мм/с}$ ;  $a^* = 0,93 \text{ мм}$ ;  $h_{\text{max}}^* = 1,31 \text{ мм}$ ;  $h_k^* = 0,46 \text{ мм}$ . Здесь для отличия от безразмерных величин размерные помечаются звездочкой сверху,  $h_k^*$  — толщина остаточного слоя. Определив  $\Delta = 0,0565$ ;  $\lambda = 40$ , получим теоретические параметры:  $c^* = 448 \text{ мм/с}$ ;  $a^* = 1,01 \text{ мм}$ ;  $h_{\text{max}}^* = 1,34 \text{ мм}$ ;  $h_k^* = 0,46 \text{ мм}$ . Далее, задний фронт теоретической волны полностью соответствует экспериментальному, теоретические осцилляции на переднем фронте более жесткие, их амплитуда намного больше экспериментальной, хотя  $h_{\text{min}}^*$  близки (0,28 и 0,33 мм). Соответствие довольно хорошее, но длинноволновое приближение явно не работает в области капиллярной раби.

На фиг. 3 представлена зависимость скорости волны от ее длины [8, фиг. 2.12]. Штриховые линии — решения краевой задачи (6) — (7), сплошные — пересчет таблицы. Пересчитанные с солитонов кривые только для коротких  $\lambda^*$  дают несколько завышенные значения скоростей. Имеется полное соответствие с экспериментом. Данные представлены для  $\nu = 7,2 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $\sigma/\rho = 57,6 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}^2$ ;  $\gamma = 194,6$  и  $\langle R \rangle = 6$ ; 10; 20 (кривые 1—3).

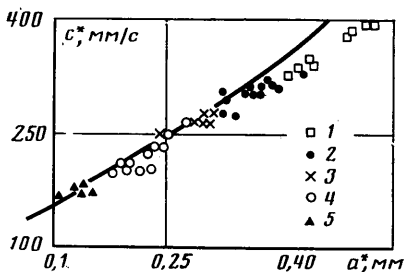
На фиг. 4 показана скорость волны как функция ее амплитуды [10] ( $\nu = 2,12 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $\sigma/\rho = 28,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}^2$ ;  $\gamma = 491,3$  и  $\langle R \rangle = 29$ ; 19; 14; 9,7; 5,6 (точки 1—5)). Сплошная линия построена по данным таблицы. Лишь при больших значениях амплитуды теория дает немного завышенные скорости.

Значения толщины остаточного слоя и минимальной толщины пленки важны с точки зрения тепломассопереноса в ней. Теоретическая и экспериментальная зависимости толщины остаточного слоя  $h_k^*$  и минимальной толщины  $h_{\text{min}}^*$  от амплитуды  $a^*$  даны на фиг. 5,  $\nu = 1,03 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$ ;  $\sigma/\rho = 72,9 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}^2$ ;  $\gamma = 3298$  и  $\langle R \rangle = 49$ ; 30; 19; 14; 9,8 (кривые 1—5 [10]).

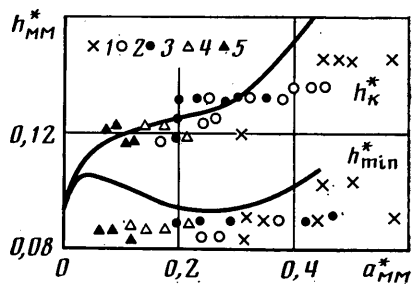
При  $\Delta \rightarrow 0$   $a \rightarrow 0,657(15\Delta)^{3/2}$  [14], но тогда можно построить асимптотику для малых  $a^*$   $h_k^* \rightarrow 1,0083\gamma^{1/3}(3\nu^2/2g)a^{*2/3}$ .

Зависимость от поверхностного натяжения крайне слабая: изменение  $\sigma$  в  $10^4$  раз ведет к изменению  $h_k^*$  в 2 раза. При малых  $a^*$  имеется весьма резкая зависимость  $h_k^*$ ,  $h_{\text{min}}^*$  от амплитуды, при больших же  $a^*$  зависимость слабая, как это и наблюдается в эксперименте.

При достаточно больших числах Рейнольдса начинают образовываться участки возвратного течения ( $u < 0$ ). Если принять параболический профиль скоростей, то участок возвратного течения образуется в месте



Фиг. 4



Фиг. 5

минимальной толщины, если  $H_{\min} < 1 - 1/D$ , т. е. начиная с  $\Delta \approx 0,0415$ ,  $D \approx 5,499$ . В обратном движении возвратное течение образуется на вершине волны при  $H_{\max} > 3(1 - 1/D)$ . Это наступает при  $\Delta \approx 0,047$ ;  $D \approx 6,544$ . Критическим значениям  $\Delta$  соответствуют в плоскости  $\alpha - \delta$  кривые  $\alpha = 2\pi[(\delta/\Delta)^{3/4} - 1]/[b_1(\delta/\Delta)^{1/4}]$ , разделяющие режимы с наличием возвратных токов и без таковых.

Авторы благодарят участников семинара Г. И. Петрова за полезные советы и дискуссию и лично Г. И. Петрова за внимание к работе, Г. М. Шевцову и Г. А. Дятлову за помощь при проведении расчетов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Капица П. Л. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. — ЖЭТФ, 1948, т. 18, вып. 1, с. 3–28.
2. Капица П. Л., Капица С. П. Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. — ЖЭТФ, 1949, т. 19, вып. 2, с. 105–120.
3. Шкадов В. Я. Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1967, № 1, с. 43–51.
4. Шкадов В. Я. К теории волновых течений тонкого слоя вязкой жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1968, № 2, с. 20–25.
5. Tailby S. R., Portalski S. The hydrodynamics of liquid films flowing on a vertical surface. — Trans. Instn. Chem. Engrs, 1960, v. 38, № 6, p. 324–330.
6. Stainthorp F. P., Allen J. M. The development of ripples on the surface of liquid film flowing inside a vertical tube. — Trans. Instn. Chem. Engrs, 1965, v. 43, № 3, p. 85–91.
7. Jones L. O., Whitaker S. Experimental study of falling liquid films. — AIChE Journal, 1966, v. 12, № 3, p. 525–529.
8. Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Троян Е. Н., Алексеенко С. В. Течение тонких пленок жидкости. — В сб.: Волновые процессы в двухфазных системах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1975, с. 129–206.
9. Покусаев Б. Г., Алексеенко С. В. Двумерные волны на вертикальной пленке жидкости. — В сб.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1977, с. 158–172.
10. Алексеенко С. В., Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г. Волны на поверхности вертикально стекающей пленки жидкости. Препринт № 36–79. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1979.
11. Маурин Л. Н., Точигин А. А. Солитоны на стекающей жидкой пленке. — ПМТФ, 1979, № 6, с. 47–54.
12. Цвелодуб О. Ю. Стационарные бегущие волны на пленке, стекающей по наклонной плоскости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1980, № 4, с. 142–146.
13. Цвелодуб О. Ю. Стационарные бегущие волны на вертикальной пленке жидкости. — В сб.: Волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1980, с. 47–63.
14. Бунов А. В., Демёхин Е. А., Шкадов В. Я. О неединственности нелинейных волновых решений в вязком слое. — ПММ, 1984, т. 48, вып. 4, с. 691–696.
15. Демёхин Е. А. Ветвление решения задачи о стационарных бегущих волнах в слое вязкой жидкости на наклонной плоскости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 5, с. 36–44.
16. Шкадов В. Я. Уединенные волны в слое вязкой жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1977, № 1, с. 63–66.
17. Демёхин Е. А., Демёхин И. А., Шкадов В. Я. Солитоны в стекающих слоях вязкой жидкости. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1983, № 4, с. 9–16.

Краснодар  
Москва

Поступила в редакцию  
23.III.1984